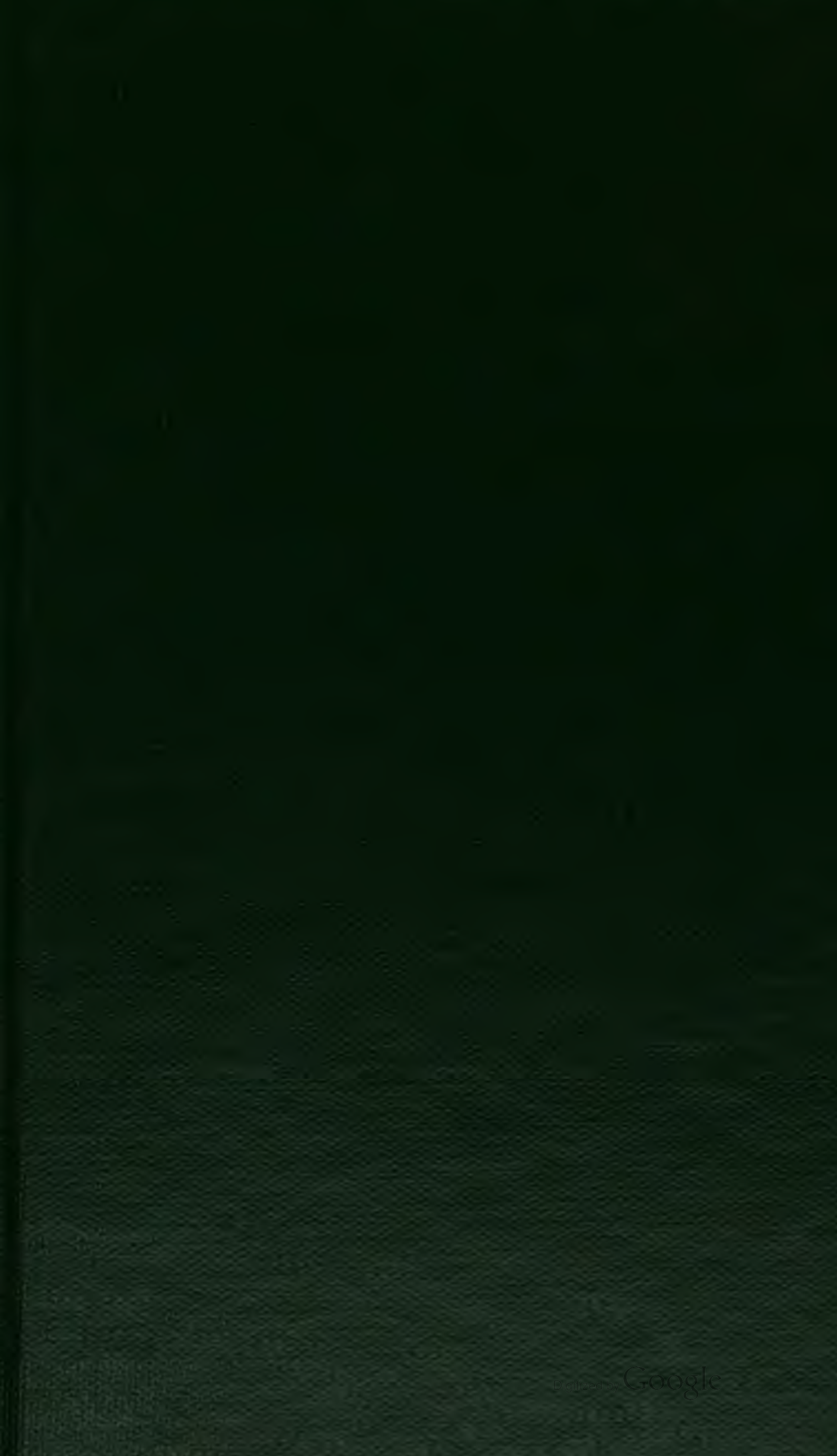






ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Neunundfunfzigster Teil.

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1876.

Inhalts-Verzeichniss

des neunundfunfzigsten Teils.

Mechanik.

Physik.

Aufgaben.

Litterarische Berichte.

Druckfehler.

Teil LVII.

S. 351.	Z. 10	v. oben	statt	F auf	lies	P auf
351.	- 5	- unten	-	2	-	?
353.	- 6	- oben	-	z	-	z_0
353.	- 10	- unten	-	$\ldots)))_{123}$	-	$\ldots)))_{321}$
354.	- 11	- -	-	0,588	-	0,58
355.	- 2	- oben	-	die Trennung	-	zur Trennung
355.	- 13	- unten	-	einen	-	einem
356.	- 8	- -	-	48	-	43
359.	- 6	- -	-	k	-	$\mathfrak{k}$

Teil LVIII.

132.	- 18	- oben	-	A_1	-	A
132.	- 20	- -	-	Integral	-	Intervall
133.	- 8	- -	-	Integral	-	Intervall
138.	- 9	- unten	-	$\varphi_r(z)$	-	$\varphi_r(z_s)$
139.	- 3	- oben	-	a_s	-	a_s'
142.	- 3	- unten	-	neuen	-	num.
144.	- 7	- -	-	welche	-	welchen
144.	- 1	- -	-	keinen oder einen	-	keinem oder einem
146.	- 1	- -	-	Rechenaufwand	-	Rechenarbeit
339.	- 7	- -	-	y	-	y_m

355. - 3 - oben „nur“ zu streichen

355. - 9 - - statt p lies d

355, 356 und 357 ist in den Gleichungen, mit Ausnahme der vier letzten auf S. 357, überall l statt b zu setzen.

358. Z. 1 v. unten statt Conductoren lies Conductor

In der zugehörigen Fig. 2. dem A_1 diametral gegenüber am inneren Kreise fehlt A_1'.

Teil LIX.

S. 61.	Z. 9	v. oben	statt	$pq+im$	lies	$pq-im$
100.	- 2	- unten	-	Dobiciecki	-	Dobiński
217.	- 8	- oben	-	geometrischen	-	goniometrischen
218.	am Ende		-	$\frac{1-e^{-a}}{1}$	-	$\frac{1}{1-e^{-a}}$

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Neunundfunfzigster Teil. Erstes Heft.

(Mit sechs lithographirten Tafeln.)

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1876.

I.

Ueber den Zusammenhang gewisser Sätze, welche sich auf geschlossene Reihen geometrischer Gebilde beziehen.

Von

F. August.

Der elementarste von der Art von Sätzen, mit welchen sich die folgende Untersuchung beschäftigt, ist der, dass, wenn zwei Seiten eines (der Lage nach) veränderlichen Dreiecks, welches einem unveränderlichen Kreise eingeschrieben ist, je einen unveränderlichen und dem ersten concentrischen Kreis berühren, die dritte Seite einen dritten jenen ebenfalls concentrischen Kreis berührt.

Bei weitem weniger elementar ist der Poncelet'sche Satz: (Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures pg. 361): Wenn zwei Seiten eines einem festen Kreise eingeschriebenen veränderlichen Dreiecks je einen von zwei unveränderlichen Kreisen berühren, die mit dem ersten Kreise derselben Kreisschaar angehören, so berührt auch die dritte Seite stets einen unveränderlichen Kreis derselben Schaar.

Beide Sätze lassen eine Erweiterung auf Polygone zu, und man gelangt durch eine einfache Betrachtung endlich zu dem interessanten Satze:

Wenn ein Polygon zugleich einem festen Kreise ein- und einem andern umgeschrieben ist, so lassen sich denselben Kreisen unzählig viele Polygone von derselben Seitenzahl in derselben Weise ein- und umschreiben. Die beiden Kreise können bekanntlich auch durch zwei beliebige Kegelschnitte ersetzt werden.

Ferner hat Steiner ähnliche Sätze angegeben über geschlossene Reihen von einander berührenden Kreisen und Kugeln, die ausserdem zwei feste Kreise, respective drei feste Kugeln berühren (Crelle Bd. I pg. 254—257. Bd. II pg. 192); endlich sind es die Steiner-schen Sätze über Polygone bei Curven dritten Grades, die zu diesem Typus gehören (Crelle Bd. 32 pg. 182 ff.). Die grosse Uebereinstimmung in diesen Sätzen lässt vermuten, dass sich dieselben von einem gemeinsamen Gesichtspunkte aus werden begründen lassen, und so zeigte sich denn auch in der analytischen Behandlungsweise, dass sowol die Poncelet'schen Sätze, wie diejenigen über die Steiner-schen Polygone auf das Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Gattung führten, wie dies Jacobi und Clebsch nachgewiesen haben. (Jacobi, Ueber die Anwendung der elliptischen Transscendenten auf ein Problem der Elementargeometrie, Crelle Bd. III; Clebsch, über einen Satz von Steiner etc., Crelle Bd. 63).

Obschon hierdurch der Zusammenhang jener Theoreme aufgedeckt ist, bleibt es doch wünschenswert, diesen Zusammenhang auch in geometrischer Weise klar zu legen, also einen Satz aufzufinden, aus welchem sich die genannten Theoreme durch möglichst einfache geometrische Betrachtungen ableiten lassen. Diese Erwägung veranlasste mich zu der folgenden Arbeit. Als einen geeigneten Ausgangspunkt habe ich den Satz von den Steiner'schen Polygonen in etwas erweiterter Form erkannt. Die Untersuchung führte mich zugleich auf einige analoge Sätze für räumliche Gebilde, die, soviel mir bekannt ist, noch nicht anderweitig veröffentlich sind. Wie mir nach Vollendung dieser Arbeit bekannt wurde, sind die Steiner'schen Polygone von Herrn Boeklund in den Academieschriften von Lund geometrisch behandelt; doch ist mir die Arbeit selbst bisher nicht zu Gesicht gekommen. Um eine gewisse Uebersicht auch über diejenigen Schliessungstheoreme zu geben, die weniger einfachen Charakters sind, also nicht ohne Weiteres aus den in der folgenden Arbeit behandelten hergeleitet werden können, bemerke ich, dass Clebsch im 63sten Band des Journals für reine und angewandte Mathematik einen derartigen Satz für algebraische Curven beliebigen Geschlechts aufgestellt hat. Herr Darboux hat einen Schliessungssatz veröffentlicht, bei welchem es sich um Polygone handelt, die einer von drei confocalen Flächen zweiten Grades eingeschrieben und zugleich den beiden andern umschrieben sind. Ausserdem hat Herr Darboux in seiner Abhandlung: Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces etc. (Mém. de Bordeaux t. IX 1873 Note II pg. 123 ff.) in ausführlicher Weise das Poncelet'sche Theorem und eine Reihe von Erweiterungen desselben behandelt, und zwar mit Hilfe einer sehr einfachen und interessanten Methode. Herr Felix Klein in

München hat die Güte gehabt, mich auf einen Schliessungssatz für geodätische Polygone auf Flächen zweiten Grades aufmerksam zu machen. Auch der im vorigen Teile (LVIII) pg. 216. publicirte Lehrsatz, eine gewisse Raumcurve sechsten Grades betreffend, gehört dem Gebiet der Schliessungstheoreme an.

I. Vorbetrachtungen.

Wenn ich in diesen Vorbetrachtungen etwas weiter zurückgreife, als es dem Geometer von Fach nötig erscheinen möchte, so geschieht dies in der Ueberzeugung, dass, je weiter die mathematischen Disciplinen aus einander gehen, das Bedürfniss um so grösser ist, durch einleitende Betrachtungen das Verständniss von Specialuntersuchungen zu erleichtern.

1. *Ueber Flächen zweiten Grades und gewisse auf ihnen befindliche Linien.*

Bekanntlich liegen auf jedem einfachen (einschaligen) Hyperboloid zwei Schaaren von Geraden (Generatrices). Jede Gerade der einen Schaar schneidet jede Gerade der andern Schaar, ist aber windschief zu einer Geraden derselben Schaar. Jede Tangentialebene schneidet das Hyperboloid in zwei Geraden, die verschiedenen Schaaren angehören und sich im Berührungspunkte schneiden. Umgekehrt ist jede durch eine Generatrix gelegte Ebene eine Tangentialebene des Hyperboloids. Auch die übrigen Arten von Flächen zweiten Grades enthalten in sich gerade Linien, dieselben sind aber imaginär, und können sowol durch die Rechnung, als auch durch die v. Staudt'schen geometrischen Beobachtungen in ihrer Bedeutung erkannt werden. (Vgl. v. Staudt Beiträge zur Geometrie der Lage. Nürnberg 1856—60 und F. August Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie. Berlin 1872 Programm der Friedrichs Realschule).

Der Durchschnitt zweier Flächen zweiten Grades ist eine Raumcurve vierten Grades R_4; eine solche heisst erster Art im Gegensatz zu den Raumcurven vierten Grades zweiter Art, durch die nur eine Fläche zweiten Grades gelegt werden kann, und welche mit zwei windschiefen Geraden zusammen den Durchschnitt jener Fläche mit einer Fläche dritten Grades bildet. Im folgenden ist nur von den Raumcurven erster Art die Rede. Durch eine solche R_4 lässt sich eine Schaar von Flächen zweiten Grades legen, unter denen im allgemeinen vier Kegel sind, und zwar geht durch jeden Punkt π des Raumes, der nicht auf R_4 liegt, eine solche Fläche. Die Tangentialebene in π schneidet diese Fläche in zwei (reellen oder imaginären) Geraden, deren jede die R_4 zweimal schneidet. Man verbinde irgend

zwei Punkte α und β der Raumcurve R_4 durch eine Gerade, so giebt es stets ein Hyperboloid aus der Schaar, welches diese Gerade ganz in sich enthält. Jede Ebene durch $\alpha\beta$ schneidet dieses Hyperboloid noch in einer Generatrix der zweiten Schaar, und diese Generatrix ist bestimmt durch die beiden Schnittpunkte $\alpha_0\beta_0$, welche dieselbe Ebene noch mit R_4 hat. Lässt man die Ebene sich um $\alpha\beta$, respective $\alpha_0\beta_0$ drehen, so erhält man die beiden Schaaren der Generatrices des Hyperboloids in dieser Weise. Wir wollen den Inbegriff aller Secanten einer R_4, welche eine Schaar Generatrices eines Hyperboloids bilden, eine Secantenschaar und die beiden Secantenschaaren, die auf demselben Hyperboloid liegen, conjugirte Secantenschaaren nennen. Wenn die Gerade $\alpha\beta$ Generatrix eines der vier Kegel ist, welche sich durch R_4 legen lassen, so wird die Secantenschaar $\alpha_0\beta_0$ die Schaar der Generatrices dieses Kegels und sich selbst conjugirt; wir wollen diese Schaar eine konische Secantenschaar nennen. Zu jeder R_4 gehören also vier konische Secantenschaaren.

2. *Einiges über perspectivische Projectionen, namentlich mit Rücksicht auf die in* 1. *betrachteten Gebilde.*

Eine algebraische Raumcurve $n$ten Grades, d. h. eine solche, welche von einer Ebene im Allgemeinen in n Punkten geschnitten wird, projicirt sich von jedem Punkte π aus auf eine beliebige Ebene e in eine ebene Curve $n$ten Grades. Geht der Projectionspol π in einen Punkt der Raumcurve selbt über, so verringert sich der Grad der Projection um 1, indem sich eine unbestimmte durch die Spur der Tangente in π gehende Gerade ablöst, welche ausser Acht gelassen werden kann, wenn man die völlig unbestimmte Projection des Poles selbst vermeidet.

Durch die perspectivische Projection von irgend einem Punkte π aus auf irgend eine Ebene e, die nicht durch π gehen möge, kann eine Fläche zweiten Grades f_2 nebst der auf ihr befindlichen Gebilden in die Ebene e abgebildet werden, und bei dieser Abbildung, die wir für die Folge öfter benutzen werden, sind zwei Fälle zu unterscheiden.

a. Der allgemeinere Fall ist, dass der Projectionspol π nicht auf der Fläche f_2 liegt. In diesem Falle ist die Abbildung einzweideutig; d. h. es entspricht irgend einem Punkte α_1 der f_2 ein Punkt α' der Ebene e, während einem Punkte α' der Ebene e zwei Punkte α_1 und α_2 der Fläche f_2 entsprechen. Die beiden Schaaren der Generatrices der f_2 projiciren sich in die Schaar der Tangenten des Kegelschnitts T'^2, in welchem der Tangentenkegel von π an f_2

die Ebene e schneidet, jede Tangente dieses Kegelschnittes entspricht also zweier Geraden von f_2 aus verschiedenen Schaaren. Irgend einer andern Geraden der Ebene e entspricht ein nicht aufgelöster Kegelschnitt auf f_2; dessen Ebene durch π geht. Einem beliebigen Kegelschnitt K'^2 auf f_2 entspricht ein Kegelschnitt K^2, welcher den Kegelschnitt T'^2 in zwei (reellen oder imaginären) Punkten berührt, da ja der Kegelschnitt K^2 den Kegelschnitt T^2, in welchem der Berührungskegel von π die Fläche f_2 berührt, in zwei Punkten schneidet. Umgekehrt entsprechen jedem Kegelschnitte K'^2 in e, welcher T'^2 doppelt berührt, zwei Kegelschnitte K_1^2 und K_2^2 auf f_2, während einem andern Kegelschnitte L_2' der Ebene e, welcher T'^2 nicht doppelt berührt, eine Raumcurve vierten Grades auf f_2 entspricht, deren Eine konische Secantenschaar durch π geht, und umgekehrt. Jeder andern Raumcurve vierten Grades auf f_2 entspricht dagegen in e eine ebene Curve vierten Grades, welche T'^2 viermal berührt, und welche ausserdem zwei Doppelpunkte hat, weil durch π zwei Secanten von R_4 hindurchgehen. Eine weitere Fortsetzung dieser Betrachtungen ist für unsere Zwecke entbehrlich.

b. Wenn man den Projectionspol π im Speciellen auf f_2 selber wählt, und wenn man die völlig unbestimmte Projection von π ausser Acht lässt, so wird die Abbildung von f_2 in e ein- und eindeutig d. h. es entspricht jedem Punkte α in f_2 ein Punkt α' in e, und umgekehrt. Die Punkte, welche dem Pol π unendlich nahe sind, projiciren sich in die Punkte der Geraden, in welcher die Tangentialebene von f_2 in π die Bildebene e schneidet. Die beiden Generatrices G_1 und G_2 der Fläche f_2, welche durch π gehen, projiciren sich in zwei Punkte γ_1' und γ_2', alle übrigen Generatrices der ersten Schaar in Gerade durch γ_2', die der zweiten Schaar in Gerade durch γ_1'. Die sämmtlichen ebenen Schnitte von f_2, welche durch π gehen, projiciren sich als die sämmtlichen Geraden in e, und umgekehrt. Jedem ebenen Schnitt von f_2, der nicht durch π geht, entspricht ein Kegelschnitt durch γ_1' und γ_2'. Jedem Kegelschnitt in e, der durch γ_1' und γ_2' geht, entspricht in f_2 umgekehrt wieder ein Kegelschnitt, da f_2 und der projicirende Kegel ausserdem die Geraden G_1 und G_2 gemein haben.

Einer Raumcurve vierten Grades R_4 auf f_2 entspricht im Allgemeinen in e eine ebene Curve vierten Grades, welche in γ_1' und γ_2' Doppelpunkte hat, und umgekehrt, jeder ebenen Curve vierten Grades R_4' in e, welche in γ_1' und γ_2' Doppelpunkte hat, entspricht in f_2 eine Raumcurve R_4; denn der projicirende Kegel $\pi R_4'$, welcher vierten Grades ist, schneidet f_2 im Ganzen in einer Curve achten Grades, von der sich aber die beiden Doppelgeraden G_1 und G_2 abtrennen, so dass als nicht singulärer Bestandteil eine Raumcurve vierten Grades

übrig bleibt, die nicht von der zweiten Art sein kann, weil ihre Projection von π sonst einen dreifachen Punkt haben müsste. Wenn eine Raumcurve R_4 durch π geht, so ist ihre Projection in e eine ebene Curve dritten Grades C_3', durch γ_1' und γ_2', und umgekehrt.

Von dieser Verwandtschaft sind einige specielle Fälle besonders erwähnenswert: Ist nämlich die Bildebene parallel zur Tangentialebene von f_2 im Projectionspole π, so rücken die beiden Punkte γ_1' und γ_2' ins Unendliche, und die sämmtlichen ebenen Schnitte von f_2 projiciren sich in ähnliche und paarweise ähnlichliegende Kegelschnitte mit parallelen Asymptoten (also auch mit parallelen Axen). Ist noch specieller π ein Nabelpunkt von f_2, so werden γ_1' und γ_2' die Kreispunkte von e, und die sämmtlichen ebenen Schnitte von f_2 projiciren sich in die sämmtlichen Kreise von e und umgekehrt. Ist endlich f_2 eine Kugel, so ist jeder Punkt π derselben als Nabelpunkt anzusehen, und wenn man von ihm aus die Kugel auf eine Ebene e projicirt, welche der Tangentialebene in π parallel ist, so erhält man die bekannte stereographische Projection, in der sich jeder Kugelkreis wieder als ein Kreis abbildet. — eine Projection, welche bekanntlich die wichtige Eigenschaft der Conformität besitzt.

3. *Notwendige Punkte bei Büscheln von Curven dritten Grades.*

Eine ebene Curve dritten Grades C_3' ist durch neun ihrer Punkte im Allgemeinen eindeutig bestimmt. Durch acht beliebige Punkte lassen sich unendlich viele solche Curven legen; diese bilden einen ebenen Curvenbüschel dritten Grades. Irgend zwei dieser Curven haben aber noch einen neunten Punkt gemein, und durch diesen müssen alle Curven des Büschels hindurchgehen. Die neun Durchschnittspunkte zweier Curven dritten Grades, oder die neun Fundamentalpunkte eines Büschels von Curven dritten Grades können also nicht willkürlich gewählt werden; sondern nur acht sind beliebig, der neunte (notwendige) ist durch die acht übrigen bestimmt.

Ordnet man nun die sechs Durchschnittspunkte einer ebenen Curve C_3' und eines Kegelschnittes K_2' in drei Paare $\alpha_1'\alpha_2'$, $\beta_1'\beta_2'$ und $\gamma_1'\gamma_2'$, so schneidet jede der drei Verbindungslinien $A'B'C'$ je eines Punktpaares die C_3' noch in einem Punkte, bezüglich in $\alpha_3'\beta_3'\gamma_3'$, die in einer Geraden liegen. Denn durch die neun Punkte $\alpha'\beta'\gamma'$ geht erstens die Curve C_3', zweitens die drei Geraden $A'B'C'$, die zusammen eine aufgelöste Curve dritten Grades bilden; also sind jene neun Punkte die Fundamentalpunkte eines Büschels von Curven dritten Grades. Durch jeden Punkt δ' der Ebene lässt sich eine diesem Büschel zugehörige Curve legen. Wählt man nun δ' auf K_2', so muss die Curve, da sie sieben Punkte mit K_2' gemein hat, alle

Punkte von K_2' enthalten, also aufgelöst sein in K_2' und eine Gerade, welche natürlich durch die drei Punkte $\alpha_3'\beta_3'\gamma_3'$ hindurchgeht.

Statt des Kegelschnittes K_2' kann man nun auch zwei Gerade wählen, welche die C_3' in $\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'$ und $\alpha_2'\beta_2'\gamma_2'$ schneiden, so dass man den specielleren Satz erhält:

Verbindet man die Schnittpunkte zweier Secanten einer C_3' paarweise durch die drei Geraden $\alpha_1'\alpha_2'$, $\beta_1'\beta_2'$, $\gamma_1'\gamma_2'$, so liegen die dritten Schnittpunkte dieser drei Geraden mit C_3', nämlich $\alpha_3'\beta_3'\gamma_3'$ wieder in einer Geraden.

Dieser Satz lässt noch mannigfache Specialisirungen zu, die namentlich dadurch gewonnen werden können, dass man einige der betrachteten Punkte unendlich nahe rücken, also die Secanten in Tangenten übergehen lässt. Er bildet den Ausgangspunkt für die Betrachtung der Steinerschen Polygone.

II. Die Steinerschen Polygone in weiterem Sinne.

Man kann dem zuletzt erwähnten Satze auch folgende Fassung geben:

Verbindet man einen festen Punkt λ' einer ebenen Curve dritten Grades C_3' mit einem veränderlichen α' derselben Curve durch eine Gerade, welche C_3' noch in β' schneidet, zieht von β' nach einem festen Curvenpunkte μ', der dritte Durchschnittspunkt sei γ', von γ' nach einem festen Curvenpunkte ν', der dritte Durchschnittspunkt dieser Geraden sei δ', dann ist der dritte Durchschnittspunkt der veränderlichen Geraden $\alpha'\delta'$ mit C_3' ein fester Punkt ϱ', den man finden kann, indem man den dritten Durchschnittspunkt σ' von $\lambda'\nu'$ bestimmt, und alsdann den dritten Durchschnittspunkt von $\sigma'\mu'$, der eben ϱ' ist.

Die vier Seiten des veränderlichen, der C_3' eingeschriebenen einfachen Vierecks $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ gehen also je durch einen festen Punkt der Curve C_3'. — Setzt man nun von δ' die Construction in analoger Weise fort, zieht also von δ' eine Gerade nach einem festen Curvenpunkte τ', nennt den dritten Schnittpunkt ε', und von ε' eine Gerade nach dem festen Curvenpunkte v', deren dritter Schnittpunkt ζ' ist, so geht auch die veränderliche Gerade $\alpha'\zeta'$ durch einen festen Curvenpunkt φ'. Man hat also ein Sechseck, welches mit dem Viereck analoge Eigenschaften besitzt, und kann in derselben Weise zu einem Achteck, Zehneck, und allgemein zu einem $2n$ Eck übergehn, so dass man folgenden Satz aussprechen kann:

Wenn man einer ebenen Curve C_3' ein veränderliches $2n$ Eck einschreibt, dessen Seiten alle bis auf eine als dritte Schnittpunkte mit der Curve einen festen Punkt haben, also ebene Strahlbüschel beschreiben, so hat auch die letzte als dritten Schnittpunkt mit der Curve einen festen Punkt, dessen Lage man constructiv aus derjenigen der übrigen bestimmen kann, ohne das veränderliche $2n$ Eck selbst zu construiren.

Dass der Satz auf Polygone mit gerader Seitenzahl beschränkt ist, ist leicht zu erkennen. Denn verbindet man die festen Curvenpunkte λ' und μ' mit dem beweglichen Curvenpunkte β' und verbindet die dritten Schnittpunkte $\alpha'\gamma'$ dieser beiden Geraden, so kann der dritte Schnittpunkt ξ' von $\alpha'\gamma'$ mit C_3' folgendermassen gefunden werden: Die Verbindungslinie von λ' und μ' hat als dritten Schnittpunkt mit C_3' den festen Punkt φ', die Tangente in dem veränderlichen Punkte β' schneidet C_3' noch in dem veränderlichen Punkte β_0' und die Gerade $\varphi'\beta_0'$ schneidet C_3' zum dritten Mal in dem gesuchten Punkte ξ'. Der Punkt ξ' aber ist veränderlich; er könnte nur fest sein und mit φ' zusammenfallen, wenn dies ein Doppelpunkt von C_3' wäre, also mit λ' oder μ' zusammenfiele, in welchem Falle der Satz überhaupt illusorisch würde.

In der oben mitgeteilten allgemeinen Form ist der Satz bei Steiner und bei Clebsch nicht ausgesprochen, vielmehr sind gleich speciellere Fälle ins Auge gefasst, die sich aus ihm ohne Weiteres ergeben. Während nämlich das Zusammenfallen zweier aufeinander folgender der festen Punkte $\lambda'\mu'\nu'\ldots$ einfach einem Ausfall beider gleichkommen würde, kann man offenbar zwei nicht aufeinander folgende, soweit man sie beliebig wählen darf, zusammenfallen lassen. So hat nun Steiner besonders den Fall behandelt, wo die Punkte abwechselnd mit λ' und μ' zusammenfallen, bis auf den letzten, der durch die übrigen bestimmt ist, also im Allgemeinen nicht mit μ' zusammenfallen wird. Man kann nun aber fragen, wie λ' und μ' liegen müssen, damit der letzte Punkt von selbst mit μ' zusammenfalle. Dieses Problem hängt natürlich auch von der Seitenzahl $2n$ ab, seine Lösung liefert die eigentlichen Steinerschen Polygone, deren Seiten abwechselnd durch zwei feste Curvenpunkte λ' und μ' hindurchgehen, während ihre Eckpunkte veränderliche Punkte der C_3' sind, deren einen man willkürlich wählen kann.

III. Geschlossene veränderliche Polygone, welche Raumcurven vierten Grades und erster Art eingeschrieben sind.

Einer Raumcurve R_4 sei ein Viereck mit den Eckpunkten $\alpha\beta\gamma\delta$ eingeschrieben. Man projicire die Figur von einem beliebigen Punkte

π der Raumcurve aus auf eine beliebige Ebene e, (welche nicht durch π geht). Dann projicirt sich R_4 in eine ebene Curve C_3', die Punkte $\alpha\beta\gamma\delta$ in die vier Curvenpunkte $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, und wir bezeichnen wie oben den dritten Durchschnittspunkt von C_3'

mit $\alpha'\beta'$ durch λ',
mit $\beta'\gamma'$ durch μ',
mit $\gamma'\delta'$ durch ν',
mit $\delta'\alpha'$ durch ϱ',

dann ist ϱ' so zu construiren, wie es oben angegeben war. Lassen wir nun das Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ sich dadurch verändern, dass

$\alpha\beta$ stets die Gerade $\pi\lambda'$ schneidet,
$\beta\gamma$ stets die Gerade $\pi\mu'$,
$\gamma\delta$ stets die Gerade $\pi\nu'$,

so bleiben $\mu'\nu'$ fest, also nach π auch ϱ', und die Gerade $\delta\alpha$ schneidet stets die Gerade $\pi\varrho'$. Die einzelnen Seiten des Vierecks beschreiben also Secantenschaaren der Raumcurve R_4 (siehe oben I, 1.). Wir sind somit auf einen Satz geführt, der sich wieder auf Sechsecke, Achtecke, und allgemein $2n$ Ecke übertragen lässt, und dann folgendermassen ausgesprochen werden kann:

Wenn jede der Seiten eines veränderlichen, einer Raumcurve R_4 eingeschriebenen $2n$ Ecks, bis auf eine einer Secantenschaar angehört, also ein Hyperboloid beschreibt, so ist dasselbe mit der letzten Seite der Fall.

Bemerkung. Verbindet man die Eckpunkte eines der Raumcurve R_4 eingeschriebenen $2n$ Ecks $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$ mit dem Scheitel eines der vier Kegel zweiten Grades, welcher durch R_4 gehe, so schneidet jede dieser Verbindungslinien die R_4 noch einmal. Diese zweiten Schnittpunkte seien bezüglich $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots$ Die Seiten des durch sie bestimmten Polygons und die entsprechenden Seiten des Polygons $\alpha\beta\gamma\delta$; also beispielsweise $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$ gehören conjugirten Secantenschaaren an, da sie paarweise in einer Ebene liegen. Wir erhalten demgemäss zu dem eben besprochenen Satze den folgenden

Zusatz. Wenn jede Seite eines veränderlichen $2n$-Ecks, welches einer R_4 eingeschrieben ist, einer Secantenschaar von R_4 angehört, so kann man derselben R_4 auch eine Schaar von $2n$ Ecken einschreiben, deren Seiten der Reihe nach denjenigen Secantenschaaren angehören, welche denen der ersteren Polygone bezüglich conjugirt sind.

In Bezug auf die Specialisirungen des Hauptsatzes kann natürlich die Analogie mit den Sätzen über die Steinerschen Polygone auch verfolgt werden. Lässt man also etwa zwei unmittelbar aufeinander folgende Seiten des Polygons zusammenfallen, so ist es so gut, als fiele ein Eckpunkt und zwei Seiten ganz aus dem Polygon heraus. Dagegen können zwei nicht unmittelbar aufeinander folgende Seiten derselben Secantenschaar angehören. Man könnte namentlich die erste, dritte, bis $(2n-1)$te Seite des Polygons aus derselben Schaar wählen, und die zweite, vierte, bis $(2n-2)$te aus einer zweiten Schaar; dann wird die letzte $(2n)$te Gerade im Allgemeinen einer dritten Schaar angehören, die aber bei besonderer Wahl der beiden ersten Schaaren mit der zweiten derselben identisch werden kann, so dass man ein der R_4 eingeschriebenes $2n$ Eck erhält, dessen Seiten abwechselnd je einer von zwei Secantenschaaren angehören. Noch specieller können diese beiden Schaaren conjugirte Secantenschaaren werden, also demselben Hyperboloide angehören. Es existirt also folgender speciellere Satz:

Wenn sich auf einem Hyperboloide eine Raumcurve vierten Grades R_4 befindet von der Beschaffenheit, dass ihr ein geschlossenes $2n$ Eck eingeschrieben werden kann, dessen Seiten abwechselnd je einer der beiden Schaaren von Generatrices des Hyperboloids angehören, so lassen sich derselben R_4 unzählige geschlossene $2n$-Ecke derselben Art einschreiben, und zwar kann jeder Punkt der R_4 als erster Eckpunkt gewählt werden.

Die Frage, wie die betreffenden Secantenschaaren in jedem Falle gewählt werden müssen, kann natürlich leicht auf die analoge Frage für die ebenen Curven dritten Grades reducirt werden, die in den Arbeiten von Steiner und Clebsch erledigt sind.

Man kann nun danach fragen, ob die eben behandelte Eigenschaft der Raumcurven vierten Grades sich abermals auf andere Gebilde übertragen lässt. Eine solche Uebertragung könnte etwa durch Projection der Figur von einem beliebigen Punkte π auf eine beliebige Ebene e geschehen. Man würde dadurch auf einen Satz über ebene Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten geführt werden, der aber nicht einfach genug ist, um ein besonderes Interesse zu erregen; der vielmehr um einen treffenden Ausdruck Steiners zu gebrauchen, eine blosse Carricatur der einfacheren Sätze sein würde *).

Ein Fall aber ist es, der besondere Beachtung verdient, und mit dem wir uns im folgenden beschäftigen werden.

---

*) Steiner, Systematische Entwickelungen, pg. 270 unten.

IV. Der Poncelet'sche Satz.

Wählt man nämlich als Projectionspol π den Scheitel eines der vier Kegel, welche durch R_4 hindurchgehn, und als Bildedene e, der bequemeren Ausdrucksweise wegen, obwohl dies an sich nicht nötig wäre, die durch die drei Scheitel der drei andern Kegel gelegte Ebene, die bekanntlich die gemeinschaftliche Polarebene des Punktes π für alle Flächen f_2 ist, welche durch R_4 hindurchgehen, so projicirt sich irgend eine Secantenschaar von R_4 in die Schaar der Tangenten desjenigen Kegelschnittes L_2', in welchem das von der Secantenschaar beschriebene Hyperboloïd h_2 die Ebene e schneidet; conjugirte Secantenschaaren projiciren sich in dieselbe Tangentenschaar (I, 1 und 2), nicht conjugirte in verschiedene; die sämmtlichen Kegelschnitte L_2' gehen durch die vier Schnittpunkte von R_4 mit e, bilden also in e einen Kegelschnittbüschel. R_4 selber projicirt sich in einen Kegelschnitt K'^2 der ebenfalls jenem Büschel angehört. Schreibt man nun der R_4 ein Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ ein, so wird, wie wir gesehn haben, wenn $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, Secantenschaaren beschreiben, auch $\delta\alpha$ eine solche beschreiben, und das veränderliche Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ projicirt sich in ein veränderliches Viereck $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, welches dem Kegelschnitt K'^2 eingeschrieben ist, während jede seiner Seiten einen Kegelschnitt der Schaar L'^2 berührt. Das Analoge gilt für $2n$ Ecke. Hierdurch erhält man einen Satz, der sich von dem erweiterten Poncelet'schen scheinbar noch dadurch unterscheidet, dass das Polygon eine gerade Seitenzahl hat. Da aber der Kegelschnitt K_2' auch zur Schaar L_2' gehört, so können wir die eine Seite des Vierecks z. B. $\gamma'\delta'$ so wählen, dass sie K_2' berührt, so dass also γ' und δ' zusammenfallen, und das Viereck $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ in ein Dreieck übergeht, oder, um es anders auszudrücken, wir können die Gerade $\gamma\delta$ so wählen, dass sie durch π geht, also die konische Secantenschaar durch π beschreibt, und können die verschwindende Seite in der projicirten Figur unberücksichtigt lassen. Ebenso können wir von einem $2n$ Eck zum $(2n-1)$ Eck übergehen. Um aber gar keinen Unterschied in der Betrachtung der $2n$ Ecke und der $(2n-1)$ Ecke nötig zu haben, können wir die Seiten des ebenen Polygons abwechselnd verschwindend und nicht verschwindend wählen, d. h. das Raumpolygon aus Secanten beliebiger Schaaren alternirend mit Secanten der konischen Schaar zusammensetzen. Wir sind somit auf den erweiterten Poncelet'schen Satz geführt, den wir folgendermassen aussprechen können:

Wenn sich in einer Ebene e ein Kegelschnittbüschel L_2' befindet, und einem ihm angehörigen Kegelschnitte K_2' ein veränderliches Dreieck, respective n Eck eingeschrieben ist, dessen Seiten bis auf eine je einen der

Kegelschnitte des Büschels umhüllen, so umhüllt auch die letzte einen Kegelschnitt des Büschels.

Insbesondere können die Seiten alle denselben Kegelschnitt berühren, so dass man folgenden Zusatz erhält:

Wenn in der Ebene e zwei Kegelschnitte so liegen, dass sich ein Polygon zugleich dem einen ein- und dem andern umschreiben lässt, so haben unendlich viele Polygone dieselbe Beziehung zu diesen Kegelschnitten und man kann als ersten Eckpunkt eines solchen Polygons jeden Punkt des ersten Kegelschnittes wählen. (Damit das Polygon reell werde, müssen sich aber von jenem Punkte reelle Tangenten an den zweiten Kegelschnitt legen lassen.)

Dass man in der Tat die hier in Frage kommenden ebenen Gebilde als gegeben betrachten und daraus die räumlichen Gebilde (R_4 und den Punkt π) bestimmen kann, und zwar mit einer gewissen Willkürlichkeit, das bedarf wohl keines genaueren Nachweises. Dagegen ist der zuletzt ausgesprochene Satz noch nicht vollständig erwiesen. Bekanntlich wird nämlich jede Gerade einer Ebene von zwei Kegelschnitten eines in dieser Ebene befindlichen Büschels berührt. Wenn also sämmtliche Seiten eines dem Kegelschnitte K_2' eingeschriebenen Polygons bis auf die letzte beständig einen zweiten Kegelschnitt L_2' berühren, so berührt die letzte beständig einen Kegelschnitt derselben Schaar, während sie in jeder besondern Lage noch einen zweiten berührt, welcher sich indess mit dieser Lage ändert. Denkt man sich also das Polygon in irgend einer besondern Lage gezeichnet, und findet man, dass die letzte Seite den Kegelschnitt L_2' berührt, aber ausserdem noch einen zweiten Kegelschnitt der Schaar $L_{2,0}'$, so ist noch zu untersuchen, ob bei der Veränderung des Polygons $L_{2,0}'$ oder ob L_2' unverändert von der letzten Seite berührt wird. Wir nehmen deshalb im Raume einen beliebigen Punkt π an, legen durch K_2' einen Kegel, der π zum Scheitel hat, und durch L_2' ein Hyperboloid h_2, welches als Pol von e den Punkt π hat, und nennen den Durchschnitt des Hyperboloids und des Kegels R_4. Da die Seiten $\alpha'\beta'$, $\beta'\gamma'$ etc. sämmtlich L_2' berühren, so sind die Ebenen $\pi\alpha'\beta'$ etc. Tangentialebenen von h_2, enthalten also sämmtlich je zwei Generatrices conjugirter Schaaren von h_2. Die eine dieser Generatrices in der Ebene $\pi\alpha'\beta'$ schneide R_4 in den Punkten $\alpha_2\beta_1$ (deren Projectionen natürlich α' und β' sind); die derselben Schaar angehörige Generatrix in der Ebene $\pi\beta'\gamma'$ schneidet R_4 in zwei Punkten, deren Projectionen β' und γ' sind, aber der erste dieser Punkte muss von β_1 verschieden sein, weil die einer nicht konischen Schaar angehörigen Generatrices gegen einander windschief

sind; wir nennen diesen Punkt β_2, so dass also $\beta_1\beta_2$ die Generatrix des Kegels ist, welche durch β' geht. Denken wir uns diese Betrachtung fortgesetzt und die Punkte $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ auch verbunden, so erhalten wir ein veränderliches geschlossenes $2n$ Eck $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\ldots\xi_1\xi_2$, dessen Seiten abwechselnd 2 Secantenschaaren angehören, nämlich der konischen und der einen Schaar des Hyperboloids h_2; durch Projection der Figur auf die Ebene e erhalten wir ein veränderliches geschlossenes $2n$ Eck, das dem Kegelschnitt L_2' umschrieben, dem Kegelschnitt K_2' eingeschrieben ist, wodurch auch der zweite der oben ausgesprochenen Sätze bewiesen ist. Schliesslich sei zu diesem Beweise bemerkt, dass das hier gewählte räumliche Polygon die übersichtlichste Anordnung hat, dass man aber allgemeiner ein Polygon hätte zu Hülfe nehmen können, dessen Seiten teils der einen Secantenschaar auf h_2, teils der conjugirten, teils endlich der konischen Schaar angehören, wenn nur die Anzahl aller eine gerade ist, die zwischen n und $2n$ liegt.

V. Der Steinersche Satz über die Kreisreihen nebst Erweiterungen.

Aus dem Ponceletschen Satze lassen sich nun noch einige andere Sätze herleiten, in denen der Steinersche Satz über die Kreisreihen als ein specieller Fall enthalten ist.

Haben wir nämlich ein Hyperboloid, oder da es hier auf die Realität der Generatrices nicht ankommt, eine beliebige Fläche zweiten Grades f_2, und auf derselben eine Raumcurve R_4, und projiciren wir die R_4 wieder von einem der vier Kegelscheitel π aus auf die Ebene e, welche durch die drei andern Kegelscheitel geht, so sei die Projection von R_4 wie oben der (doppelt zu denkende) Kegelschnitt K_2', der Durchschnitt von f_2 mit e sei L_2', so dass L_2' der Berührungskegelschnitt des Tangentenkegels von π an f_2 ist, und es gehen wieder sowohl K_2' als L_2' durch die Schnittpunkte von R_4 mit e. Insbesondere können K_2' und L_2' so liegen, dass ein veränderliches n Eck $\alpha'\beta'\gamma'\ldots$ zugleich dem Kegelschnitt K_2' umschrieben und dem Kegelschnitt L_2' eingeschrieben ist (also gerade umgekehrt wie oben). Legt man alsdann durch π und jede der Seiten dieses n Ecks Ebenen, so erhält man eine veränderliche körperliche Ecke mit dem Scheitel π, deren Seitenebenen die R_4 doppelt berühren, und deren Kanten durch L_2' gehen, also Tangenten an f_2 sind. Da nun die Tangente einer Fläche auch jeden ebenen Schnitt berührt, dessen Ebene durch sie hindurchgeht, und da ebenso jeder ebene Schnitt einer Fläche, dessen Ebene eine beliebige auf der Fläche befindliche Curve berührt, selbst diese Curve in demselben Punkte berührt, so schneiden die

Ebenen $\pi\alpha'\beta'$ etc. die Fläche f_2 in Kegelschnitten, deren jeder die R_4 zweimal berührt, und von denen je zwei benachbarte sich gegenseitig berühren, und zwar gehen sowohl die Verbindungslinien der beiden Berührungspunkte jedes dieser Kegelschnitte mit R_4, als auch die gemeinschaftlichen Tangenten je zweier einander berührender Kegelschnitte durch π.

Wir sind somit auf folgenden Satz geführt:

Wenn sich auf einer Fläche zweiten Grades eine Raumcurve R_4 befindet, von der Art, dass in einer der vier Schaaren von ebenen Schnitten der Fläche, welche die R_4 doppeit berühren, eine geschlossene Reihe von n Schnitten besteht, deren jeder die beiden Nachbarschnitte berührt, so bleibt die Reihe geschlossen, wie man auch den ersten Schnitt der Schaar wählt. Die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte jedes Kegelschnitts mit R_4, sowie die gemeinsame Tangente zweier einander berührender Schnitte einer Schaar, schneiden sich in dem Punkte π, durch welchen die Ebenen der betrachteten Schaar von Schnitten hindurchgehen.

Im besondern kann die R_4 sich auch in zwei Kegelschnitte auflösen, für die dann derselbe Satz gilt, nur dass von den vier Scheiteln π der durch R_4 gehenden Kegel zwei unbestimmt werden, dass also nur zwei Schaaren eigentlicher Kegelschnitte auf f_2 existiren, welche jene beiden Kegelschnitte berühren.

Projicirt man nun die in diesem Satze auftretenden Gebilde von irgend einem Punkte ϱ aus wieder auf eine beliebige Ebene, so erhält man mit Rücksicht auf die in der Einleitung besprochenen Eigenschaften folgende Sätze:

1. Wenn man den Pol ϱ beliebig wählt.

Eine ebene Curve vierten Grades C_4' mit zwei Doppelpunkten, welche auch durch zwei Kegelschnitte ersetzt werden kann, wird von einem Kegelschnitte viermal berührt. Es giebt vier Schaaren von Kegelschnitten, die sowohl C_4' als jenen Kegelschnitt doppelt berühren, und zwar geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte eines der Kegelschnitte einer Schaar mit C_4' stets durch einen festen Punkt π'. Irgend zwei Kegelschnitte einer solchen Schaar, welche sich gegenseitig berühren, haben als gemeinsame Tangente eine Gerade, die ebenfalls durch π' geht, und der Ort des Berührungspunktes ist ein Kegelschnitt. Wenn eine geschlossene Reihe von

n **Kegelschnitten in einer solchen Schaar existirt, von denen jeder die beiden Nachbarkegelschnitte berührt, so bleibt die Reihe geschlossen, wie man auch den ersten Kegelschnitt aus der Schaar wählen mag.**

2. Wenn man ϱ auf f_2 wählt.

Eine ebene Curve vierten Grades mit zwei Doppelpunkten, welche auch aus 2 Kegelschnitten bestehen kann, wird von vier Schaaren von Kegelschnitten, welche durch die zwei Doppelpunkte gehen, doppelt berührt. Die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte geht für alle Kegelschnitte einer Schaar durch einen festen Punkt π'. Irgend zwei Kegelschnitte einer Schaar, die sich gegenseitig berühren, haben als gemeinsame Tangente eine Gerade, die ebenfalls durch π' geht, und der Berührungspunkt liegt auf einem festen Kegelschnitte, der auch durch die Doppelpunkte von R_4 hindurchgeht. Wenn eine geschlossene Reihe von n solchen Kegelschnitten existirt, von denen jeder die beiden Nachbarkegelschnitte berührt, so bleibt die Reihe geschlossen, wie man auch den ersten Kegelschnitt aus der Schaar wählen mag.

Da alle Kreise einer Ebene charakterisirt sind als Kegelschnitte, welche durch die imaginären Kreispunkte der Ebene gehen, so enthält dieser Satz als speciellen Fall den Satz von Steiner über die zwei Kreise berührenden Kreisreihen in sich.

3. Wählt man endlich noch specieller als Projectionspol ϱ einen Punkt auf R_4, so wird die Projection von R_4 eine Curve dritten Grades C_3' und eine unbestimmte Gerade, deren zwei Schnittpunkte mit C_3' die Doppelpunkte vertreten, und wenn man nun die Gerade, auf welche es weiter nicht ankommt, ausser Betracht lässt, so erhält man einen Satz für beliebige Curven dritten Grades, der sich folgendermassen aussprechen lässt.

Durch zwei beliebige Punkte $\alpha'\beta'$ einer ebenen Curve dritten Grades C_3' gehen vier Schaaren von Kegelschnitten, welche dieselbe doppelt berühren. Die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte jedes Kegelschnittes einer Schaar geht durch einen festen Punkt π', der auf C_3' liegt, die gemeinschaftliche Tangente zweier sich berührender Kegelschnitte dieser Schaar geht durch denselben Punkt π'; der Ort der Berührungspunkte ist ein Kegelschnitt, der auch durch die zwei Punkte $\alpha'\beta'$

geht. Wenn eine geschlossene Reihe von n Kegelschnitten in einer dieser Schaaren existirt, deren jeder die beiden Nachbarkegelschnitte berührt, so bleibt sie geschlossen, wie man auch den ersten Kegelschnitt aus der Schaar wählen mag.

Schlussbemerkung. Da es in dieser Arbeit wesentlich auf den Zusammenhang der verschiedenen besprochenen Theoreme ankam, so konnte auf die directeste Art, zu jedem einzeln zu gelangen, nicht eingegangen werden. Ich bemerke aber über den Steinerschen Kreisreihensatz, dass sich derselbe mit Hülfe der stereographischen Projection sehr leicht elementar beweisen lässt. Hat man nämlich auf einer Kugel zwei einander gleiche Parallelkreise, so werden die Tangentialebenen des durch beide gelegten Cylinders dieselbe Kugel in Kreisen schneiden, welche jene beiden Parallelkreise berühren. Schneiden sich zwei solche Tangentialebenen in einer Geraden, welche durch den grössten Kreis geht, der jenen Parallelkreisen parallel ist, so berühren sich die in den beiden Ebenen befindlichen Kreise und man erkennt sofort, dass wenn eine geschlossene Reihe solcher Kreise besteht, bei der jeder die beiden Nachbarkreise berührt, sie geschlossen bleibt, wie man auch den ersten Kreis wählt, alle Kreise der Schaar sind nämlich in diesem Falle gleich. Ist der sphärische Durchmesser eines jeden der beiden Parallelkreise α, und der der berührenden Kreise β, so ist $\alpha + \beta = \pi$, und die Reihe schliesst sich, wenn $n\beta = u.2\pi$, also $\beta = \frac{u}{n}\cdot 2\pi$ ist, wo u und n ganze Zahlen sind; dann bedeutet n die Anzahl der Glieder einer geschlossenen Reihe, u die Anzahl der Umläufe. Nun ist aber $\alpha = \pi - \beta = 2\pi\frac{n-2u}{2n} = 2\pi\frac{u_1}{n_1}$, woraus man erkennt, dass wenn man aus der Schaar der Kreise, denen die geschlossenen Reihen angehören, zwei Parallelkreise wählt, es auch in der einen Schaar der Kreise, welche diese beiden Parallelkreise berühren, geschlossene Reihen giebt, die n_1 Glieder enthalten und sich nach u_1 Umläufen schliessen und zwar ist $\frac{u_1}{n_1} + \frac{u}{n} = \frac{1}{2}$.

Projicirt man nun die Figur von irgend einem Kugelpunkte ϱ stereographisch, d. h. auf eine Ebene parallel der Tangentialebene in ϱ, so werden alle Kugelkreise in Kreise projicirt, und man erhält den Steiner'schen Satz, zu dessen vollständigem Beweise noch der leicht zu führende Nachweis gehört, dass irgend zwei (einander nicht schneidende) Kreise der Ebene stereographisch in zwei parallele und gleiche Kugelkreise projicirt werden können. Aus der oben gemachten Bemerkung kann man dann folgern, dass, wenn in einer Schaar von Kreisen, die irgend zwei Kreise berühren, geschlossene Reihen

existiren, auch der grösste und kleinste Kreis dieser Schaar von einer Schaar von Kreisen berührt wird, in welcher geschlossene Reihen existiren, und es besteht die Relation $\frac{u}{n}+\frac{u_1}{n_1}=\frac{1}{2}$ in derselben Bedeutung wie oben. Es bedarf dann nur noch weniger Betrachtungen, um zu dem Steinerschen Satze über Kugelreihen zu gelangen, der folgendermassen ausgesprochen werden kann:

Irgend drei Kugeln werden von vier Schaaren von Kugeln berührt, und alle Kugeln einer dieser Schaaren werden von einer zweiten Schaar von Kugeln berührt, zu der jene drei Kugeln gehören. (Die gemeinschaftliche Enveloppe beider Schaaren ist eine merkwürdige Fläche vierten Grades, die zu den Darbouxschen Cycliden gehört.) Wenn in einer von zwei derartig conjugirten Kugelschaaren geschlossene Reihen von n Gliedern mit u Umläufen existiren, deren jedes Glied die beiden Nachbarglieder berührt, so existiren ebenso in der andern Schaar geschlossene Reihen von n_1 Gliedern und u_1 Umläufen, und es ist wieder:

$$\frac{u}{n}+\frac{u_1}{n_1}=\frac{1}{2}.$$

Berlin im August 1875.

An die vorstehende Abhandlung schliesst sich der in N. XVIII. des vorigen Teiles bereits mitgeteilte

„Lehrsatz, eine gewisse Raumcurve sechsten Grades betreffend."

Bei der Anordnung ist es übersehen worden, dass er zu derselben in Beziehung steht.

D. Red.

II.

Construction der Durchschnittspunkte von Geraden mit Kegelschnittslinien.

Von

Gustav Ad. V. Peschka.

Viele geometrische Constructionen führen in ihrem Verlaufe zu dem Problem: „Die Schnittpunkte von Geraden mit Kegelschnittslinien oder von diesen untereinander" zu bestimmen, wobei im Allgegemeinen die grösstmöglichste Genauigkeit gefordert wird *).

Dieser Anforderung wird jedoch nicht immer durch die wirkliche Verzeichnung des Kegelschnittes selbst Genüge geleistet werden, wenn man mitunter auch ohne besonderen Zeitaufwand eine hinreichende Zahl von Punkten, welche dem Kegelschnitte angehören, auffinden, und durch eine continuirliche Curve verbinden könnte.

---

*) Ueber die Lösung vorbezeichneten Problemes finden sich unter Anderen auch gediegene Abhandlungen in den Sitzungsberichten der k. k. Akademie der Wissenschaften in Wien, und zwar von Herrn Rudolf Niemtschik, Band LIX: Ueber die Construction der Durchschnittspunkte von Kreisen und Kegelschnittslinien. [Das Princip der Lösung ist: Durch den Kegelschnitt wird eine Fläche 2. Grades und durch den Kreis eine Kugel derart gelegt, dass beide Flächen sich nach Kreisen schneiden, welche ihrerseits die gegebenen Curven in deren eigenen Schnittpunkten treffen]; ferner von Herrn Rudolf Staudigl, Band LVIII: Ueber die Durchführung verschiedener, die Curven 2. Grades betreffenden Constructionen mit Hilfe von Kegel- und Cylinderflächen; — und von Herrn E. Koutny: Ueber die Construction des Durchschnittes einer Geraden mit den Kegelschnittslinien. [Anwendung der Parallel- und Central-Projection eines Kreises].

Obwohl man die Genauigkeit durch die Anzahl der zu verbindenden Curvenpunkte steigern kann, so wird denn doch andrerseits die Deutlichkeit und Uebersichtlichkeit der Zeichnung durch viele Hilfsconstructionen mitunter in einer Weise geschädigt, dass sich das Unzweckmässige einer solchen Bestimmungsart nicht verkennen lässt.

Es soll nun in folgendem eine Reihe geometrischer Constructionen angeführt werden, welche die directe Bestimmung der gemeinsamen Punkte einer Geraden und eines Kegelschnittes auf einfache Weise ermöglichen.

1. Es sind die Durchschnittspunkte d_1 und d_2 einer Geraden l mit einer durch ihre Axen AA' und BB' gegebenen Ellipse zu bestimmen.

a) Die Lösung des gestellten Problems kann entweder auf rein analytischem oder auch auf synthetischem Wege erfolgen, und müssten beide Lösungsweisen selbstverständlich zu gleichem Resultate führen.

Wält man (Fig. 1.) die grosse Axe AA' der Ellipse als Abscissenaxe und die kleine Axe BB' derselben, als Ordinatenaxe, so ist bekanntlich die Mittelpunks-Gleichung der Ellipse:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{I)}$$

wobei $a = OA$ und $b = OB$ ist.

Beschreibt man ferner über der grossen Axe als Durchmesser, einen Kreis K, so ist dessen Gleichung:

$$Y^2 + x^2 = a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{II)}$$

Obige Gleichungen können auch in folgender Form gebracht werden:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{I)}$$

$$Y^2 = a^2 - x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{II)}$$

Durch Division beider erhält man: $\frac{Y^2}{y^2} = \frac{a^2}{b^2}$ oder:

$$\frac{Y}{y} = \frac{a}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{III)}$$

d. h. „die zu den nämlichen Abscissen gehörigen Ordinaten Y und y

des Kreises K und der Ellipse E stehen im Verhältnisse der Halbaxen der Letzteren" *)

---

*) Die Gleichung der Geraden l, welche durch die zwei Punkte $d_1 \left\{ \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \right.$ und $d_2 \left\{ \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix} \right.$ geht, ist:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \ldots\ldots\ldots \text{IV)}$$

Für den Schnittpunkt S der Geraden l mit der Abscissenaxe AA' ist $y = 0$, also

$$x = OS = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1} \quad \ldots\ldots\ldots \text{IV}_1)$$

Denkt man sich die Punkte D_1 und D_2 des Kreises K, welche mit den Punkten d_1 und d_2 der Ellipse die nämlichen Abscissen x_1 und x_2, aber verschiedenen Ordinaten Y_1 und Y_2 haben, mit einander verbunden, so ist die Gleichung der so erhaltenen Secante MS:

$$y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \ldots\ldots\ldots \text{IV}_2)$$

Da aber nach Gleichung III): $\frac{Y_2}{y_2} = \frac{Y_1}{y_1} = \frac{a}{b}$, so ist

$$Y_2 = \frac{a}{b} y_2, \text{ und } Y_1 = \frac{a}{b} y_1$$

Diese Werte in IV_2) eingesetzt, geben:

$$y - \frac{a}{b} y_1 = \frac{a}{b} \frac{(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \ldots\ldots\ldots \text{V)}$$

Setzt man $y = 0$, so erhält man die Abscisse $OS = x$ desjenigen Punktes, in welchem MS die Abscissenaxe schneidet. Es ist nämlich:

$$-\frac{a}{b} y_1 = \frac{a}{b} \frac{(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \text{ oder}$$

$$x = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1} = OS,$$

das heist: die Geraden l und MS schneiden sich in dem nämlichen Punkte S der Abscissenaxe.

Um nun die Gerade MS vollkommen zu bestimmen, muss noch einer ihrer Punkte, etwa M bestimmt werden.

Die Grösse von Om bestimmt sich aus IV), wenn man $x = 0$ setzt; es ist sodann:

$$y = Om = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} \quad \ldots\ldots\ldots \text{VI)}$$

OM kann aus IV_2) oder aus V) bestimmt werden, wenn man $x = 0$ setzt; hiernach ist:

$$y = OM = \frac{a}{b}\left(\frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \text{VII)}$$

Aus VI) und VII) folgt, dass:

$$OM = \frac{a}{b} \cdot Om \text{ oder } \frac{OM}{Om} = \frac{a}{b},$$

wodurch die angeführte Construction des Punktes M gerechtfertigt erscheint.

Macht man $OE = OB$ und verbindet den Schnittpunkt m der Geraden l mit der Ellipsenaxe BB' mit dem Punkte E, zieht man ferner durch A die Gerade AM parallel zu mE, so verhält sich, wegen Aehnlichkeit der Dreiecke mOE und MOA:

$$mO : MO = EO : AO = b : a$$

Verbindet man nun den Schnittpunkt S der Geraden l mit der Axe AA' mit M, so werden die drei Geraden OS, mS und MS alle zu OM parallelen Geraden in dem Verhältnisse $MC : mO = a : b$ teilen.

Fällt man daher von den Schnittpunkten D_1 und D_2 des Kreises K mit der Geraden MS Senkrechte auf AA', so wird:

$$D_1O_1 : d_1O_1 = D_2O_2 : d_2O_2 = MO : mO = a : b$$

Da nun die Punkte d_1 und d_2 der Gleichung III) genügen, so gehören sie offenbar der Ellipse an, und sind somit Schnittpunkte der Geraden l mit derselben.

b) Geht die Gerade l (Fig. 2.) durch den Mittelpunkt der Ellipse, so braucht man bloss durch deren Schnittpunkt m mit dem über der grossen Axe beschriebenen Kreise K eine Parallele zu AA', und durch ihren Schnittpunkt n mit dem über der kleinen Axe verzeichneten Kreise K eine Senkrechte zu AA' zu ziehen, um in dem Schnittpunkte dieser beiden Geraden einen Punkt N der entsprechenden Kreissecante ON, resp. D_1D_2 zu erhalten.

In Folge der Aehnlichkeit der Dreiecke Nnm und onO verhält sich:

$$No : no = mO : nO = a : b.$$

Verbindet man nun O mit N, und fällt von den Durchschnittspunkten D_1 und D_2 der Geraden ON mit K eine Senkrechte auf AA', so ist:

$$D_1O_1 : d_1O_1 = D_2O_2 : d_2O_2 = No : no = a : b,$$

d. h. die Punkte d_1 und d_2 der Geraden l gehören dieser als auch gleichzeitig der Ellipse an, sind somit die Schnittpunkte der ersteren mit der Ellipse *).

---

*) ad b) Geht l (Fig. 2.) durch den Mittelpunkt der Ellipse, so ist bekanntlich die Gleichung der letzteren:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{I)}$$

Die Gleichung der Geraden l hingegen:

$$y = x.\operatorname{tg}\alpha.$$

2. **Es sind die Schnittpunkte d_1 und d_2 der Geraden l (Fig. 3.) mit einer durch ein Paar conjugirter Durchmesser ($\overline{ab}$ und $\overline{cd}$) gegebenen Ellipse zu construiren.**

Mit Zuhilfenahme der schiefen Parallelprojection.

Die Ellipse $abcd$ kann als die schiefe Parallelprojection eines Kreises K betrachtet werden, dessen Ebene auf der Bildebene (Ebene der Ellipse) senkrecht steht, und letztere nach $\overline{ab}$ schneidet. Es ist demnach ab, resp. E_b die Bildflächtrace der Kreisebene. Der in E_b gelegene Ellipsendurchmesser $\overline{ab}$ erscheint in wahrer Länge, ist sonach auch ein Durchmesser des Kreises K, welcher um E_b in die Bildebene umgelegt, als K_0 sich darstellt.

Da nun bekanntlich Kreisdurchmesser, welche auf einander senkrecht stehen, in schiefer Projection als conjugirte Durchmesser des Kreisbildes erscheinen, so wird cd als die schiefe Projection von c_0d_0, des zu ab senkrechten Durchmessers anzusehen sein.

Gleichzeitig ist auch ersichtlich, dass die Ellipsentangente dp im

---

Daraus folgt:

$$a^2x^2.\mathrm{tg}^2\alpha + b^2x^2 = a^2b^2, \quad \text{oder}$$

$$x^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\mathrm{tg}^2\alpha + b^2} = \frac{a^2b^2\cos^2\alpha}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}.$$

Ebenso ist:

$$a^2y^2 + \frac{b^2y^2}{\mathrm{tg}^2\alpha} = a^2b^2 \quad \text{oder}$$

$$y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + \frac{b^2}{\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{a^2b^2\sin^2\alpha}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}.$$

Daraus folgt:

$$d_1O = d_2O = \sqrt{x^2+y^2} = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}} \quad \ldots \text{VIII)}$$

Gemäss der durchgeführten Construction ist:

$$mp = No = a\sin\alpha \quad \text{und} \quad Oo = b.\cos\alpha, \quad \text{also}$$

$$NO = \sqrt{No^2 + Oo^2} = \sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}.$$

Aus VIII) folgt:

$$d_1O : a = b : \sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha};$$

und weil $DO = a$ und $On = b$, ist:

$$Od_1 : OD_1 = On : ON,$$

woraus erhellt, dass d_1 der gesuchte Schnittpunkt sei.

Punkte d, die schiefe Projection jener Kreistangente ist, welche nach der Umlegung in die Bildebene durch $d_0 p_0$ repräsentirt erscheint, und dass die gegebene Gerade l als die schiefe Projection einer in der Kreisebene liegenden Geraden zu betrachten sei.

Um die Letztere gleichfalls in der in die Bildebene gebrachten Lage darzustellen, hat man bloss zu beachten, dass der in der Bildflächtrace E_b gelegene Punkt δ der Geraden l sich selbst entspricht, und dass der Punkt p, als der Schnittpunkt der Geraden l mit dp die schiefe Projection eines Punktes p_0 sei, welcher sich nach der Umlegung in der Geraden $d_0 p_0$ vorfinden muss.

Die Verbindungslinie der schiefen Projection d irgend eines Punktes der Ebene E mit dem um deren Bildflächtrace E_b umgelegten Punkte d_0 wird bekanntlich der „Teilstral" genannt, und entspricht demselben für alle Punkte der nämlichen Ebene E die gleiche Richtung, oder mit anderen Worten, die Teilstralen aller Punkte einer Ebene sind untereinander parallel.

Bezeichnen wir daher mit p_0 den um E_b in die Bildebene gedrehten Punkt p, so muss pp_0 parallel zu dd_0 sein.

Die Gerade δp_0, resp. l_0 repräsentirt somit die um die Bildflächtrace E_b umgelegte Gerade, deren schiefe Projection l ist:

Die schiefen Projectionen d_1 und d_2 der Punkte d_1^0 und d_2^0, welche l_0 mit dem Kreise K_0 gemein hat, werden offenbar die Schnittpunkte der Geraden l mit der Ellipse $abcd$ darstellen, und sind dieselben nach dem Vorigen einfach zu bestimmen, wenn man $d_1^0 d_1$ parallel zu $d_2^0 d_2$ parallel zu $d_0 d$ zieht.

Das Verfahren bleibt dasselbe, wenn anstatt conjugirter Durchmesser die Axen der Ellipse $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$ (Fig. 4.) gegeben sind.

Es ist diessfalls $\overline{c_0 d_0}$ der in die Bildebene umgelegte Kreisdurchmesser, dessen schiefe Projection die Ellipsenaxe cd repräsentirt. Hiernach wird der Teilstral dd_0 senkrecht zur Bildflächtrace E_b der Kreisebene sein.

Nebenbei sei bemerkt, dass das hier rein constructiv erlangte Resultat vollkommen mit dem vorher auf analytischem Wege gefundenen übereinstimmt.

Denn, da $\overline{dp}$ parallel zu $d_0 p_0$ und parallel zu ab, und ebenso $\overline{dd_0 O}$ parallel zu $\overline{pp_0 r}$ ist, wird offenbar $pr = dO$ gleich der kleinen Halbaxe b, und $p_0 r = d_0 O$, gleich der grossen Halbaxe a sein. Hier-

aus folgt die für die Schnittpunkte d_1 und d_2 notwendige Bedingung, dass

$$d_1 O_1 : d_1^0 O_1 = d_2 O_2 : d_2^0 O_2 = pr : p_0 r = b : a.$$

Eine elegante Auflösung dieses Problemes gibt der berühmte Gelehrte Jac. Steiner *) auf rein synthetischem Wege für die Ellipse sowol, als auch für die Hyperbel und Parabel.

α) Sind F_1 und F_2 (Fig. 5a.) die Brennpunkte einer Ellipse, so ist bekanntlich jeder Punkt M derselben charakterisirt durch die Eigenschaft, dass $F_1 M + F_2 M = 2a$, d. i. gleich der grossen Axe AB der Ellipse sei. Beschreibt man nun mit AB als Radius, aus einem der Brennpunkte z. B. F_1 als Mittelpunkt einen Kreis K, so muss offenbar $MN = MF_2$ sein, wenn M ein Punkt der Ellipse sein soll. Der geometrische Ort eines Punktes M, der von einem fixen Punkte F_2 und einem fixen Kreise K stets denselben Abstand hat, ist sonach eine Ellipse, vorausgesetzt, dass der Punkt F_2 innerhalb des Kreises K liegt. Dabei ist F_2 der eine Brennpunkt der Ellipse, der Mittelpunkt F_1 des Kreises K der andere, und der Radius des Kreises die grosse Axe der bezeichneten Curve.

β) Ganz auf dieselbe Weise lässt sich eine gleiche Entstehungsart für die Hyperbel ableiten.

Sei $\overline{AB} = 2a$ (Fig. 5b.) die reelle Axe der Hyperbel, F_1 und F_2 die Brennpunkte derselben, so gilt bekanntlich für einen beliebigen Punkt M der Hyperbel, die Relation: $F_1 M - F_2 M = AB = 2a$.

Beschreibt man daher aus einem der Brennpunkte F_1 mit dem Radius $AB = 2a$ einen Kreis K, so ist, weil

$$F_1 M = F_1 N + NM = AB + NM \quad \text{und}$$
$$\text{andererseits} \quad F_1 M = AB + F_2 M, \quad \text{auch} \quad F_2 M = NM,$$

d. h. jedem einzelnen Punkte der Hyperbel entspricht die Eigentümlichkeit, einen gleichen Abstand von einem fixen Punkte F_2 und von einem festen Kreise K zu besitzen.

Der fixe Punkt F_2 ist auch diessfalls der eine Brennpunkt der Hyperbel, der M,ttelpunkt des festen Kreises K fällt mit dem zweiten Brennpunkt F_1 zusammen, und der Radius dieses Kreises K ist der reellen Hyperbelaxe $AB = 2a$ gleich.

γ) Für die Parabel wird der feste Kreis K in eine fixe Gerade L (Fig. 5c.) übergehen, wodurch unmittelbar der bekannten

*) Steiner, Synthetische Geometrie.

Eigenschaft der Parabel, dass jeder ihrer Punkte M von einem fixen Punkte (dem Brennpunkte F derselben) und von einer festen Geraden, der Leitlinie L, gleich weit abstehen, entsprochen wird.

Behufs Ausführung der folgenden Constructionen wird es noch nötig sein, die nachstehende Aufgabe zu lösen:

„Durch zwei Punkte F_2 und F_3 sind an einen gegebenen Kreis K berührende Kreise zu führen (Fig. 6.)".

Da der zu suchende Kreis K_1 resp. K_2 durch F_2 und F_3 gehen muss, wird dessen Mittelpunkt in eine Gerade l fallen, welche durch den Halbirungspunkt n der Strecke F_2F_3 geht, und auf derselben senkrecht steht.

Legt man nun durch F_2 und F_3 einen beliebigen Kreis K_0, der den gegebenen Kreis K in D und E schneidet, und bestimmt man den Schnittpunkt P der Verbindungsgeraden DE mit F_2F_3, so gilt in Bezug auf das Vorliegende der bekannte Satz:

$$PD.PE = PF_2.PF_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{IX)}$$

Zieht man weiters an den gegebenen Kreis K die Tangenten PB_1 und PB_2, so ist offenbar:

$$\overline{PB_1}^2 = \overline{PB_2}^2 = PD.PE = PF_2.PF_3 \quad \ldots\ldots \quad \text{X)}$$

Aus der letzteren Relation folgt, dass PB_1 und PB_2 auch als die Tangenten eines Kreises angesehen werden können, welcher durch F_2 und F_3 geht. Die Berührung dieses Kreises K_1 resp. K_2 mit den Tangenten PB_1 resp. PB_2 muss sonach gleichfalls in B_1 resp. B_2 stattfinden, woraus unmittelbar folgt, dass die Kreise, welche PB_1 und PB_2 in B_1 resp. B_2 berühren und durch F_2 und F_3 gehen, gleichzeitig eine Berührung mit dem gegebenen Kreise K eingehen müssen. Die Mittelpunkte d_1 und d_2 der zu suchenden Kreise K_1 und K_2 liegen sonach einerseits auf l und andrerseits in den Verbindungsgeraden F_1B_1 und F_2B_2, welche letztere selbstverständlich zu den gemeinschaftlichen Tangenten PB_1 und PB_2 senkrecht stehen.

3. Es ist eine Gerade l (Fig. 7.) und eine Ellipse durch ihre Axen, oder, was gleichbedeutend ist, durch die Brennpunkte und die Länge der grossen Axe gegeben, man soll die Schnittpunkte der ersteren mit der letzteren direct bestimmen.

Beschreibt man aus dem Brennpunkte F_1 als Mittelpunkt, mit einem der grossen Axe $AB = 2a$ gleichen Radius einen Kreis K, so

haben, wie bereits gezeigt wurde, alle Punkte der gegebenen Ellipse die Eigenschaft, von diesem Kreise und einem festen Punkte F_2 (dem zweiten Brennpunkt) gleich weit abzustehen. Man kann hiernach die einzelnen Punkte der Ellipse als Mittelpunkte von Kreisen ansehen, welche den Kreis K berühren und durch den Punkt F_2 gehen.

Unter diesen Kreisen werden nun jene aufzufinden sein, deren Mittelpunkte gleichzeitig auf der Geraden l liegen. Besagte Kreise werden nun aber überdiess noch durch einen zweiten Punkt F_3 gehen müssen, welcher mit F_2 verbunden, einer zur Geraden l Senkrechten entspricht, und von l den gleichen Abstand, wie F_2 besitzt.

Hiermit ist die vorliegende Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt.

Legt man nämlich durch F_2 und F_3 einen beliebigen Kreis K_0, so wird derselbe den Kreis K in den Punkten D und E schneiden, während F_2F_3 und DE sich in P treffen werden. Zieht man von P die Tangenten an K und verbindet F_1 mit deren Berührungspunkten B_1 und B_2, so erhält man in d_1 und d_2 die gesuchten Kreismittelpunkte. Nachdem nun $d_1F_2 = d_1B_1$ und $d_2F_2 = d_2B_2$ ist, werden die Punkte d_1 und d_2 als Punkte der Ellipse und der Geraden l gleichzeitig die Schnittpunkte der letzteren mit der Ellipse repräsentiren.

Soll die Aufgabe möglich sein, d. h. soll die Gerade l die Ellipse wirklich schneiden, so müssen, wie aus den angestellten Betrachtungen folgt, die durch die Punkte F_2 und F_3 geführten Kreise K_1 und K_2, welche den Kreis K zu berühren haben, wirklich vorhanden sein. Dieser Fall tritt offenbar nur dann ein, wenn F_3 innerhalb der Kreislinie K liegt. Hierin wird also das Kennzeichen für das wirkliche Vorhandensein der Schnittpunkte einer Geraden mit einer Ellipse liegen.

4. Eine Hyperbel ist durch ihre Axen, resp. durch die Brennpunkte F_1 und F_2 (Fig. 8.) und die Länge der reellen Axe gegeben; man soll die Schnittpunkte d_1 und d_2 einer gegebenen Geraden l mit der Hyperbel direct construiren.

Beschreibt man aus dem einen Brennpunkte F_1 mit einen, der reellen Axe gleichen Radius einen Kreis K, so haben alle Punkte der Hyperbel die Eigenschaft, von diesem Kreise K und dem zweiten Brennpunkte F_2 der Hyperbel gleich weit abzustehen. Alle Punkte der Hyperbel sind demnach Mittelpunkte von Kreisen, welche durch F_2 gehen und den festen Kreis K berühren.

Unter allen diesen Punkten werden auch hier jene Mittelpunkte α_1 und α_2 festzustellen sein, welche einerseits in der Geraden l liegen, andrerseits aber Kreisen entsprechen, welche ausserdem, dass sie durch F_2 gehen, noch durch einen zweiten Punkt F_3, welcher in Bezug auf die Gerade l symmetrisch zu F_2 liegt, geführt sind. Die oben ausgesprochene Aufgabe reducirt sich demgemäss auf die:

„Durch zwei Punkte F_2 und F_3 ist ein Kreis K_1 resp. K_2 zu legen, welcher den Kreis K berührt.“

Legt man wieder, wie in den beiden vorher besprochenen Aufgaben durch F_2 und F_3 einen beliebigen Kreis K_0, welcher K in D und E schneidet, und zieht man vom Durchschnitte P der Geraden DE und F_2F_3 Tangenten PB_1 und PB_2 an den festen Kreis K, so erhält man die gewünschten Kreismittelpunkte d_1 und d_2 als Schnittpunkte der Geraden l mit den Verbindungslinien B_1F_1 und B_2F_1 der Berührungspunkte B_1 und B_2 mit dem Centrum des Kreises K.

Da aber $d_1F_2 = d_1B_1$ und $d_2F_2 = d_2B_2$ ist, so sind d_1 und d_2 die gesuchten Hyperbelpunkte, welche zugleich der Geraden l angehören, also die Schnittpunkte der ersteren mit der letzten sind.

Diese Schnittpunkte d_1 und d_2 sind offenbar nur dann reell, wenn sich die zugehörigen berührenden Kreise wirklich construiren lassen, nämlich dann, wenn der Punkt F_3 ausserhalb des Kreises K fällt.

Fällt der Punkt F_3 zufällig in die Peripherie des Kreises K, so ist constructiv bloss ein Kreis möglich, nämlich jener, der durch F_2 geht und den Kreis K in F_3 berührt.

Es hat demnach auch die Gerade l mit der Hyperbel bloss einen Punkt d_1 gemein, d. h. die Gerade l geht diessfalls in eine Tangente an die Hyperbel im Punkte d_1 über.

Das hier Erwähnte gilt selbstverständlich auch in Bezug auf die Ellipse.

5. Es ist eine Parabel durch die Directionslinie D und den Brennpunkt F_1 (Fig. 9.), sowie eine Gerade l gegeben; man soll die Schnittpunkte der Geraden mit der Parabel direct construiren.

Jeder einzelne Punkt der Parabel hat bekanntlich von dem Brennpunkte F_1 und der Leitlinie (Brennpunktspolare) D einen gleichen Abstand, d. h. die Parabelpunkte repräsentiren die Mittelpunkte von Kreisen, welche durch F_1 gehen und D berühren.

Unter allen diesen Kreisen wird es im Allgemeinen wieder zwei Kreise K_1 und K_2 geben, deren Mittelpunkte in der Geraden l liegen, und welche ausser durch F_1 noch durch einen zweiten Punkt F_2 gehen, welcher zu F_1 in Bezug auf die Gerade l symmetrisch liegen muss, wenn die betreffenden Kreismittelpunkte der Geraden l angehören, und demnach die gesuchten Schnittpunkte liefern sollen.

Es sind hiernach bloss diejenigen Kreise zu suchen, welche durch F_1 und F_2 gehen, und die Gerade D berühren. Für die Berührungspunkte B_1 resp. B_2 der Geraden D mit den Kreisen K_1 und K_2 gilt die Gleichung:

$$\overline{AF_1} \, . \, \overline{AF_2} = \overline{AB_1}^2 = \overline{AB_2}^2$$

Legt man demnach durch F_1 und F_2 einen beliebigen Kreis K_0 und zieht man an denselben die Tangente AB', so ist: $\overline{AB'}^2 = AF_1 \, . \, AF_2$ und daher: $AB_1 = AB_2 = AB'$.

Ueberträgt man also AB' nach beiden Seiten von A auf die Gerade D, so erhält man in B_1 und B_2 die Berührungspunkte der beiden Kreise K_1 und K_2 mit D.

Die zu suchenden Mittelpunkte d_1 und d_2 dieser Kreise werden nun einerseits in der Geraden l und andrerseits in den Geraden B_1d_1 und B_2d_2 liegen, welche durch die Berührungspunkte B_1 und B_2 zur gemeinschaftlichen Tangente D senkrecht geführt wurden.

Da nun $B_1d_1 = d_1F_1$ und $B_2d_2 = d_2F_1$ ist, so sind offenbar d_1 und d_2 Punkte der Parabel, und sonach, als Punkte der Geraden l, die Schnittpunkte der Geraden mit der Curve. Selbstverständlich werden nur dann reelle Schnitte der Geraden l mit der Parabel existiren, wenn F_1 und F_2 auf der nämlichen Seite von D liegen; denn nur in diesem Falle gibt es Kreise, welche, indem sie durch F_1 und F_2 gehen, gleichzeitig die Directrix D berühren.

Fällt zufälligerweise F_2 in die Gerade D, so ist bloss ein Kreis möglich, welcher der Bedingung entspricht, und zwar jener, dessen Berührungspunkt F_2 ist. Die Gerade l hat demnach mit der Parabel nur einen Punkt gemein, geht also in eine ihrer Tangenten über.

B) Construction der Durchschnitte von Kegelschnittslinien mit Geraden, wenn erstere durch irgend welche fünf Elemente gegeben sind.

Denkt man sich einen im Raume befindlichen Kegelschnitt (Fig. 10.) von zwei verschiedenen Centren C_1 und C_2 auf eine und dieselbe

Ebene B projicirt, und die Resultate dieser Projection durch K_1 und K_2 dargestellt, so werden diese Letzteren, wie bekannt, gleichfalls als irgend welche Kegelschnitte bildlich repräsentirt erscheinen.

Betrachtet man die Projectionen m_1 und m_2 irgend eines Punktes m des Kegelschnittes K, und legt man durch die beiden Projectionsstralen $\overline{C_1 m m_1}$ und $\overline{C_2 m m_2}$ eine Ebene P, so wird die Projectionsebene B von derselben in der Geraden $\overline{m_1 m_2}$ geschnitten. Die genannte Ebene P enthält aber auch die Verbindungslinie der beiden Projectionscentra C_1 und C_2, welche Gerade $\overline{C_1 C_2}$ die Projectionsebene B in S schneidet. Aus dem Gesagten geht hervor, dass auch die Gerade $\overline{m_1 m_2}$ durch den Punkt S gehen muss.

Nennen wir der Kürze halber die Punkte m_1 und m_2, welche Projectionen eines und desselben Punktes m der Kegelschnittsebene E oder des Kegelschnittes K selbst sind, „entsprechende Punkte", so lässt sich behaupten, dass sich die sämmtlichen Verbindungsstralen entsprechender Punkte in einem und demselben Punkte S schneiden werden, und zwar in jenem, welcher mit dem Durchschnittspunkte der Verbindungsgeraden beider Projectionscentra mit der Bildebene B zusammenfällt.

Ferner schneidet die Ebene E des im Raume befindlichen Kegelschnittes K die Projectionsebene B nach einer Geraden s.

Projicirt man nun irgend eine Gerade l der letztbenannten Ebene E, indem man C_1 und C_2 als Projectionscentra voraussetzt, gleichfalls auf die Ebene B, so müssen sich beide Projectionen l_1 und l_2 in einem Punkte t der Geraden s schneiden, welcher Punkt gleichzeitig der Schnittpunkt der erwähnten Geraden l mit der Bildebene B ist, und mit jenem der Projectionen l_1 und l_2 zusammenfallen muss.

Nennen wir analog der früheren Bezeichnung, Gerade l_1 und l_2, welche Projectionen einer und derselben Geraden l in der Ebene E des Kegelschnittes K sind, „entsprechende Gerade", so folgt, dass die Schnittpunkte aller entsprechenden Geraden auf einer und derselben Geraden, und zwar in der Trace s ihrer Ebene E auf der Projectionsebene B liegen müssen.

Zieht man demnach in den entsprechenden Punkten m_1 und m_2 der Kegelschnitte K_1 und K_2 Tangenten an letztere, so werden sich dieselben in einem Punkte t der Geraden s begegnen müssen, nachdem dieselben die Projectionen der Tangente an den Kegelschnitt K im Punkte m, also entsprechende Gerade sind.

Aus demselben Grunde müssen sich die Verbindungslinien von zwei Paaren entsprechender Punkte, $\overline{n_1 p_1}$ und $\overline{n_2 p_2}$ in einem Punkte r der Geraden s schneiden. Endlich sei noch bemerkt, dass sich auch die gemeinschaftlichen Tangenten an K_1 und K_2 in dem vorher bezeichneten Punkte S der Ebene B treffen müssen, wie es u. A. auch schon aus der einfachen Betrachtung hervorgeht, dass die Tangenten von S an den einen der Kegelschnitte, z. B. K_1, den anderen K_2 unmöglich schneiden können, indem sonst einem Punkte von K_1 zwei Punkte von K_2 entsprechen würden.

Sind nun in einer Ebene B, welche wir als Bild- oder Zeichnungsebene annehmen, irgend ein Kegelschnitt K_1 und ein Kreis K_2 (Fig. 11.) in beliebiger gegenseitiger Lage gegeben, so kann man diese beiden Kegelschnitte, — indem einstweilen die Lage der Projectionscentren C_1 und C_2 unbestimmt gelassen werden, — als centrale Projectionen eines und desselben Kegelschnittes K im Raume betrachten.

Zieht man an beide Curven K_1 und K_2 die gemeinschaftlichen Tangenten, so gibt ihr gegenseitiger Schnitt S jenen Punkt, in welchem die Verbindungsstralen entsprechender Punkte zusammentreffen. Verbindet man je zwei Kreispunkte m_2 und n_2 durch eine Gerade l_2 und ebenso die den ersteren entsprechenden Punkte m_1 und n_1 des Kegelschnittes K_1 durch eine Gerade l_1, so werden sich diese beiden Geraden in einem Punkte r der Bildflächtrace s jener Ebene E schneiden, in welcher der Kegelschnitt K, dessen centrale Projectionen K_1 und K_2 sind, liegt. Einen zweiten Punkt u erhält man als Schnitt der entsprechenden Geraden $m_1 p_1$ und $m_2 p_2$. Durch die Punkte r und u ist nun die Gerade s, d. i. die Trace der Ebene des gegebenen Kegelschnittes, vollständig bestimmt.

Wäre beispielsweise die eine Curve, etwa der Kegelschnitt K_1 n i c h t w i r k l i c h g e z e i c h n e t, und sollte man jenen ihm angehörigen Punkt a_1 finden, welcher dem Punkte a_2 des Kreises K_2 entspricht, so hat man vor Allem bloss zu bedenken, dass a_1 auf dem Strale Sa_2 liegen muss. Zieht man weiters etwa die Gerade $a_2 m_2$, so wird die entsprechende Gerade $a_1 m_1$ einerseits durch m_1 und andrerseits durch den Punkt t gehen, in welch' Letzterem die Gerade $a_2 m_2$ die Trace s schneidet. Der Schnitt von $m_1 t$ und $a_2 S$ bestimmt demnach den gesuchten Punkt a_1.

Diesen allgemeinen Entwickelungen zufolge wird es nun keinen weiteren Schwierigkeiten unterliegen, folgende Aufgaben zu lösen.

Ein Kegelschnitt (Ellipse Fig. 12.), welcher durch zwei Tangenten und drei seiner Punkte bestimmt ist,

und eine Gerade sind gegeben; man soll die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Kegelschnitte direct construiren.

Die beiden Tangenten seien t_1^1 und t_1^2, die drei gegebenen Punkte seien $a_1 b_1 c_1$, und der hiedurch bestimmte Kegelschnitt sei kurz mit K_1 bezeichnet. Die gegebene Gerade sei l_1.

Wird nun den beiden Tangenten t_1^1 und t_1^2 ein Kreis K_2 eingeschrieben, so kann derselbe ebenso wie K_1 als die Projection irgend eines im Raume befindlichen Kegelschnittes K angesehen werden. Die den Punkten $a_1 b_1 c_1$ entsprechenden Punkte $a_2 b_2 c_2$ erhält man als Schnittpunkte der Geraden $a_1 S$, $b_1 S$ und $c_1 S$ mit dem Kreise K_2, wenn S den Schnittpunkt der beiden Tangenten t_1^1 und t_1^2 darstellt.

Als Schnitte der entsprechenden Geraden $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$ ergibt sich α und als jenen von $a_1 c_1$ und $a_2 c_2$ erhält man β, welche Punkte mit einander verbunden, dem Gesagten zufolge die Trace s der Kegelschnittsebene E bestimmen. Suchen wir nun die der gegebenen Geraden l_1 entsprechende Gerade l_2. Der Punkt γ, in welchem l_1 die Trace s schneidet, liegt selbstverständlich auch in l_2; ferner begegnen sich l_1 und $a_1 c_1$ im Punkte f_1, weshalb, wenn man f_1 mit S verbindet, der dem Punkte f_1 entsprechende Punkt in f_2 gefunden wird. Man erhält sonach die Gerade l_2 durch die Verbindungslinie der Punkte γ und f_2. Diese Gerade l_2 schneidet den Kreis K_2 in d_2^1 und d_2^2. Letztbezeichnete Punkte sind nun offenbar jene, welche den Schnittpunkten der Geraden l_1 mit dem durch t_1^1, t_1^2, a_1, b_1 und c_1 gegebenen Kegelschnitte K_1 entsprechen, und welche man unmittelbar in d_1^1 und d_1^2 findet, wenn man die Verbindungsgeraden Sd_2^1 und Sd_2^2 bis zum Schnitte d_1^1 und d_1^2 mit der Geraden l_1 verlängert.

Auf ganz gleiche Weise kann die Aufgabe auch dann gelöst werden, **wenn etwa anstatt der Punkte b_1 und c_1 die Berührungspunkte p_1^1 und p_1^2 der Tangenten t_1^1 und t_1^2 mit dem Kegelschnitte K_1 und ausserdem ein Punkt a_1 der Curve gegeben sind**, indem es offenbar ganz gleichgiltig ist, welche Lage die in Fig. 12. gewählten Punkte $a_1 b_1$ und c_1 gegen einander haben, daher man anstandslos, ohne eine Aenderung in der Lösung des Problemes herbeizuführen, auch jene von a_1, p_1^1 und p_1^2 annehmen kann.

Auch in dem Falle lässt sich die Aufgabe leicht durchführen, resp. auf die vorhergehende reduciren, wenn der **Kegelschnitt durch 5 Punkte $a_1 b_1 c_1 d_1$ und e_1 gegeben ist**, indem sich mit Hilfe des Pascal'schen Satzes, „**dass die 3 Schnittpunkte der Gegenseiten eines dem Kegelschnitte eingeschriebenen Sechseckes auf einer Geraden liegen**“, in allen diesen Punkten die Tangenten des Kegelschnittes leicht construiren lassen.

Betrachtet man nun das Fünfeck $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1$ als durch die Verbindung der 5 gegebenen Punkte entstanden, und sollte im Punkte e_1 (Fig. 13.) die Tangente an den hiedurch bestimmten Kegelschnitt gezogen werden, so kann man dieselbe als Verbindungsgerade der in e_1 unendlich nahe vereinigten Punkte eines Sechseckes, oder als die sechste Seite eines Sechsecks ansehen, dessen übrige Seiten $a_1 b_1$, $b_1 c_1$, $c_1 d_1$, $d_1 e_1$ und $e_1 a_1$ sind.

Es sind mithin $a_1 e_1$ und $c_1 d_1$, ferner $a_1 b_1$ und $d_1 e_1$, endlich $b_1 c_1$ und die Tangente in e_1 Gegenseiten. Die beiden ersten Paare schneiden sich in α und resp. in β, daher $\overline{\alpha\beta}$ eine Gerade bestimmt, auf welcher gleichzeitig auch der Schnittpunkt γ des letztgenannten Paares sich vorfinden muss. Da nun $b_1 c_1$ die Gerade $\alpha\beta$ in γ schneidet, ist γe_1 und t_1^1 die Tangente im Punkte e_1. Ebenso kann man die Tangente t_1^2 im Punkte d_1 finden, wodurch die Aufgabe auf die vorhergegangene zurückgeführt erscheint.

7. **Es ist eine Gerade l (Fig. 14.) und ausserdem eine Hyperbel K_1 durch 3 Tangenten und zwei Punkte gegeben; man soll die Schnittpunkte der Hyperbel K_1 mit der Geraden l_1 direct construiren.**

Seien t_1^1, t_1^2 und t_1^3 die Tangenten und a_1, b_1 die gegebenen Punkte, so kann man dem so bestimmten Kegelschnitte wieder als „entsprechende" zweite Projection einen Kreis K_2 zuweisen, welcher den Tangenten t_1^1 und t_1^2 eingeschrieben ist. Der Schnitt der beiden letzteren erfolge in S. Vermöge der demselben beigelegten Bedeutung, lassen sich nun mit Zuhilfenahme der Geraden $a_1 S$ und $b_1 S$ die den Punkten a_1 und b_1 entsprechenden Punkte a_2 und b_2 im Kreise K_2 auffinden.

Die Verbindungsgerade $a_1 b_1$ und die Tangente t_1^3 schneiden sich in p_1, welchem Punkte auf $a_2 b_2$ der Punkt p_2 entspricht, und zieht man von dem so erhaltenen Punkte p_2 an den Kreis K_2 eine Tangente t_2^3, so wird dieselbe offenbar entsprechend der Tangente t_1^3 sein. Nun schneiden sich die Geraden $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$ in α, während sich die Tangenten t_1^3 und t_2^3 im Punkte β begegnen; es wird daher $\overline{\alpha\beta}$ resp. ε den geometrischen Ort der Schnittpunkte aller Paare entsprechender Geraden (die Trace der Kegelschnittsebene E) repräsentiren.

Um nun die Schnittpunkte d_1^1 und d_1^2 der Geraden l_1 mit K_1 aufzufinden, ermittle man die derselben entsprechende Gerade l_2 einfach dadurch, dass man zwei Punkte der letzteren aufsucht. Der eine Punkt γ ergibt sich als Schnittpunkt von l_1 mit der Trace ε;

der zweite Punkt r_2 hingegen wird sich als derjenige Punkt der Geraden l_2 ergeben, welcher zugleich in $a_2 b_2$ liegt und dem Punkte r_1 (Schnittpunkt von $a_1 b_1$ und l_1) entspricht.

Die Schnittpunkte von $r_2 \gamma$ resp. l_2 mit K_2 sind somit d_2^1 und d_2^2 welch' letzteren in dem Kegelschnitte K_1 die verlangten Schnittpunkte d_1^1 und d_1^2 entsprechen.

Dass die Lösung der gestellten Aufgabe ganz unabhängig von der Lage der Punkte a_1 und b_1 sei, ist selbstverständlich. Dieselben können daher, ohne dass eine Aenderung der Construction hiemit verbunden wäre, auch in die Berührungspunkte von je zwei der gegebenen 3 Tangenten übergehen.

Dies berücksichtigt, lässt sich auch folgende Aufgabe auf die eben besprochene zurückführen:

8. Es soll der Durchschnitt einer Geraden l_1 mit einem durch 5 Tangenten $t_1^1 t_1^2 t_1^3 t_1^4 t_1^5$ gegebenen Kegelschnitte K_1 direct gesucht werden.

Nach dem Brianchon'schen Satze lassen sich sehr einfach die Berührungspunkte dieser Tangenten bestimmen.

Der genannte Satz lautet: „Die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Eckpunkte eines dem Kegelschnitte umschriebenen Sechseckes schneiden sich in einem einzigen Punkte.“ Das Fünfeck $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ (Fig. 15.), welches durch die gegebenen 5 Tangenten gebildet wird, kann nämlich als ein Brianchon'sches Sechseck, in welchem zwei Seiten in eine zusammenfallen, angesehen werden.

Sei a_1^5 der Berührungspunkt von t_1^5 resp. $A_1 B_1$, so ist dieser Punkt als der sechste Eckpunkt des gegebenen Polygons, und $A_1 a_1^5$ sowie $B_1 a_1^5$ als zwei verschiedene Seiten desselben aufzufassen. Es sind sodann E_1 und B_1, A_1 und C_1, D_1 und a_1^5 offenbar als gegenüberliegende Punkte des Sechseckes zu betrachten, welchen Punkten mit einander verbunden der gemeinschaftliche Schnittpunkt M_1 entspricht. Verbindet man daher B_1 mit E_1 und A_1 mit C_1, so erhält man den Berührungspunkt a_1^5 als Schnittpunkt der Geraden $M_1 D_1$ mit $A_1 B_1$ resp. t_1^5. Ein zweiter Berührungspunkt kann auf die gleiche Weise leicht aufgefunden und somit die gestellte Aufgabe, bezüglich der Bestimmung des Durchschnittes in der Form, wie unter Aufgabe 7) besprochen, durchgeführt werden.

9. Eine Gerade l_1 (Fig. 16.) ist gegeben, und eine Hyperbel ist durch zwei conjugirte Durchmesser $A_1 B_1$ und

$C_1 D_1$ **bestimmt; man soll die Durchschnittspunkte beider direct auffinden.**

Bestimmt man auf bekannte Weise aus den gegebenen Durchmessern die Asymptoten t_1^1 und t_1^2 der Hyperbel K_1, so hat man hiedurch gleichzeitig zwei Tangenten derselben, deren Berührungspunkte in unendlicher Entfernung liegen, gefunden. Schreibt man nun den letzteren einen Kreis K_2 ein, so kann derselbe als der Hyperbel K_1 entsprechend angesehen werden.

Den unendlich fernen Berührungspunkten u_1^1 und u_1^2 der Hyperbel K_1 entsprechen die Berührungspunkte u_2^1 und u_2^2 im Kreise K_2. Der Schnittpunkt σ_∞ beider Verbindungsgeraden dieser Berührungspunkte ist ebenfalls im Unendlichen gelegen, weil $\overline{u_1^1 u_1^2}$ parallel zu $\overline{u_2^1 u_2^2}$ ist, und beide Geraden zur Halbirungslinie des Winkels $(t_1^1 t_1^2)$ senkrecht stehen. Es wird demnach auch die zu suchende Trace s (geometrischer Ort der Schnittpunkte aller „entsprechenden" Geraden) zu $u_2^1 u_2^2$ parallel sein.

Dem Punkte A_1 der Hyperbel K_1 entspricht der Kreispunkt A_2, und der Hyperbeltangente t_1^3 die Kreistangente t_2^3. Der Durchschnitt der beiden letzteren erfolgt im Punkte β. Zieht man nun durch β eine Parallele zu $u_2^1 u_2^2$, so erhält man die Gerade s.

Um weiter die der Geraden l_1 entsprechende Gerade l_2 zu finden, wird man bloss zwei Punkte der letzteren zu bestimmen haben, wovon der eine bekanntlich der Schnittpunkt γ der Geraden l_1 mit s, und der zweite jener Punkt p_2 ist, welcher dem Schnittpunkte p_1 von t_1^3 und l_1 entspricht.

Die Gerade $p_2 \gamma$ resp. l_2 trifft den Kreis K_2 in den Punkten d_2^1 und d_2^2, welch' letzteren die verlangten Schnittpunkte d_1^1 und d_1^2 der Hyperbel $A_1 B_1 C_1 D_1$ mit der gegebenen Geraden l_1 entsprechen.

10. **Ein Kegelschnitt ist durch 5 Punkte** a, b, c, d **und** e (Fig. 17.) **bestimmt; ausserdem ist eine Gerade** l **gegeben; man soll die Schnittpunkte** d_1 **und** d_4 **der Geraden** l **mit dem Kegelschnitte bestimmen.**

Verbindet man zwei der gegebenen Punkte, etwa d und e mit jedem der drei anderen, so entstehen zwei Stralenbüschel, deren Mittelpunkte d und e sind. Werden dieselben einander projectivisch zugeordnet, so schneiden sich bekanntlich je zwei entsprechende (homologe) Stralen in einem Punkte des Kegelschnittes.

Die Gerade l wird von dem Büschel d in der Punktreihe $A_1 B_1 C_1$, von dem Büschel e dagegen nach der Punktreihe $A_2 B_2 C_2$ geschnitten.

Da die beiden Büschel d und e in Bezug aufeinander projectivisch sind, so werden es auch die genannten Punktreihen sein.

Nun sind jene Punkte d_1 und d_2 der Geraden l, in welchen je zwei entsprechende Stralen der Büschel d und e zusammentreffen, einerseits Punkte des Kegelschnittes und andrerseits Doppelpunkte der Punktreihen $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$. Um letztgenannte Doppelpunkte d_1 und d_2 zu finden, verbindet man (Staudigl, Neuere Geometrie, Seite 140.) $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$ mit irgend einem Punkte M eines beliebig gewählten Kreises K, und bestimmt die zweiten Schnittpunkte $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ und $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ dieser Verbindungsstralen mit dem Kreise K. Verbindet man weiter den Schnittpunkt σ der Geraden $\alpha_1 \beta_2$ und $\alpha_2 \beta_1$ mit jenem ϱ von $\alpha_1 \gamma_2$ und $\alpha_2 \gamma_1$ durch eine Gerade $\delta_1 \delta_2$ und zieht man $\delta_1 M$ und $\delta_2 M$, so wird l von diesen letztbezeichneten Geraden in den verlangten Punkten d_1 und d_2 des durch $abcde$ gegebenen Kegelschnittes getroffen.

Es ist der Schnitt einer durch ihre Axen gegebenen Ellipse mit einem Kreise zu construiren, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte der Ellipse zusammenfällt.

Verzeichnet man über der grossen und kleinen Axe der Ellipse die Kreise K und k (Fig. 18.) *) und zieht man durch den Mittelpunkt O beliebige Transversalen, von denen jede die beiden Kreise in zwei Punkten α_1 und γ_1, α_2 und γ_2 . . . schneidet; fällt man ferner von $\alpha_1 \alpha_2$ . . . Senkrechte zu AB, und führt durch γ_1, γ_2 . . . Parallele zu AB, so schneiden sich je zwei dieser Geraden in Punkten $P_1 P_2 P_3$ . . . der Ellipse.

Beschreibt man nun über der Differenz der Halbaxen der Ellipse, also über der Geraden AE als Durchmesser einen Halbkreis, so wird von demselben der gegebene Kreis K_1 in einem Punkte p geschnitten.

Das Dreieck ApE ist bei p offenbar rechtwinklig. Dreht man dasselbe um den Mittelpunkt O, so wird es endlich auch eine Lage $\alpha_1 P_1 \gamma_1$ annehmen, in welcher die beiden Katheten desselben parallel zu den Axen der Ellipse laufen, wobei also P_1, P_2 . . . Punkte der Ellipse vorstellen werden.

Nachdem aber der Punkt p bei seiner Drehung um O den Kreis K_1 beschreibt, so werden $P_1 P_2$ . . . auch auf dem Kreise K_1 liegen, hiernach also die Schnittpunkte des Kreises K mit der Ellipse $ABCD$ bestimmen. Soll das Dreieck ApE die genannte Lage einnehmen,

---

*) Staudigl, Sitzungsberichte der k. k. Akademie der Wissenschaften in Wien.

so muss $pE \parallel AB$, oder was dasselbe ist, es muss $\angle \alpha_1 \gamma_1 P_1 = \angle AEp$, folglich auch $\angle \alpha_1 OA = \angle AEp$ werden. Trägt man also den letztbezeichneten Winkel von AO aus auf, so erhält man eine Transversale $\alpha_1 O$, für welche der Ellipsenpunkt P_1 gleichzeitig auf K_1 liegt. Die anderen drei Schnittpunkte $P_2 P_3 P_4$ sind zu P_1 in Bezug auf die Ellipsenaxen symmetrisch gelegen.

Auch auf eine einfache empirische Weise lassen sich die Schnittpunkte einer Ellipse E mit einer beliebigen Curve C (Fig. 19.) auffinden.

Ist beispielsweise die Ellipse E durch ihre Axen AB und CD gegeben, so kann man einzelne ihrer Punkte auf folgende Weise bestimmen:

Trägt man nämlich mittelst eines Papierstreifens die Länge der grossen Halbaxe AO von einem Punkte p aus auf und wiederholt das Gleiche von demselben Punkte p mit der kleinen Halbaxe OC, verschiebt man ferner den Papierstreifen auf der Zeichnungsfläche in der Weise, dass die Halbaxendifferenz $\overline{ab}$ mit ihren Endpunkten stets auf den Axenrichtungen liegt, so beschreibt der Punkt p die Ellipse E. Ist nun C die vorerwähnte beliebige Curve, so hat man den Papierstreifen in jene Lagen zu bringen, in welchen der Punkt a auf CD, der Punkt b auf AB und p auf der Curve C liegt. Die dem Punkte p entsprechenden Curvenpunkte $D_1 D_2 \ldots$ sind die gesuchten Schnittpunkte der beiden Curven untereinander.

Brünn, den 24. December 1874.

Aufgabe. Eine Ellipse ist durch zwei conjugirte Durchmesser gegeben; es sind die Schnittpunkte dieser Ellipse mit einer Geraden L zu finden, welche zu dem einen der beiden Durchmesser ab parallel läuft.

Um vorstehendes Problem zu lösen, dürfte es zweckmässsig erscheinen, folgende Bemerkungen vorauszuschicken.

Sind t_1 und t_2 (Fig. I.) zwei aus C projicirte perspectivische Punktreihen, d ihr Schnittpunkt, v_2 und u_1 ihre Gegenpunkte, so gilt für jedes Paar entsprechender Punkte a_1 und a_2 bekanntlich die Relation:

$$\frac{u_1 a_1}{u_1 d_1} = \frac{d_2 v_2}{a_2 v_2} \text{ oder}$$

$$u_1 a_1 \times a_2 v_2 = d_1 u_1 \times d_2 v_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \alpha)$$

Dieses Product ist constant und wird die projectivische Potenz genannt.

Denkt man sich die Reihe t_2 um ihren Schnittpunkt d mit der Reihe t_1 so lange gedreht, bis sie mit der letzteren zusammenfällt, so erhält man zwei aufeinander liegende projectivische Punktreihen, welche in dem Schnittpunkte $d_1 d_2$ ihrer Träger $t_1 t_2$ einen Doppelpunkt besitzen.

Wird durch C ein Stral so gezogen, dass er mit t_1 und t_2 gleiche Winkel einschliesst, so schneidet derselbe die Träger t_1 und t_2 in zwei entsprechenden Punkten $d_1{}^1 d_2{}^1$, welche nach der Drehung zusammenfallen, also den zweiten Doppelpunkt repräsentiren.

Aus dem gleichschenkligen Dreiecke $C v_2 d_2{}^1$ folgt, dass $C v_2 = d_2{}^1 v_2$ und da auch $C v_2 = d_1 u_1$ wird: $d_2{}^1 v_2 = d_1 u_1$ d. h. der eine Doppelpunkt d_1 ist vom Fluchtpunkte u_1 ebenso weit als der zweite Doppelpunkt $d_2{}^1$ vom anderen Fluchtpunkte v_2 entfernt, oder: die Doppelpunkte liegen zu den Fluchtpunkten symmetrisch.

Die vorher unter α) angeführte Relation auf den Punkt $d_1{}^1 d_2{}^1$ übertragen, lautet sonach: $u_1 d_1{}^1 \times v_2 d_2{}^1 = u_1 a_1 \times v_2 a_2 = u_1 d_1 \times v_2 d_2$.

Nachdem aber die Punkte $d_1{}^1$ und $d_2{}^1$ nach vollbrachter Drehung zusammenfallen, ist: $u_1 d_1{}^1 = u_1 d_2{}^1$ und ebenso $v_2 d_2 = v_2 d_1$; es wird daher auch:

$$u_1 d_1{}^1 \times v_2 d_1{}^1 = u_1 d_1 \times v_2 d_1 = u_1 a_1 \times v_2 a_2 \quad . \; . \; . \; . \; \beta)$$

Sind somit bei zwei aufeinanderliegenden Punktreihen die Fluchtpunkte und ein Paar entsprechender Punkte gegeben, so lassen sich die Doppelpunkte leicht finden.

Dieses der zu lösenden Aufgabe zu Grunde gelegt, wollen wir a und b (Fig. II.) als die Scheitel zweier projectivischer Stralenbüschel annehmen, von welchen sich je zwei entsprechende Stralen in einem Punkte der Ellipse schneiden. Diese Stralenbüschel geben im Schnitte mit der Geraden L zwei aufeinander liegende projectivische Punktreihen, deren Doppelpunkte offenbar die Schnittpunkte der Geraden L mit der Ellipse liefern werden. Es handelt sich sonach blos um die Ermittelung der bezeichneten Doppelpunkte, um die gestellte Aufgabe als gelöst betrachten zu können.

Der Stral $\overline{ab}$ schneidet die Gerade L im Unendlichen, während

der ihm entsprechende Stral des Büschels b als Tangente an die Ellipse im Punkte b erscheint, sich hiernach als eine zum zweiten Durchmesser cd parallele Gerade darstellt. Diese letztere schneidet die Reihe L im Punkte v_2, welcher Schnitt schon den einen Gegen- oder Fluchtpunkt liefert; der zweite Fluchtpunkt u_1 ergibt sich im Schnitte von L mit der durch a zu cd parallel gezogenen Geraden. Führt man vom Punkte c, als einem der Ellipse angehörigen Punkte, die Stralen ca und cb, so erhält man überdies noch zwei entsprechende Punkte γ_1 und γ_2 der beiden coaxialen Punktreihen.

Für die Doppelpunkte $\varDelta_1\varDelta_2$ und $\varDelta_1'\varDelta_2'$ dieser Reihen gilt nun die Relation:

$$\varDelta u_1 \times \varDelta v_2 = \varDelta' u_1 \times \varDelta' v_2 = \gamma_1 u_1 \times \gamma_2 v_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; \gamma)$$

Nachdem aber $\gamma_1 u_1 = \gamma_2 u_2$ ist, wird die projectivische Potenz $\overline{\gamma_1 u_1}^2$ sein. Beschreibt man demnach über $\overline{u_1 v_2}$ als Durchmesser einen Halbkreis, und zieht man im Abstande $\gamma_1 u_1 = u_1 \varphi$ eine Parallele zu L, welche die Kreisperipherie in δ und δ^1 schneidet, so ergeben sich, wenn man die letztgenannten Punkte δ und δ^1 auf L projicirt, in $\varDelta_1\varDelta_2$ und $\varDelta_1'\varDelta_2'$ die gesuchten Doppelpunkte, oder mit anderen Worten: die Schnittpunkte der Geraden L mit der blos durch zwei conjugirte Durchmesser gegebenen Ellipse; denn dieselben genügen der Relation $\varDelta' u_1 \times \varDelta' v_2 = \varDelta u_1 \times \varDelta v_2 = \overline{\varDelta' \delta}^2 = \overline{\varDelta \delta}^2$ und weil $\overline{\varDelta' \delta^1} = \overline{\varDelta \delta} = \overline{\gamma_1 u_1}$ auch der Relation γ).

III.

Beiträge zur Lösung einiger bekannten geometrischen Aufgaben.

Von

Mendthal.

Vorbemerkung. Bekanntlich wird jede durch einen beliebigen Pol P gelegte Secante durch dessen Polare und den Kreisumfang harmonisch geteilt, und man kann in jeder solchen Zusammenstellung den Pol als Projectionsmittelpunkt, die Polare als Projectionsaxe und die zu beiden Seiten der letzteren gelegenen Umfangspunkte je einen z. B. a oder b_1 (Fig. 1.) als harmonisches Bild des anderen, z. B. von a_1 oder b betrachten. Auch kann man ebenso z. B. von einer beliebigen Linie $p_2 c$ ihr harmonisches Bild $p_2 c_1$, von Punkt d_1 das harmonische Bild Punkt d, u. s. w. entwerfen.

Diese Umbildung lässt sich für die anschauliche Behandlung einiger Aufgaben und Lehrsätze zweckmässig verwenden, wofür diese Zeilen einige Beispiele liefern sollen.

1. Aufgabe. Durch gegebene Punkte a, b und c sollen die Seiten eines in den Kreis K eingeschriebenen Dreiecks gelegt werden:

Auflösung. Verbindet man die Punkte $a-b$, F_2 durch eine gerade Linie und wählt den Punkt, dessen Entfernung von seiner Polare $p_1 p_2$ durch $a-b$ halbirt wird, als Projectionsmittelpunkt — d. h. den Punkt P, für welchen $a-b$ die Linie gleicher Potenzen mit Kreis K darstellt — so werden die harmonischen Bilder von a und b auf den entsprechenden Richtungen Pa und Pb sich unendlich weit entfernen, und diejenigen aller Linien, welche a oder b berühren, entsprechend parallel zu Pa oder Pb erscheinen.

Ist nun $\alpha\beta\gamma$ das gesuchte Dreieck, sind ferner $\alpha_1-\beta_1-\gamma_1$ und c_1 die harmonischen Bilder von α, β, γ und c, so wird Winkel $\beta_1\gamma_1\alpha_1 = aPb$, dadurch die Länge der Sehne $\alpha_1\beta_1$ bestimmt und mit ihr der zu K concentrische Kreis, welchen sie berührt, woraus die Lage $c_1\beta_1\alpha_1$ und die Punkte α und β sich herleiten.

Bemerkungen. 1. Diese Construction lässt sich unmittelbar nur auf Punkte anwenden, deren Verbindungslinien den Kreis nicht schneiden.

Wenn nun auch weiter unten nachgewiesen wird, dass jede Punktenlage auf die hier vorausgesetzte sich zurückführen lässt, so wird zunächst auch für andere Fälle die harmonische Umbildung benutzt werden, wobei die Betrachtung zweier Fälle genügt, nämlich wenn einer oder mehrere Punkte innerhalb des Kreises liegen, und: wenn zwar die Punkte ausserhalb des Kreises liegen, ihre Verbindungslinien aber denselben schneiden.

2. Es lassen sich aus der gegebenen Auflösung noch einige Folgerungen ableiten. Werden die Punkte α, β und c in ihrer Lage festgehalten, während γ längs der Kreisperipherie und gleichzeitig a und b auf ihrer eignen Verbindungslinie sich fortbewegen, so bleibt der Winkel aOb seiner Grösse nach constant, da in dem harmonischen Bilde α_1 und β_1 sich nicht bewegen und nur γ_1 seine Stelle ändert, jedoch so, dass stets Pa parallel mit $\beta_1\gamma_1$ und Pb parallel mit $\alpha_1\gamma_1$ bleibt. Hiebei ist es gleichgültig, ob die Punkte $\alpha\beta$ wie in der vorliegenden Figur entstanden sind, oder ob sie z. B. Ecken eines beliebigen Kreisvielecks sind. Weiter unten wird hienach die Ausdehnung dieser Aufgabe auf beliebig viele Punkte behandelt werden.

Es folgt weiter, dass, wenn die gegebenen Punkte a und b mit einem dritten Punkte γ der Kreisperipherie verbunden werden, die entsprechende Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte α und β ein harmonisches Bild von constanter Länge ergiebt.

2. Aufgabe. Es sind drei Punkte a, b und c innerhalb des Kreises K gegeben; man soll durch dieselben je eine Seite eines in den Kreis zu schreibenden Dreiecks legen (Fig. 3.).

Auflösung. Verbindet man einen der gegebenen Punkte z. B. a mit dem Kreismittelpunkt k, zieht durch a resp. k senkrecht zu dieser Verbindungslinie mm_1 und nn_1, so erhält man durch den Schnitt der Linien mn oder m_1n_1 mit ka einen Projectionsmittelpunkt P, welcher in Verbindung mit seiner Polare pp_1 als Projectionsaxe für den Punkt a den Kreismittelpunkt k als harmonisches Bild ergiebt.

Das harmonische Bild $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ wird demnach ein bei α_1 rechtwinkeliges sein, dessen Seite $\gamma_1\beta_1$ ein Durchmesser des Kreises k ist.

Die vorliegende Aufgabe wird demnach darauf zurückgeführt, durch zwei gegebene Punkte die Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks zu legen, dessen Hypotenuse der Durchmesser eines gegebenen Kreises ist.

Um die Figur nicht zu überladen, werden in Figur 4. nur die harmonischen Bilder $a_1(k)-b_1$ und c_1 der Punkte abc gezeichnet. Ein Halbkreis über b_1c_1 schneide den gegebenen Kreis in den Punkten α_1 und α_2, deren jeder ein harmonisches Bild $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ und $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ des zu findenden Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ darstellt.

Man ersieht zugleich in welchen Fällen zwei, eine oder keine Lösung möglich ist.

Bemerkung. Diese Auflösung gilt auch dann, wenn nur einer der gegebenen Punkte innerhalb des Kreises k liegt.

3. Aufgabe. Die vorhergehenden Aufgaben für den Fall zu lösen, wenn die Punkte a, b und c ausserhalb des gegebenen Kreises k liegen, ihre Verbindungslinien aber denselben schneiden.

Auflösung. $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 5.) sei das gesuchte Dreieck, in dessen Seiten die Punkte a, b und c liegen sollen. Die Polare von a sei pp_1 und p ihr Schnittpunkt mit bc.

Construirt man nun einen Projectionsmittelpunkt P_1, für welchen ap die Linien gleicher Potenzen mit dem Kreise k ist, so wird das harmonische Bild dieser Figur folgende Eigenschaften besitzen. Die Bilder der in a sich vereinigenden Linien werden parallel der Linie P_1a, ebenso die Bilder der in p sich vereinigenden Linien parallel P_1p.

Da die Linie pp_1 die Berührungspunkte trifft, welche den von a an den Kreis k gezogenen Tangenten angehören, die harmonischen Bilder dieser Tangenten aber einander parallel werden, so trifft das harmonische Bild der Linie pp_1 den Mittelpunkt des Kreises k, die beiden Systeme paralleler Bilder stehen auf einander senkrecht und es wird aus den gegebenen Stücken nach ihrer harmonischen Umbildung in Bezug auf den Projectionsmittelpunkt P_1 sich das Schema Figur 6. darstellen.

Die Punkte b_1 und c_1 sind die harmonischen Bilder der Punkte b und c; das harmonische Bild $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ des zu suchenden Dreiecks ist so zu zeichnen, dass die Seite

$\alpha_1\beta_1$ durch c_1
$\alpha_1\gamma_1$ durch b_1 gehe und
$\beta_1\gamma_1$ senkrecht zu b_1c_1 liege.

Zieht man den Durchmesser $\beta_1\beta_2$, dessen Schnittpunkt mit b_1c_1 in o liege, während q den Schnitt der Linien $\beta_1\gamma_1$ und b_1c_1 bezeichne, so ergiebt sich die Aehnlichkeit der rechtwinkeligen Dreiecke $b_1\gamma_1q$ und $\beta_1\beta_2\alpha_1$ aus der Gleichheit der Winkel γ_1 und β_2; demnach ist $\alpha_1\beta_1b_1o$ ein Kreisviereck, und da die Potenz des Punktes c_1 für den Kreis k bekannt ist, der Punkt o nach mehrfach bekannten Methoden zu bestimmen.

Nach Construction des Punktes o ergiebt also seine Verbindungslinie mit dem Mittelpunkte des Kreises k auf dem Umfange desselben zwei Schnittpunkte β_1 und β_2, aus denen das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ durch harmonische Uebertragung sich leicht entwickeln lässt.

Es erhellt ohne Weiteres, dass diese Lösung auch für die erste Aufgabe sich anwenden lässt.

Folgerungen. Bei Aufgabe 1. wurde nachgewiesen, dass, wenn in der dazu gehörigen Figur der Winkel aPb sich um P dreht und die Punkte a und b längs ihrer Verbindungslinie fort bewegt, die beiden Eckpunkte α und β des für die veränderte Lage zu suchenden Dreiecks unverändert bleiben, wenn Punkt c seine Lage behält.

Wird hiebei nun einer der Schenkel des Winkels Pba, (Fig. 7.) z. B. Pb parallel der Linie ab, und gewinnt die Lage Pb_1, während der Schenkel Pa in die Lage Po gelangt, so würde auch das entsprechende harmonische Bild $\alpha_1\gamma_1$ der Dreieckseite $\alpha\gamma$ parallel zu Pb_1 oder ab werden.

Für diesen Fall aber wird die Dreieckseite $\alpha\gamma$ in die Linie $\alpha\gamma_2$ übergehen, gleichfalls als solche parallel der Linie ab werden und die Aufgabe darauf zurückgeführt sein, ein in den Kreis k eingeschriebenes Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten

$\alpha\beta$ durch Punkt c
$\beta\gamma_2$ durch Punkt o

gehen, während $\alpha\gamma_2$ parallel ob wird.

Der Punkt o lässt sich nach der gegebenen Herleitung bestimmen oder auch ohne Construction des Punktes P finden, da aus der Gleichheit der Winkel $aPo = bPb_1 = abP$ sich das Rechteck $ao \times ab$ gleich der Potenz des Punktes a für den Kreis k ergiebt.

Dieses Gesetz folgt andrerseits auch aus der Gleichheit der Winkel

$$a o \beta = \beta \gamma_2 \alpha = a \gamma b$$

und ist von Giordano Ottajano für die Lösung der hier behandelten Aufgaben (Memorie della società italiana, Verona. 4. Band) benutzt worden, indem er ganz in derselben Weise noch einen der anderen beiden Punkte in unendliche Entfernung verlegt und dadurch die Aufgabe erhält, ein Dreieck in einen Kreis zu beschreiben, dessen eine Seite einen der Lage nach gegebenen Punkt berührt, während die beiden anderen Seiten gegebenen Linien parallel gerichtet sind. Denselben Gang der Lösung benutzt er für das einzuschreibende Vieleck, dessen Seiten gegebene Punkte berühren sollen.

Es lassen sich aber noch weitere Folgerungen ziehen, indem auch für jede andere Lage des Winkels aPb, z. B. für $a_2 P b_2$ aus der Gleichheit der Winkel $a_2 P o = b_2 P b_1 = a_2 b_2 P$ die Gleichheit des Rechtecks $a_2 o \times a_2 b_2$ mit der Potenz des Punktes a_2 für den Kreis k sich ergiebt.

Es lässt sich ausserdem sehr leicht nachweisen, sei es unter Heranziehung der obigen Betrachtungen, sei es durch nachträglichen Beweis vorhergegangener Annahme, dass dieses Gesetz für alle Lagen der Punkte abc, innerhalb oder ausserhalb des Kreises, volle Geltung hat, so dass man im Stande ist, jede der hier vorgetragenen Lösungen unmittelbar oder mittelbar für jedwede Lage der Punkte abc anzuwenden, nachdem man dieselben mit Hilfe des Punktes c entsprechend vorbereitet hat.

4. Aufgabe. Es sind in der Ebene eines Kreises k beliebig viele Punkte gegeben; man soll ein in den Kreis beschriebenes Vieleck zeichnen, in dessen Seiten je einer jener Punkte liegt.

Auflösung. In Figur 8. seien z. B. a, b, c, d, e, f die gegebenen Punkte; die entsprechenden Eckpunkte des zu zeichnenden Vielecks seien ab, bc, cd. etc bezeichnet, je nachdem sie durch die auszuführende Construction mit a und b, b und c, c und d etc. durch die Vielecksseiten zu verbinden sind.

Nach den vorher entwickelten Gesetzen lassen sich nun die Punkte a und b längs ihrer Verbindungslinie so verschieben, dass a in eine beliebige ausserhalb des Kreises gelegene Linie mn fällt; diese neue Lage der beiden Punkte werde mit a_1 und b' bezeichnet. In derselben Weise lässt sich aus der Verbindung von b' mit c der erstere Punkt gleichfalls in die Linie mn verlegen und werde daselbst mit b_1 bezeichnet, während die zweite Lage c' des Punktes c mit d ver-

bunden zu einer ferneren Verlegung von c' nach c_1 benutzt wird und in weiterer Verfolgung dieses Systems die Verlegung sämmtlicher Punkte mit Ausnahme des letzten in die Linie mn sich vollzieht.

Ist die Anzahl der gegebenen Punkte gerade, so genügt es, die Verlegung sämmtlicher Punkte mit Ausnahme von zweien zu bewirken, wofür der Grund sich sofort ergeben wird. Beiläufig ist zu bemerken, dass an Stelle der Linie mn auch die Verbindungslinie zweier passend gelegenen unter den gegebenen Punkten sich zur Uebertragung eignen kann.

Construirt man nun den Punkt P, für welchen mn die Linie gleicher Potenzen mit Kreis k ist, und zieht Figur 9. die Linien Pa_1, Pb_1, Pc_1, Pd_1, ferner, entsprechend aneinanderschliessend, im Kreise k den genannten Linien parallele Sehnen, so werden diese unabhängig vom Anfangspunkte ihrer Verzeichnung, paarweise je einen Bogen von gleichbleibender Länge umschliessen und deshalb zwischen Anfangs- und Endpunkt dieser Verzeichnungen einen Kreisbogen von gleichbleibender Länge ergeben, wo auch immer mit der Verzeichnung begonnen wird, welcher entweder eine, oder — wie hier — zwei Vieleckseiten umfassen muss, je nachdem eine ungerade oder gerade Anzahl von Punkten gegeben war.

Für ersteren Fall hat man von dem ausserhalb mn gebliebenen Punkt eine Secante durch den Kreis k zu legen, so dass ihr innerhalb des letzteren gelegener Teil gleich der Sehne des Schlussbogens wird.

Für den anderen Fall hat man über der Verbindungslinie der beiden ausserhalb mn gebliebenen Punkte einen Kreisbogen zu zeichnen, welcher den erwähnten Schlussbogen im Kreise k zu einem Vollkreise ergänzt. Die Schnittpunkte dieses zweiten Bogens mit Kreis k bilden dann Eckpunkte des gesuchten Vielecks, oder vielmehr ein harmonisches Bild derselben in Bezug auf den Projectionsmittelpunkt P. Selbstverständlich wird auch für die ausserhalb mn verbliebenen Punkte deren Verlegung oder harmonische Uebertragung zur Ausführung der eben erwähnten Construction zu verwenden sein. Die Richtigkeit des Verfahrens findet ihre Darlegung in den vorangegangenen Betrachtungen.

Man kann aber noch nach einer anderen Methode bei der Lösung dieser Aufgabe verfahren.

Seien a, b, c, d (Fig. 10.) die gegebenen Punkte. Verbindet man a mit b, c mit d und verlegt beide Punktenpaare, ab nach $b_1 b_1$, cd nach $c_1 d_1$ und zwar so, dass b_1 und c_1 aufeinanderfallen, so fallen auch die entsprechenden beiden Vieleckseiten aufeinander und a_1 und

d_1 sind als zwei unmittelbar hintereinanderfolgende Punkte für die Verzeichnung des Vielecks zu betrachten. Demnach wird der Punkt bc ausfallen und an Stelle der beiden Punkte ab und cd Punkt $a_1 d_1$ treten.

Man wird bei einer ungeraden Zahl von Punkten zuletzt noch drei übrig behalten, und damit nach einer der angegebenen Methoden die verlangte Figur anfertigen können.

Bei einer geraden Anzahl von Punkten werden nur noch zwei übrig bleiben, deren Verbindungslinie unmittelbar einen der verlangten Eckpunkte ergiebt.

Wenn in Fig. 11. durch $abcd$ vier übrig gebliebene Punkte, durch ab, bc, cd und ad die vier Eckpunkte eines durch jene vier Punkte bestimmbaren Kreisvierecks bezeichnet werden, so ersieht man ohne Weiteres aus der Figur, wie nach Ausschluss der Punkte b und c die Verbindung von a_1 und d_1, welche aus der Verschiebung von b nach b_1 und von c nach c_1 aus den Punkten a und d sich entwickeln, unmittelbar der Eckpunkt $a_1 d_1$, gleichbedeutend mit ad, gewonnen wird.

Bemerkung. Mit der hier angewendeten harmonischen Projectionsmethode lassen sich einfache Beweise für geometrische Lehrsätze herleiten, ohne das Gebiet der ebenen oder elementaren Geometrie zu verlassen. Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel.

Der bekannte Satz über das Pascalsche Sechseck ergiebt sich in einfachster Weise nach der angeführten Methode, wenn die Verbindungslinie von Schnittpunkten zugeordneter Seiten ausserhalb des Kreises fällt.

Da aber die Mittellinie zwischen Pol und Polare stets ausserhalb des Kreises fällt, so erscheint zunächst das in Rede stehende Verfahren dann unbrauchbar, wenn die erwähnte Verbindungslinie den Kreis schneidet. Aber auch für diesen Fall ergiebt sich in der erwähnten Richtung ein sehr einfacher Beweis.

$abcdef$ (Fig. 12.) sei ein Kreissechseck. Es soll bewiesen werden, dass der Schnittpunkt von af und cd in einer Geraden mit den Schnittpunkten $ab - de$ und $bc - ef$ liege.

Der Schnittpunkt von ab und ef liege in α, der von bc und de in β; sucht man denjenigen Punkt P, für welchen $\alpha\beta$ die Linie gleicher Potenzen mit Kreis k darstellt, und entwirft aus P als Projectionsmittelpunkt das harmonische Bild der ganzen Figur, so entsteht das Schema Fig. 13., worin die gleichen Bezeichnungen beibehalten sind. $bp_1 ep_2$ wird ein Parallelogramm, adp_1 und cfp_2 sind

zwei ähnliche entgegengesetzt gleichgerichtete Dreiecke, deren innerer Aehnlichkeitspunkt p_3 mit den homologen Punkten p_1 und p_2 in gerader Linie liegt, woraus der gesuchte Beweis unmittelbar folgt.

5. Aufgabe. In ein Dreieck ist ein anderes einzuschreiben, dessen Seiten je einen gegebenen Punkt enthalten.

Auflösung. ABC (Fig. 14.) sei das gegebene, $\alpha\beta\gamma$ das zu zeichnende Dreieck, in dessen Seiten die Punkte a, b und c liegen sollen.

Legt man durch C und c eine Gerade und zu beiden Seiten derselben in gleichen Entfernungen einen beliebigen Punkt P als Projectionsmittelpunkt und eine Linie pp_1 als Projectionsaxe, entwirft darauf ein harmonisches Bild der ganzen Figur, so entsteht das Schema Fig. 15., worin die Bilder gleiche Bezeichnung mit ihren Gegenständen erhalten haben.

In dieser Figur sind also die Linien AB, AA_1, BB_1, ferner die Punkte ab und endlich die Richtung der Linie $\alpha\beta$ gegeben; der Punkt γ ist nun so zu zeichnen, dass $\alpha\beta$ parallel ihrer gegebenen Richtung wird. Dieses folgt einfach daraus, dass die Bilder der Punkte C und c in unendliche Entfernung gefallen sind.

Zieht man aa_1 und bb_1 parallel zu AA_1 oder BB_1, ferner die Linien ab_1 und ba_1, so wird β_1 und α_1 bestimmt; deshalb wird $\beta_1\beta$ sich von $\alpha_1\alpha$ um eine bekannte Länge unterscheiden. Nennt man diesen Unterschied d, so wird $\alpha_1\alpha = x+d$, wenn $\beta_1\beta = x$ gesetzt wird. Nennt man ferner die Länge $\beta_1\beta_2 = n$, die Länge $\alpha_1\alpha = m$ und die Teile der Linie $\gamma\gamma_1$ nach den Bezeichnungen der Figur, so wird man aus

$$\frac{x}{n} = \frac{v}{v+w} = \frac{m}{x+d}$$

nach beliebigen elementaren Methoden x construiren und damit α, β und γ bestimmen können, welche als harmonische Bilder ohne Weiteres zu den entsprechenden gesuchten Punkten der ursprünglichen Figur führen.

2. Auflösung. (Fig. 16.) Man ziehe innerhalb eines gegebenen Winkels ABC durch den festen Punkt p eine Linie, welche die Schenkel des Winkels in a und c schneide. Zieht man aus p parallel zu den Schenkeln des Winkels $p\alpha$ und $p\gamma$ und lässt diese beiden Längen sowie $B\gamma$ und $B\alpha$ ihrer Grösse nach unverändert, während der Winkel ABC sich beliebig öffnet oder schliesst, so werden a, c und p in einer geraden Linie bleiben.

Hat man nun ein beliebiges Vieleck $ABCD\ldots$ (Fig. 17.) und

für jeden Winkel einen gegebenen Punkt $pp_1p_2 \ldots$, zieht die Parallelen pb_1 und pb_2, p_1c_1 und p_1c_2, p_2d_1 und $p_2d_2 \ldots$ und verändert nun die Winkel beliebig, während die Längen der Vieleckseiten, der Parallelen und die Lage ihrer Fusspunkte auf den Seiten unverändert bleiben, so werden bpc, cp_1d, $dp_2e \ldots$ je in einer Geraden bleiben.

Man wird also den ganzen Vieleckzug längs einer geraden Linie so auftragen können, dass die Punkte $bpcp_1dp_2e \ldots$ in derselben liegen, wenn man auf die Beibehaltung ihrer Entfernungen verzichtet, während die übrigen Längen, bb_1, b_1B, Bb_2, $b_2c \ldots$ unverändert erscheinen. (Fig. 18.)

Man wird aber auch in der neuen Lage durch jeden beliebigen anderen Linienzug $b_3pc_3p_1d_3p_2e_3 \ldots$ dieselben Punkte mit einander verbinden, welche durch ein gleiches Verfahren in der ursprünglichen Figur sich ergeben hätten.

Wendet man nun auf das System $bpcp_1dp_2e \ldots$ die harmonische Projection an, indem man wieder in gleichen Entfernungen zu beiden Seiten der Linie $pp_1p_2 \ldots$ den Projectionsmittelpunkt und die Projectionsaxe legt, so erhält man nebenstehendes Schema Fig. 19., in welchem die harmonischen Bilder der um $pp_1p_2 \ldots$ sich drehenden Linien als in bestimmter Richtung liegende Parallelen erscheinen.

Man ersieht ferner, dass die Schnittpunkte γ_3, $\gamma_3' \ldots$ in einer Linie mit C liegen, dass man also an Stelle der Linien BC, CD eine einzige Linie B_1D_1 setzen und durch die beiden Richtungen $b_3\gamma_3$ und γ_3e_3 die Abhängigkeit der Punkte b_3 und e_3 von einander damit festhalten kann.

Die Herstellung der ursprünglichen Figur würde demnach die Verringerung derselben um eine Vieleckseite und um einen Punkt p gestatten. Man würde nunmehr auch in der ursprünglichen Figur diese Reduction vornehmen können, nachdem man durch die harmonische Uebertragung den Gang und die Richtigkeit derselben erfahren hat.

Wendet man nun die zu Fig. 17. und 18. gehörigen Entwickelungen auf die vorliegende Aufgabe an, nämlich durch drei gegebene Punkte die Seiten eines in ein gegebenes Dreieck eingeschriebenen Dreiecks zu legen, so werden also darin AB, BC, CD die drei Seiten des gegebenen Dreiecks darstellen, während in DE eine einfache Wiederholung der Seite AB anzunehmen ist, die mit dieser gleiche Länge hat.

Derjenige Zug $b_3c_3d_3e_3$, der darin für Ab_3 und De_3 gleiche Längen ergiebt, löst die Aufgabe.

Sei nun Fig. 20. das durch die angedeuteten Umformungen gewonnene Ergebniss.

Verlängert man das freie Ende von AB_1 um $DD_1 = AF$, sowie D_1E um $BB_1 = EF$, und stellt die gewonnenen Elemente unter passenden Winkeln zusammen, so leitet sich wiederum daraus eine einfache Lösung her.

Man wählt hierzu (Fig. 21.) die Form eines Dreiseits mit parallelen Schenkeln.

Die Aufgabe ist gelöst, wenn die von γ aus durch p und p_2 gelegten Linien für B_1b und F_1e gleiche Längen abschneiden.

Beiläufig folgt aus dieser Forderung, dass be ein Durchmesser der Figur werden und den Mittelpunkt O derselben berühren muss, da der Voraussetzung nach $AB = DE$, $AF = DD_1$ und $F_1E = B_1B$ ist.

Man gelangt unter Anwendung eines Hülfssatzes bald zum Zweck. BpB_1b_2 (Fig. 22.) sei ein Parallelogramm. Durch p ziehe man zwei beliebige Linien. Diese geben folgenden Zusammenhang der einzelnen Teile, wenn u parallel zu Bp liegt:

$$\frac{v}{u} = \frac{z}{n_1}; \quad \frac{w}{u} = \frac{z}{m_1} \quad \text{also} \quad \frac{v}{w} = \frac{m_1}{n_1} \quad \text{oder} \quad \frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}$$

Auf Fig. 21. oder die gleichbedeutende Fig. 23. dieses angewendet ergiebt folgende einfache Bestimmung der Punkte e, b und γ, nachdem man die Linien b_2p_2 und d_2p gezogen und endlich von dem Schnittpunkte der letzteren mit B_1F sowie von b_1 aus Linien durch O gelegt hat.

Gemäss den aus der Figur ersichtlichen Bezeichnungen der einzelnen Stücke hat man nun

$$\frac{n_1}{m_1} = \frac{n}{m} = \frac{n_2}{m_2}$$

Es ist aber $n = n_3$ und $m = m_3$, daher auch

$$\frac{n_3}{m_3} = \frac{n_2}{m_2}$$

Ferner ist die Länge d_1d_3, ebenso die Längen n, n_3 und m_3, also die Summe $m_2 + n_2$ bekannt, und die einzelnen Teile derselben aus dem ermittelten Verhältniss derselben ohne Weiteres festzustellen.

Bemerkung. Der Gang dieser Auflösung ist an sich weitläufig; derselbe wurde aber gewählt, um vermöge desselben zur Lösung der folgenden letzten Aufgabe zu gelangen.

6. Aufgabe. In ein gegebenes Vieleck ein anderes zu beschreiben, dessen Seiten je einen gegebenen Punkt berühren.

Auflösung. Diese ist bereits in der vorhergehenden Auflösung mit enthalten.

Die Verlegung der Punkte p in eine gerade Linie, die Reducirung derselben auf zwei und die endliche einfache Lösung für den Rest der Figur erfolgt in der beschriebenen Weise.

Es erhellt aber bei Verfolgung dieser Lösung sofort, dass die erwähnten Reductionen sich auch an einzelnen Abteilungen des gegebenen Vielecks vornehmen lassen, wie überhaupt hier ein grösseres Gewicht auf die Darstellung des Systems, als auf dessen Anwendung gefallen ist, wobei sich noch mehrfache Kürzungen finden dürften.

Schlussbemerkung. Es konnte selbstverständlich nicht die Absicht sein, vorhandene zum Teil sehr schöne Lösungen der hier behandelten Aufgaben verdunkeln zu wollen, sondern nur die zweckmässige Verwendung der harmonischen Projection an diesen Aufgaben zu erläutern.

Wenn aber andrerseits z. B. für die geradlinigen Aufgaben die Steinersche Lösung bedeutend eleganter erscheint, so bedarf es, um dahin zu gelangen, eines allerdings genialen aber immerhin eignen Lehrgebäudes über die Abhängigkeit geometrischer Gestalten.

Dasselbe gilt von den Göpelschen Entwickelungen, Crelle J. f. d. r. u. a. M. Band 36. Seite 317 u. ff., während Poncelet zu imaginären Vorstellungen im Zusammenhange mit der Lehre von den Kegelschnitten und stereometrischen Projectionen greift, dagegen der hier gewählte Weg das Gebiet der elementaren ebenen reinen Geometrie nicht verlässt. Aber auch für die Behandlung der Kegelschnitte dürfte der hier eingeschlagene Gang sich eignen, da jeder harmonische Projectionsmittelpunkt als harmonisches Bild eines Kreises denselben Kreis wieder liefert, wenn als Projectionsaxe die Polare des Punktes gewählt wird; dagegen die beliebig andere Lage der Axe als harmonische Bilder eines Kreises die verschiedenen Kegelschnitte ergiebt und die Behandlung derjenigen Aufgaben gestattet, welche in den genannten Göpelschen Untersuchungen enthalten sind. Vielleicht gewährt eine geschäftsfreiere spätere Zeit eine nähere Entwickelung dahinreichender Gedanken.

Königsberg im Winter 1874 zu 1875.

IV.

Propriétés nouvelles des polyèdres réguliers convexes.

Par

Georges Dostor.

---

1. Dans l'étude de ces propriétés, nous ferons intervenir le rayon de la sphère tangente aux arêtes du polyèdre régulier.

Soient O le centre d'un polyèdre régulier convexe, AB une arête et C le centre de l'une des deux faces aux quelles appartient cette arête.

Menons CI perpendiculaire sur l'arête AB, puis tirons les droites OI et OA; le point I est nécessairement le milieu de l'arête AB et la ligne OI est perpendiculaire sur AB.

Cela fait, il est évident que la droite OC est le rayon r de la sphère inscrite dans le polyèdre régulier, que OA est le rayon R de la sphère circonscrite et que OI est le rayon de la sphère tangente aux arêtes. Nous représenterons ce dernier rayon par ϱ.

Tirons les droites OB, CA et CB.

Supposons que chaque face du polyèdre ait n côtés et que m soit le nombre des arêtes qui aboutissent à chaque sommet.

Par le rayon OA de la sphère circonscrite et par chacune des m arêtes, telles que AB, qui sont issues de son extremité A, menons un plan; ces m plans diviseront en m parties égales l'espace rempli par les quatre dièdres droits qu'on peut former autour du rayon OA; par conséquent chacune de ces m parties est égale à $\frac{2\pi}{m}$ Or le

dièdre $COAI$, compris entre les deux plans OAC et OAI, est la moitié de l'une de ces parties; donc on a le dièdre $COAI = \frac{\pi}{m}$. Il est évident d'ailleurs que l'angle $ACI = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$.

Cela posé, projetons sur la face ACO chacune des trois autres faces CIO, AIO et ACI du tétraèdre $IACO$; nous obtenons l'égalité

$$ACO = CIO \,.\, \cos ACI + AIO \,.\, \cos OA,$$

ou

$$ACO = CIO \,.\, \cos\frac{\pi}{n} + AIO \,.\, \cos\frac{\pi}{m},$$

attendu que la face ACI est perpendiculaire sur la face ACO.

Mais nous avons

le triangle $ACO = \frac{1}{2}r \,.\, AC$

le triangle $CIO = \frac{1}{2}r \,.\, CI = \frac{1}{2}r \,.\, AC\cos\frac{\pi}{n}$

et le triangle $AIO = \frac{1}{2}\varrho \,.\, AI = \frac{1}{2}\varrho \,.\, AC\sin\frac{\pi}{n}$.

Il vient donc, en substituant et en divisant par $\frac{1}{2}AC$,

$$r = r\cos^2\frac{\pi}{n} + \varrho\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{m};$$

faisant passer $r\cos^2\frac{\pi}{n}$ dans le premier membre et divisant par $\sin\frac{\pi}{n}$, on trouve la relation.

(I) $$r\sin\frac{\pi}{n} = \varrho\cos\frac{\pi}{m}$$

qui existe entre le rayon r de la sphère inscrite et le rayon ϱ de la sphère tangente aux arêtes.

Appliquons cette formule aux cinq polyèdres réguliers convexes; nous obtenons les résultats suivants:

Tétraèdre, $n = 3$, $m = 3$; $r\sin 60^0 = \varrho\cos 60^0$; $r\sqrt{3} = \varrho$.
Hexaèdre, $n = 4$, $m = 3$; $r\sin 45^0 = \varrho\cos 60^0$; $r\sqrt{2} = \varrho$.
Octaèdre, $n = 3$, $m = 4$; $r\sin 60^0 = \varrho\cos 45^0$; $r\sqrt{3} = \varrho\sqrt{2}$.
Dodécaèdre, $n = 5$, $m = 3$, $r\sin 36^0 = \varrho\cos 60^0$; $r\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2\varrho$.
Icosaèdre, $n = 3$, $m = 5$; $r\sin 60^0 = \varrho\cos 36^0$; $2r\sqrt{3} = \varrho(\sqrt{5}+1)$.

2. Relation entre le rayon R de la sphère circonscrite et celui ϱ de la sphère inscrite. Le triangle rectangle AIO donne

$$\overline{OA}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{AI}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{AC}^2 \sin^2\frac{\pi}{n} = \overline{OI}^2 + (\overline{AO}^2 - \overline{OC}^2)\sin^2\frac{\pi}{n},$$

ou

$$R^2 = \varrho^2 + (R^2 - r^2)\sin^2\frac{\pi}{n};$$

on en déduit

$$R^2\cos^2\frac{\pi}{n} = \varrho^2 - r^2\sin^2\frac{\pi}{n}$$

Remplaçant $r\sin\frac{\pi}{n}$ par sa valeur $\varrho\cos\frac{\pi}{m}$ tirée de (I), on obtient

$$R^2\cos^2\frac{\pi}{n} = \varrho^2 - \varrho^2\cos^2\frac{\pi}{m} = \varrho^2\sin^2\frac{\pi}{m},$$

ou bien

(II) $$R\cos\frac{\pi}{n} = \varrho\sin\frac{\pi}{m}$$

Cette relation donne pour les cinq polyèdres réguliers convexes:

Tetraèdre, $R\cos\frac{\pi}{3} = \varrho\sin\frac{\pi}{3}$, $R = \varrho\sqrt{r}$.

Hexaèdre, $R\cos\frac{\pi}{4} = \varrho\sin\frac{\pi}{3}$, $R\sqrt{2} = \varrho\sqrt{3}$.

Octaèdre, $R\cos\frac{\pi}{3} = \varrho\sin\frac{\pi}{4}$, $R = \varrho\sqrt{2}$

Dodécaèdre, $R\cos\frac{\pi}{5} = \varrho\sin\frac{\pi}{3}$, $2R = \varrho\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)$.

Icosaèdre, $R\cos\frac{\pi}{3} = \varrho\sin\frac{\pi}{5}$, $2R = \varrho\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

3. Relation entre le rayon r de la sphère inscrite et celui R de la sphère circonscrite. Si nous divisons membre à membre les égalités (II) et (I), nous trouverons de suite la relation connue

(III) $$\frac{R}{r} = \operatorname{tang}\frac{\pi}{m}\operatorname{tang}\frac{\pi}{n},$$

qui donne pour les polyèdres réguliers convexes les rapports suivantes:

Tétraèdre, $n = 3$, $m = 3$; $R = 3r$.
Hexaèdre, $n = 4$, $m = 3$; $R = r\sqrt{3}$.

Octaèdre, $n=3$, $m=4$; $R=r\sqrt{3}$.

Dodécaèdre, $n=3$, $m=3$; $R(\sqrt{5}+1)=r\sqrt{3(10-2\sqrt{5})}$.

Icosaèdre, $n=3$, $m=5$; $R(\sqrt{5}+1)=r\sqrt{3(10-2\sqrt{5})}$.

On en conclut que, si deux polyèdres conjugués (l'hexaèdre et l'octaèdre, ou le dodécaèdre et l'icosaèdre) sont inscrits dans une même sphère, ils seront aussi circonscrits à une même sphère, et réciproquement.

4. **Relation entre les rayons R, r et ϱ des trois sphères.** Faisons le produit des deux égalités (II) et (I), nous aurons la relation remarquable

$$\text{(IV)} \qquad Rr\sin\frac{2\pi}{n}=\varrho^2\sin\frac{2\pi}{m},$$

qui, étant appliquée aux cinq polyèdres réguliers convexes, donne:

Tétraèdre, $Rr\sin 120^0=\varrho^2\sin 120^0$, $Rr=\varrho^2$.

Hexaèdre, $Rr\sin 90^0=\varrho^2\sin 120^0$, $2Rr=\varrho^2\sqrt{3}$.

Octaèdre, $Rr\sin 120^0=\varrho^2\sin 90^0$, $Rr\sqrt{3}=2\varrho^2$.

Dodécaèdre, $Rr\sin 72^0=\varrho^2\sin 120^0$, $Rr\sqrt{10+2\sqrt{5}}=2\varrho^2\sqrt{3}$.

Icosaèdre, $Rr\sin 120^0=\varrho^2\sin 72^0$, $2Rr\sqrt{3}=\varrho^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

Nous voyons par ces valeurs que:

Dans le tétraèdre régulier, le rayon de la sphère tangente aux six arêtes est moyen proportionnel entre le rayon de la sphère inscrite et celui de la sphère circonscrite;

Dans l'hexaèdre et l'octaèdre réguliers, qui sont inscrits dans la même sphère, les rayons de deux sphères tangentes aux arêtes sont entre eux dans le rapport de 2 à $\sqrt{3}$.

Dans le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers, qui sont inscrits dans la même sphère, les rayons des deux sphères tangentes aux arêtes sont entre eux dans le rapport de $\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ à $2\sqrt{3}$.

5. **Relations particulières entre les rayons R, r et ϱ des trois sphères.** Les valeurs trouvées aux n^{00} 1, 2 et 3 pour ces rayons permettent de vérifier les égalités suivantes:

Hexaèdre, $R^2=\varrho^2+r^2$;

Octaèdre, $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{\varrho^2}$;

Dodécaèdre, $R^2 = 12\varrho^2 - 15r^2$;

Icosaèdre, $R^2 = 4\varrho^2 - 3r^2$.

6. **Inclinaison de deux faces adjacentes du polyèdre régulier.** Nous désignerons cette inclinaison par 2α; elle est double de l'angle *OIC*. Le triangle rectangle *OCI* nous donne

$$OC = OI \sin OIC,$$

ou

(1) $$r = \varrho \sin \alpha;$$

mais par la relation (I) nous avons

$$r = \varrho \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\sin \frac{\pi}{n}};$$

donc il vient la valeur connue

(V) $$\sin \alpha = \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\sin \frac{\pi}{n}}.$$

Les inclinaisons mutuelles des faces, dans les polyèdres réguliers convexes, sont ainsi

Tétraèdre, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{cos\acute{e}c} \alpha = \sqrt{3}$, $2\alpha = 70^0\, 31'\, 43'',6$.

Hexaèdre, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{cos\acute{e}c} \alpha = \sqrt{2}$, $2\alpha = 90^0$.

Octaèdre, $\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\operatorname{s\acute{e}c} \alpha = \sqrt{3}$, $2\alpha = 109^0\, 28'\, 16'',4$.

Dodécaèdre, $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$, $\cot \alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$,
$2\alpha = 116^0\, 33'\, 54'',2$.

Icosaèdre, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}$, $\operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)^2$, $2\alpha = 138^0\, 11'\, 22'',75$.

7. **Expression des rayons R, r et ϱ des trois sphères en valeur de l'arête a et de l'inclinaison mutuelle 2α des faces.** Le triangle rectangle *OCI* nous fournit la valeur

$$r = OC = CI \operatorname{tang} OIC = CI \operatorname{tang} \alpha;$$

et, comme on a par le triangle rectangle ACI

$$CI = AI \cot ACI = \frac{a}{2} \cot \frac{\pi}{n},$$

il nous viendra

(VII) $$2r = a \cot \frac{\pi}{n} \operatorname{tang} \alpha.$$

Multiplions cette égalité membre à membre par (III), nous aurons

(VII) $$2R = a \operatorname{tang} \frac{\pi}{m} \operatorname{tang} \alpha.$$

Enfin dans ces deux expressions remplaçons r et R par leurs valeurs que fournissent (1) et (II), nous obtiendrons

(VIII) $$2\varrho = a \frac{\cot \frac{\pi}{n}}{\cos \alpha},$$

(IX) $$2\varrho = a \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{m}} \operatorname{tang} \alpha.$$

Ces expressions nous permettent de calculer les valeurs des rayons des trois sphères; elles sont:

Tétraèdre, $r = \frac{1}{12} a \sqrt{6}$, $\varrho = \frac{1}{4} a \sqrt{2}$, $R = \frac{1}{4} a \sqrt{6}$.

Hexaèdre, $r = \frac{1}{2} a$, $\varrho = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$, $R = \frac{1}{2} a \sqrt{3}$.

Octaèdre, $r = \frac{1}{6} a \sqrt{6}$, $\varrho = \frac{1}{2} a$, $R = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$.

Dodécaèdre, $r = \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{25 - 11\sqrt{5}}{10}}$, $\varrho = \frac{1}{8} a (\sqrt{5}+1)^2$, $R = \frac{1}{4} a \sqrt{3} (\sqrt{5}+1)$

Icosaèdre, $r = \frac{a}{24} \sqrt{3} (\sqrt{5}+1)^2$, $\varrho = \frac{1}{4} a (\sqrt{5}+1)$, $R = \frac{1}{4} a \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

8. **Expressions diverses du volume d'un polyèdre régulier convexe.** Soit N le nombre des faces du polyèdre. Chacune de ces faces sera la base d'une pyramide régulière ayant son sommet au centre O du polyèdre.

Le triangle ABC est l'un des n triangles dont se compose la face ayant son centre en C. La surface de cette face sera donc

$$n . ABC = \frac{n}{2} AB . CI = \frac{n}{2} a . \frac{a}{2} \cot \frac{\pi}{n} = \frac{1}{4} n a^2 \cot \frac{\pi}{n}.$$

et comme la hauteur OC est égale à r, le volume de notre pyramide régulière sera

$$v = \frac{1}{12} na^2 r \cot \frac{\pi}{n}.$$

Nous avons donc

$$\text{(X)} \qquad V = \frac{1}{12} Nna^2 r \cot \frac{\pi}{n}$$

pour le volume du polyèdre convexe, de N faces ayant chacune n côtés égalés à a et se trouvant circonscrit à la sphère de rayon r.

Dans cette expression remplaçons $a \cot \frac{\pi}{n}$ par sa valeur $2\varrho \cos \alpha$ tirée de (VIII); elle devient

$$\text{(XI)} \qquad V = \frac{1}{6} Nnar\varrho \cos \alpha .$$

Les deux égalités (VI) et (VIII) nous donnent

$$4r\varrho \cos \alpha = a^2 \cot^2 \frac{\pi}{n} \operatorname{tang} \alpha,$$

de sorte qu'on a encore

$$\text{(XII)} \qquad V = \frac{1}{24} Nna^3 \cot^2 \frac{\pi}{n} \operatorname{tang} \alpha$$

Dans cette dernière formule mettons à la place de l'arête a successivement les valeurs

$$2r \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} \cot \alpha,$$

$$2R \cot \frac{\pi}{m} \cot \alpha,$$

$$2\varrho \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\cos \frac{\pi}{n}} \cot \alpha$$

tirées des relations (VI), (VII) et (IX); elle se changera dans les suivantes

$$\text{(XIII)} \qquad V = \tfrac{1}{3} Nnr^3 \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} \cot^2 \alpha,$$

(XIV) $$V = \frac{1}{3} NnR^3 \cot^2 \frac{\pi}{n} \cot^3 \frac{\pi}{m} \cot^2 \alpha,$$

(XV) $$V = \frac{1}{6} N n \varrho^3 \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} \sin 2\alpha \cos \alpha.$$

Enfin nous pouvons exprimer V exclusivement en valeur de R, r et ϱ.

En effet, puisque les triangles rectangles OAI et OCI donnent $a = AB = 2\sqrt{R^2 - \varrho^2}$, $CI = \sqrt{\varrho^2 - r^2}$, il viendra encore

(XVI) $$V = \frac{1}{3} Nnr \sqrt{(R^2 - \varrho^2)(\varrho^2 - r^2)}.$$

9. Appliquons ces formules aux cinq polyèdres réguliers convexes; nous obtenons pour leurs volumes les expressions suivantes:

Tétraèdre: $V = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2} \qquad = 8r^3 \sqrt{3}$

$= \frac{8}{3} \varrho^3 \qquad = \frac{8}{27} R^3 \sqrt{3}.$

Hexaèdre: $V = a^3 \qquad = 8r^3$

$= 2\varrho^3 \sqrt{2} \qquad = \frac{8}{9} R^3 \sqrt{3}.$

Octaèdre: $V = \frac{1}{3} a^3 \sqrt{2} \qquad = 4r^3 \sqrt{3}$

$= \frac{8}{3} \varrho^3 \sqrt{2} \qquad = \frac{4}{3} R^3.$

Dodécaèdre: $V = \frac{1}{96} a^3 \sqrt{15(1+\sqrt{5})^4} = \frac{10}{3} r^3 \sqrt{390 - 174\sqrt{5}}$

$= \frac{1}{3} \varrho^3 \sqrt{15(\sqrt{5}-1)^2} = \frac{1}{3} R^3 \sqrt{3}(10 + 2\sqrt{5}).$

Icosaèdre: $V = \frac{5}{24} a^3 (1+\sqrt{5})^2 \qquad = \frac{5}{32} r^3 \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)^4$

$= \frac{5}{12} \varrho^3 (\sqrt{5}-1) \qquad = \frac{2}{3} R^3 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$

10. Supposons que l'hexaèdre régulier et l'octaèdre réguliers soient inscrits dans la même sphère; leurs volumes seront entre eux comme les quantités $\frac{8}{9}\sqrt{3}$ et $\frac{4}{3}$ ou comme 2 est à $\sqrt{3}$; or nous savons (n° 4) que les rayons des sphères tangentes aux arêtes de ces deux polyèdres sont dans le même rapport. Donc

Lorsque l'hexaèdre et l'octaèdre réguliers sont inscrits dans la même sphère leurs volumes sont entre eux

comme les rayons des sphères tangentes aux arêtes de ces deux polyèdres.

Si le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers sont aussi inscrits dans la même sphère; le rapport de leurs volumes sera égal à

$$\frac{10+2\sqrt{5}}{2\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}$$

ou au rapport rayons des sphères tangentes aux arêtes (n⁰ 4). Donc

Lorsque le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers sont inscrits dans la même sphère, leurs volumes sont entre eux comme les rayons des sphères tangentes aux arêtes de ces deux polyèdres.

V.

Ein Theorem über die conforme Abbildung der Flächen auf Ebenen.

Von

R. Hoppe.

Das Endziel des gegenwärtigen Aufsatzes ist folgendes Ergebniss:

Kann man auf einer reellen Fläche eine stetige Schar imaginärer Linien analytisch darstellen, deren Bogenelement constant null ist, so ist die Aufgabe der conformen Abbildung eben dieser Fläche auf der Ebene gelöst.

Seien u, v die rechtwinkligen Coordinaten des Punkts auf der Ebene, in welchem der Punkt mit den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z nach Aehnlichkeit der Flächenelemente abgebildet werden soll. Der Ort des Punktes (xyz) braucht allein durch die Relation

$$p\partial x + q\partial y + r\partial z = 0 \tag{1}$$

bestimmt zu sein, wo p, q, r die Richtungscosinus seiner Normale bezeichnen und als Functionen zweier der 3 Grössen x, y, z gegeben sind. Die Aufgabe der Abbildung besteht darin, x, y, z als Functionen von u, v darzustellen, welche den 2 Gleichungen

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0 \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \tag{3}$$

genügen. Erstere drückt aus, dass das Element der gegebenen Fläche, welches in dem rechteckigen Elemente $\partial u \partial v$ abgebildet wird, selbst

rechtwinklig ist; die letztere, dass die anstossenden Seiten beider Rechtecke in Proportion stehen.

Eliminiren wir zuerst ∂z mittelst der Gl. (1); dann lauten die Bedingungsgleichungen (2) (3):

$$(p^2+r^2)\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+(q^2+r^2)\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+pq\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)=0$$

$$(p^2+r^2)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+(q^2+r^2)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+2pq\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}=$$

$$(p^2+r^2)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+(q^2+r^2)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+2pq\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}$$

und lassen sich folgendermassen ordnen:

$$\left\{(p^2+r^2)\frac{\partial x}{\partial u}+pq\frac{\partial y}{\partial u}\right\}\frac{\partial x}{\partial v}+\left\{pq\frac{\partial x}{\partial u}+(q^2+r^2)\frac{\partial y}{\partial u}\right\}\frac{\partial y}{\partial v}=0$$

$$\left\{(p^2+r^2)\frac{\partial x}{\partial u}+pq\frac{\partial y}{\partial u}\right\}\frac{\partial x}{\partial u}+\left\{pq\frac{\partial x}{\partial u}+(q^2+r^2)\frac{\partial y}{\partial u}\right\}\frac{\partial y}{\partial u}=$$

$$\left\{(p^2+r^2)\frac{\partial x}{\partial v}+pq\frac{\partial y}{\partial v}\right\}\frac{\partial x}{\partial v}+\left\{pq\frac{\partial x}{\partial v}+(q^2+r^2)\frac{\partial y}{\partial v}\right\}\frac{\partial y}{\partial v} \tag{4}$$

Die erstere lässt sich zerlegen in

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\partial x}{\partial v}&=pq\frac{\partial x}{\partial u}+(q^2+r^2)\frac{\partial y}{\partial u}\\ -m\frac{\partial y}{\partial v}&=(p^2+r^2)\frac{\partial x}{\partial u}+pq\frac{\partial y}{\partial u}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

woraus, umgekehrt entwickelt:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{r^2}{m}\frac{\partial x}{\partial u}&=pq\frac{\partial x}{\partial v}+(q^2+r^2)\frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{r^2}{m}\frac{\partial y}{\partial u}&=(p^2+r^2)\frac{\partial x}{\partial v}+pq\frac{\partial y}{\partial v}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Vermöge dieser Gleichungen, und zwar durch Substitution ihrer linken Seiten für die rechten, geht Gl. (4) über in

$$\left(m-\frac{r^2}{m}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)=0$$

oder wenn $t\,\partial u\,\partial v$ das Flächenelement ausdrückt, in

$$\left(m-\frac{r^2}{m}\right)rt=0$$

folglich ist

$$m = \pm r$$

Setzt man diesen Wert in die Gl. (5) (6), multiplicirt sie der Reihe nach mit

$$-i, \quad i, \quad 1, \quad -1$$

so giebt die Summe der ersten und dritten:

$$(pq + im)\left(i\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v}\right) = (q^2 + r^2)\left(\frac{\partial y}{\partial v} - i\frac{\partial y}{\partial u}\right) \tag{7}$$

die Summe der zweiten und vierten:

$$(p^2 + r^2)\left(i\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v}\right) = (pq + im)\left(\frac{\partial y}{\partial v} - i\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

Beide Gleichungen sind identisch.

Betrachtet man u, v jetzt als Functionen von x, y, so hat man folgende Relationen zwischen den alten und neuen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial x}{\partial u} : \frac{\partial y}{\partial u} : \frac{\partial x}{\partial v} : \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial v}{\partial y} : -\frac{\partial v}{\partial x} : -\frac{\partial u}{\partial y} : \frac{\partial u}{\partial x}$$

und Gl. (7) geht über in

$$(pq \pm ir)\frac{\partial(u + iv)}{\partial y} = (q^2 + r^2)\frac{\partial(u + iv)}{\partial x} \tag{8}$$

Ist nun

$$f(x, y) = \text{const.} \tag{9}$$

das Integral der Gleichung

$$(pq \pm ir)\partial x + (q^2 + r^2)\partial y = 0 \tag{10}$$

so ist die allgemeinste Auflösung der Gl. (8)

$$u + iv = F(f(x, y)) \tag{11}$$

Vermöge Gl. (1) lässt sich Gl. (10) auch schreiben:

$$\pm ir\partial x = r(q\partial z - r\partial y) \quad \text{oder}$$
$$\pm i\partial x = q\partial z - r\partial y$$

Ausserdem ist

$$-p\partial x = q\partial y + r\partial z$$

Die Summe der Quadrate beider Gleichungen giebt:

$$(p^2 - 1)\partial x^2 = (q^2 + r^2)(\partial y^2 + \partial z^2)$$

und nach Division durch $1-p^2 = q^2+r^2$:

$$\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2 = 0 \tag{12}$$

Die Deduction dieser Gleichung lässt sich umkehren, d. h. wenn sie nebst Gl. (1) erfüllt ist, so folgen successive die vorhergehenden, endlich Gl. (2) (3). Ist also auf der Fläche eine imaginäre Curve bekannt, welche der Gl. (12) genügt, und die überdies von einem stetig veränderlichen Parameter abhängt, so befriedigen x, y nach Elimination von z mittelst der Flächengleichung auch die Gl. (9). Löst man dann die von z freie Gleichung der Curve nach dem Parameter auf, so ist dessen Ausdruck in x, y die Function f, und Gl. (11) bestimmt die Abbildung.

Das einfachste Beispiel einer mit einem Parameter variirenden Linie, deren Element null, ist die Gerade

$$\frac{cx-1}{c^2-1} = \frac{icy+1}{c^2+1} = \frac{z+1}{2}$$

Sie erzeugt bei variirendem c die Kugelfläche

$$x^2+y^2+z^2 = 1$$

wie leicht erhellt, wenn man ihre 2 Gleichungen in der Form schreibt:

$$x+iy = c(1+z); \qquad x-iy = \frac{1-z}{c} \tag{13}$$

und mit einander multiplicirt.

Um nun hieraus die conforme Abbildung der Kugelfläche auf der Ebene abzuleiten, braucht man nur eine der Gl. (13) nach c aufzulösen, woraus:

$$\frac{x+iy}{1+z} = c$$

und erhält gemäss Gl. (9)

$$f(x, y) = \frac{x+iy}{1+z}$$

Dies giebt nach (11) die Abbildungsrelation:

$$u+iv = F\left(\frac{x+iy}{1+z}\right)$$

welche für $F(x) = x$ unter dem Namen „stereographische Projection" bekannt ist.

Als ein zweites Beispiel möge die Curve

$$x+iy=c\left(\frac{3}{4}z\right)^{-\frac{2}{3}}; \quad x-iy=\frac{1}{c}\left(\frac{3}{4}z\right)^{\frac{8}{3}}$$

dienen, deren Bogenelement null ist. Sie erzeugt die Kegelfläche

$$x^2+y^2=\frac{9}{16}z^2$$

Setzt man eine Function von $u+iv$, z. B. $(u+iv)^{\frac{1}{3}}$, für c, so erhält man als Abbildungsrelation:

$$u+iv=\frac{9}{16}z^2(x+iy)^3$$

In beiden Beispielen, welche aus bekannten Abbildungen entnommen waren, war es leicht nach Aufstellung der Erzeugenden die reelle Fläche zu finden, der sie angehört. Wollte man einen gleichen Weg in weiterm Umfange einschlagen, d. h. erst eine Curve suchen, deren Bogenelement null ist, dann eine von ihr erzeugte Fläche als reell bestimmen, um schliesslich deren Abbildung auf der Ebene nach dem vorstehenden Satze zu erhalten, so würde sich zeigen, dass sich die Lösung der ersten Aufgabe sofort in voller Allgemeinheit darbietet, die Hauptschwierigkeit dagegen in der zweiten liegt. Aus

$$\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2=0$$

ergiebt sich nämlich:

$$\partial(x+iy).\partial(x-iy)=-\partial z^2$$

eine Gleichung, die man in folgende drei zerlegen kann:

$$\begin{aligned}\partial(x+iy)&=\partial v\\ \partial(x-iy)&=-u^2\partial v\\ \partial z&=u\,\partial v\end{aligned}$$

Um sie zu integriren hat man zu unterscheiden, jenachdem u constant ist oder nicht. Im ersten Fall erhält man:

$$\left.\begin{aligned}x+iy&=v\\ x-iy&=a-c^2v\\ z&=b+cv\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

wo a, b, c beliebige complexe Constanten sind, und die erste Gleichung, die nur v definirt, keine Constante zu haben braucht.

Ist u variabel, so kann man $\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}$ für v setzen; dann kommt:

$$\left.\begin{aligned} x+iy &= \frac{\partial^2 v}{\partial u^2} \\ x-iy &= a-2v+2u\frac{\partial v}{\partial u}-u^2\frac{\partial^2 v}{\partial u^2} \\ z &= b-\frac{\partial v}{\partial u}+u\frac{\partial^2 v}{\partial u^2} \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Hierin ist v willkürliche Function von u. Denkt man für v alle möglichen Functionen gesetzt, so drückt das System (15) alle Curven von der verlangten Eigenschaft aus, während es die vom System (14) dargestellten Geraden nicht in sich begreift.

VI.

Ueber die Rolle der Erfahrung in den exacten Wissenschaften.

Von

M. J. Hoüel,

Professor der Mathematik in Bordeaux.

Aus der Zpravy Jednoty Ceskych Mathematiku, 1875.

Mit Bewilligung des Verfassers übersetzt

von

Dr. Felix Müller.

C'est dans ce même recueil (l'Archiv der Mathematik) qu'a paru, il y a douze ans le premier travail que j'aie fait sur ce sujet, et qui contenait le germe des idées que j'ai depuis développées et éclaircies. (Lettre de M. J. Hoüel.)

Die Mehrzahl der Erscheinungen, welche wir mit unsern Augen wahrnehmen, ist einer **exacten** Bestimmung nicht fähig; und wenn sich diese Erscheinungen wiederholen, so haben wir kein Mittel, uns ihrer vollkommenen Identität zu vergewissern. Doch gibt es einige, — und dies sind natürlich die einfachsten, — deren Bestimmung mit hinreichender Annäherung und Sicherheit möglich ist, so dass die Ungewissheit, welche wir bestehen lassen, für uns ohne Nachteil ist.

Ist eine exacte Vergleichung möglich, so können wir zum Studium der Gesetze für die Beziehung einer Erscheinung zu einer anderen schreiten; und sind diese Gesetze einfach genug, so dass es uns gelingt, sie zu erkennen, so bildet ihre Gesammtheit den Gegenstand einer **exacten Wissenschaft.**

Der Bau einer solchen Wissenschaft setzt sich im Wesentlichen aus zwei getrennten Teilen zusammen: der eine, welcher auf der Beobachtung und der Erfahrung beruht, besteht darin, Tatsachen zu sammeln und daraus durch Induction die Gesetze und die Principien zu gewinnen, welche der Wissenschaft als Grundlage dienen sollen; der andere Teil, der nur ein Zweig der allgemeinen Logik ist, beschäftigt sich damit, diese Grundprincipien mit einander zu combiniren, um daraus die Darstellung der beobachteten Tatsachen zu gewinnen und überdies neue Tatsachen vorherzusagen.

Die Beobachtung der Tatsachen kann, im Allgemeinen, nicht mit strenger Sicherheit statthaben, und ist niemals eine vollständige. Nichts kann uns also a priori die Ueberzeugung gewähren, dass die Gesetze, welche die Induction lieferte, alle wahr, noch dass sie alle hinreichend sein werden.

Man wird ihre Unrichtigkeit erkennen, wenn sie durch logisches Verfahren miteinander verbunden, auf widersprechende Folgerungen führen, oder wenn die neuen Tatsachen, welche sie vorhersehen lassen, in Widerspruch mit der objectiven Wirklichkeit stehen.

Andrerseits kann es geschehen, dass die angenommenen Gesetze nicht alle verschieden und unabhängig voneinander sind, und dass einige derselben einen Teil der Folgerungen ausmachen, welche man durch Combination der andern gewinnen kann.

So sieht man, welche Rolle bei der Begründung der Principien demjenigen Teile der Wissenschaft zukommt, der sich nur mit der Combination der Principien beschäftigt, ganz abgesehen von ihrem experimentellen Ursprung und von den Beziehungen, welche ihre Folgerungen zu den wirklichen Tatsachen haben. Dieser Teil der Wissenschaft hat festzustellen: erstens, ob die Principien untereinander verträglich sind, und dann, ob sie nicht auf eine geringere Anzahl zurückgeführt werden können. Eine Wissenschaft, welche auf Principien gegründet ist, die diesen Bedingungen genügen, ist absolut wahr, vom rationellen und vom abstracten Gesichtspunkt aus, selbst wenn sie sich mit den wirklichen Tatsachen, welche sie darzustellen bestimmt war, nicht in Uebereinstimmung befinden sollte. In diesem Falle muss man sich an den experimentellen und inductiven Teil halten und die fundamentalen Hypothesen ändern. Der rein logische Teil ist, obwohl unanwendbar geworden, doch unanfechtbar.

Dieser logische Teil der exacten Wissenschaften macht das aus, was man Mathematik im eigentlichen Sinne des Wortes nennt. Die Mathematik zerfällt ihrerseits wieder in die reine Mathematik, welche die logischen Theorien enthält, die auf das Studium aller

Classen von Tatsachen ohne Unterschied anwendbar sind, und in die angewandte Mathematik, welche von der Anwendung dieser allgemeinen Theorien auf besondere Classen von Tatsachen und von den besonderen Methoden handelt, welche sich am besten für jede dieser Classen eignen.

II.

Man nennt ein Verfahren, welches eine Erscheinung in eine andre überführt, eine Operation, so dass also einer Folge von Erscheinungen eine Combination (Verknüpfung) *) von Operationen entspricht.

Um die Logik auf die Combination der Operationen anwenden zu können, ist es keineswegs nötig, die Realität der Operationen und die Art und Weise, wie sie sich vollziehen, zu kennen. Es genügt, gewisse abstracte Eigenschaften dieser Operationen festgestellt zu haben, die man combinatorische Eigenschaften nennen könnte **). Man kann eine abstracte Theorie der Operationen ausbilden, welche einzig auf die Betrachtung dieser Eigenschaften gegründet ist. Eine solche Theorie würde die gewöhnliche Algebra als besonderen Fall umfassen ***).

Da die Zahl das Gesetz ist, nach dem eine Grösse durch Addition aus gleichen Einheiten gebildet wird, so ist die Arithmetik nichts Anderes als die abstracte Theorie der Combination derartiger Operationen.

Die Operationen können einfache sein, wie es die Grundopera-

---

*) S. E. Schröder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Leipzig 1873, I, 180. D. Ü.

**) Um ein Beispiel zu geben, so beruht die Theorie der algebraischen Multiplication ganz und gar auf den Eigenschaften, welche durch folgende Gleichungen ausgedrückt werden:

1°. Für $a = a'$, $b = b'$ ist $a.b = a'.b'$ (Eindeutigkeit);
2°. $(a + b)c = a.c + b.c$ (Distributive Eigenschaft);
3°. $a.b = b.a$ (Commutative Eigenschaft);
4°. $(a.b).c = a.(b.c)$ (Associative Eigenschaft);
5°. $a \times 0 = 0$;
6°. $a \times 1 = a$.

(Ueber die Elementarvoraussetzungen, aus denen sich alle Fundamentalgesetze der Operationsverknüpfung folgern lassen, siehe Schröder, l. c. p. 235. D. Ü.)

***) Vgl. E. Schröder, Ueber die formalen Elemente der absoluten Algebra, Stuttgart 1874. D. Ü.

tionen der Algebra sind; sie besitzen dann einfache Eigenschaften, und die Theorie ihrer Combination kann eine grosse Entwickelung erfahren. Andrerseits können die Operationen zusammengesetzterer Natur sein: derart sind die geometrischen Constructionen, deren Combination meistens nach speciellen Gesetzen für jeden besonderen Fall vor sich geht, ohne dass man sie allgemeinen Verfahrungsarten unterwerfen kann.

Die zusammengesetzten Operationen lassen sich im Allgemeinen auf einfache zurückführen. Diese Zerlegung der Operationen in ihre Elemente ist es, welche die sogen. analytischen Theorien (die analytische Geometrie, die analytische Mechanik, etc.) kennzeichnet. Synthetische Theorien dagegen nennt man solche, auf die man unmittelbar die zusammengesetzten Operationen anwenden kann.

Der wesentliche Unterschied zwischen den analytischen und den synthetischen Theorien besteht also darin, dass die Operationen in den ersteren einfache Eigenschaften haben, welche an die Stelle mehrerer combinirter Operationen allgemeine Verfahrungsarten zu setzen gestatten, und welche gesetzmässig zusammenhängende und directe Methoden für die Lösung der Probleme liefern. In den synthetischen Theorien dagegen verbietet die Verwickelung und die grössere Verschiedenheit der Operationen die Bildung einfacher Regeln für ihre Anwendung, und die Lösung ist, obwohl sie weniger Zwischenglieder erfordert, gewöhnlich das Resultat eines Umhertappens, das Uebung abkürzen kann, weit mehr als allgemeine Methoden.

III.

Die Grössen (Quanta)*) lassen sich einteilen in discrete oder numerische und in concrete oder stetige Grössen.

Die discreten Grössen lassen sich zusammensetzen aus Elementen, welche als identisch angesehen werden in Bezug auf diejenige Eigenschaft, nach der die Gattung der Einheit, welche zugleich die Gattung der Grösse ist, benannt wird. Die discrete Grösse wird gebildet durch Wiederholung oder Vervielfältigung der Einheit. Das Gesetz, nach dem diese Operation vor sich geht, heisst eine Zahl. Eine discrete Grösse ist vollkommen bekannt, wenn ihre Gattung und ihre Zahl gegeben sind.

---

*) Bestimmte, durch ein Merkmal oder durch eine Grenze unterschiedene Teile einer Mannigfaltigkeit, Riemann, Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, p. 3. D. Ü.

Die mathematische Theorie der discreten Grössen beschäftigt sich nur mit den Zahlen, durch welche sie dargestellt werden, ohne Rücksicht auf ihre Gattung. Da die Zahlen mit vollkommener Genauigkeit definirt und untereinander verglichen werden können, so bietet sich ihre Theorie unmittelbar mit aller Strenge dar, und die Arithmetik der ganzen Zahlen bildet den einfachsten Zweig der reinen Mathematik.

Wir wollen es hier nicht unternehmen zu prüfen, welchen Anteil die Erfahrung an der Ausbildung der Arithmetik, der elementaren wie der höheren, hat. Wir wollen hier nur bemerken, dass, wenn auch die Erfahrung, — d. h. die Prüfung der aus einzelnen Beispielen durch Rechnung erhaltenen Resultate, — häufig ein mächtiges Hülfsmittel für die inductive Untersuchung der verborgensten Eigenschaften der Zahlen gewesen ist, sie dennoch, als Basis der Principien und der Beweise, eine sehr eingeschränkte Rolle spielt, wenn sie überhaupt sich hier irgendwie einmischt*).

Die concreten Grössen werden durch einen stetigen Uebergang von der einen zur andern (durch Addition) gebildet. Sie werden so angesehen, als besässen sie von Natur in allen ihren Teilen dieselben Eigenschaften, nämlich die, welche ihre Benennung ausdrückt.

Diejenigen concreten Grössen, welche sich unserer sinnlichen Wahrnehmung darbieten, können nicht mit vollkommener Genauigkeit bestimmt und mit einander verglichen werden, wie die discreten Grössen es konnten; und dieses liegt teils an der Unbestimmtheit ihrer Grenzen, teils an der Unvollkommenheit unserer Sinne und unserer Beobachtungsmittel. Man kann sie also nicht direct einer mathematischen Theorie unterwerfen, und ist gezwungen, ihr Studium durch das idealer Grössen zu ersetzen. Letztere werden durch diejenigen Eigenschaften definirt, deren Existenz in den materiellen Objecten annähernd festzustellen unsere mehr oder weniger groben Beobachtungsmittel gestatten.

So muss dem Studium der Ausdehnung der reellen Körper, deren Gestalt weder vollständig bestimmt noch vollständig beobachtet werden kann, ein abstractes Studium idealer Körper vorhergehen, idealer Gebilde, welche mit Hülfe eines vollkommen exacten Massverfahrens streng bestimmt sind. Dieses letztere Studium wird von selbst zurückgeführt auf das Studium solcher Figuren, denen eine oder zwei ihrer Dimensionen genommen sind, und schliesslich auf die Betrachtung eines Punktes, der jeder Ausdehnung baar ist.

---

*) Man vergleiche, was Schröder über den Anteil der Erfahrung an der Ausbildung der Arithmetik sagt, l. c. p. 72, 99, 112 u. 113. D. Ü.



In ähnlicher Weise dient der Wissenschaft der physikalischen Bewegung als Grundlage, oder wenn man will als Grundriss, die abstracte Mechanik, welche den Hypothesen der Geometrie gewisse andere hinzufügt, die mehr oder weniger direct durch die Erfahrung veranlasst sind. So operirt sie mit geometrischen Körpern, indem sie den Eigenschaften derselben die Idee der Masse hinzufügt, und die Körper den Ursachen der Bewegung unterwirft, die man Kräfte nennt; und diese Kräfte werden durch die Wirkung definirt, welche sie vermöge der zugestandenen Gesetze ausüben oder auszuüben streben. Den verschiedenen Zweigen der Physik der reellen Körper entsprechen besondere Zweige der abstracten Mechanik, welche sich auf neue Hypothesen stützen, die man so wählt, dass eine Behandlung nach mathematischen Methoden ermöglicht wird, und dass man daraus Resultate herleiten kann, welche den darzustellenden Erscheinungen möglichst nahe kommen.

Es ist für diese rationellen und abstracten Wissenschaften von wesentlicher Bedeutung, dass man die Hypothesen, an und für sich, — welche a priori wesentlich willkürlich gewählt werden können und nur der Bedingung unterworfen sind, sich einander nicht zu widersprechen, — unterscheidet von dem Werte der Hypothesen, unter dem Gesichtspunkte ihrer Anwendungen. Jede abstracte Wissenschaft, welche auf widerspruchslose Hypothesen gegründet und in Uebereinstimmung mit den Regeln der Logik entwickelt ist, ist in sich absolut wahr. Aber sie kann sehr wohl keine Beziehung zu den natürlichen Erscheinungen haben und sich als falsch erweisen, wenn man sie unter dem Gesichtspunkte ihrer physikalischen Wahrheit prüft. Dieses wird eintreten, wenn die Hypothesen irrtümlich oder unvollständig gewählt worden sind, sei es in Folge einer Induction, die auf zu ungenaue oder zu beschränkte Beobachtungen gegründet wurde, sei es in Folge unerlaubter Vereinfachungen, die man gemacht hat, um die mathematische Behandlung der Erscheinungen zu erleichtern.

Wir wollen uns nicht länger bei diesen allgemeinen Betrachtungen aufhalten und uns darauf beschränken, deren Anwendungen auf die einfachste der physikalischen Wissenschaften: auf das Studium der Körper hinsichtlich der Ausdehnung, d. h. auf die Geometrie zu entwickeln.

IV.

Hinsichtlich der Ausdehnung unterscheidet sich ein Körper vom andern nur durch seine Grenzen. Das Studium der Ausdehnung wird sich also ausschliesslich auf die Grenzen der Körper richten müssen. Zwei Körper, welche dieselben Grenzen haben, sind, vom geometrischen Gesichtspunkt aus, identisch.

Ebenso wie man die Form eines materiellen Körpers erkennen würde, wenn man die Hülle, die ihn umfasst, davon losmachen könnte, ohne ihn umzugestalten, so wird man den idealen Körper als von einer Hülle ohne Dicke umgeben und die Materie des Körpers von dieser Hülle losgelöst oder als nicht vorhanden annehmen. Diese Hülle oder Oberfläche ist es, welche, im eigentlichen Sinne des Wortes, den geometrischen Körper bildet. Aehnlich wird das Studium eines Bestandteils der Oberfläche sich zurückführen lassen auf das Studium der Grenzen ihrer Teile, oder der Linien, und das Studium der Linien auf das ihrer Grenzen, d. h. der Punkte.

Die Geometrie ist vor Allem auf die Hypothese von der Existenz eines unbeweglichen und unbegrenzten Raumes gegründet, in welchem man einen Ort, den ein Körper in einem gegebenen Zeitmoment einnimmt, eindeutig bestimmen kann, und in welchem die geometrischen Körper sich fortbewegen lassen, ohne irgend eine von den Eigenschaften, welche dem physikalischen Begriffe der Festigkeit entsprechen, zu verlieren. Man nimmt an, dass zwei feste Körper, welche, ein jeder für sich, mit einem dritten zusammenfallen können, auch miteinander zusammenfallen können, in welchen Teil des Raumes man auch den einen oder den andern versetzt.

Die Eigenschaft der Unveränderlichkeit der Figuren, welche wir zum Anfangspunkt genommen haben, kann, ebenso wenig wie die der Unbeweglichkeit des Raumes, eine strenge Definition zulassen. Wir können, in der Tat, nur relative Aenderungen der Figur und relative Fortbewegungen wahrnehmen. Alles was wir in Bezug auf die absolute Identität eines Ortes und einer Form behaupten, ist einzig auf die Identität unserer sinnlichen Wahrnehmungen gegründet. Die Hypothese von der Unveränderlichkeit der Figur kann folglich nicht auf Erfahrungen beruhen, die uns befähigen, der Wirklichkeit unendlich nahe zu kommen, und die eine objective Gewissheit bieten. Wir nehmen diese Hypothese an, weil sie uns mit unsern physiologischen Eindrücken übereinstimmend erscheint, und weil sie auf die einfachste Weise die Erscheinungen erklärt, welche auf unsre Sinne einwirken.

Diese Hypothese brauchtnicht von vorn herein in ihrem vollen Umfang angenommen zu werden, und das Studium der Geometrie zeigt, dass ihr voller Inbegriff sich als eine Folge aus gewissen passend gewählten besonderen Fällen ergibt.

Wird der Begriff der Unveränderlichkeit der Form zugestanden, so gibt uns die Erfahrung selbst den Begriff der Möglichkeit der Verschiebung eines unveränderlichen Körpers im Raume, wie wir ihn kennen, an die Hand; ebenso wie eine ebene oder sphärische Figur

in der Ebene, resp. auf der Kugel verschoben werden kann ohne ihre Form zu ändern. Aber es wäre nicht unsinnig, a priori die Existenz eines Raumes anzunehmen, in welchem diese Verschiebung ohne eine mehr oder minder bedeutende Umgestaltung unmöglich wäre, geradeso wie es mit einer Figur der Fall ist, die auf einem Kegel oder auf einem Ellipsoid gezeichnet ist.

Ein anderer wesentlich experimenteller Begriff ist die Unterscheidung zwischen rechts und links, ohne welche es unmöglich wäre, unabhängig von einander die eine oder die andere der beiden Drehungen zu bestimmen, welche in entgegengesetztem Sinne um eine feste Axe möglich sind. Dieser Begriff lässt sich nur durch Bezugnahme auf unsern eignen Körper klar angeben.

Ferner lehrt uns die Erfahrung, dass ein materieller Körper, der nur in einem einzigen seiner Punkte befestigt ist, unendlich viele verschiedene Stellungen annehmen kann.

Dasselbe gilt auch für einen Körper, der in zwei Punkten fest ist; nur ist die Freiheit der Bewegung in diesem Falle eine beschränktere.

Ferner lässt sich feststellen, dass wenn ein Körper um zwei seiner Punkte rotirt, es ausser diesen beiden Punkten noch eine stetige Folge anderer, der Zahl nach unendlich vieler Punkte gibt, welche während der Bewegung des Körpers unbeweglich bleiben. Diese Folge von Punkten dehnt sich nicht nur von dem einen festen Punkt zum andern aus, sondern auch noch darüber hinaus, in zwei verschiedenen Richtungen, wie weit der Körper auch ausgedehnt sei. Sie bildet eine Linie, welche sich nach beiden Seiten in's Unendliche erstreckt, und gerade Linie heisst. Denken wir uns die gerade Linie auf diese Weise entstanden, so folgt, dass zwei gerade Linien, welche zwei Punkte gemein haben, längs ihrer ganzen Ausdehnung zusammenfallen. Mit andern Worten: durch zwei gegebene Punkte kann man immer nur eine einzige gerade Linie ziehen *).

Fixirt man endlich drei Punkte eines Körpers, so hört der Körper auf, beweglich zu sein, vorausgesetzt, dass diese drei Punkte nicht in einer geraden Linie liegen.

---

*) Lobatchefsky und Bolyai haben versucht, dieses Axiom von der geraden Linie zu machen. Sie bewiesen mit Hülfe der intuitiven Eigenschaften der Kugel die Existenz der Ebene, und folgerten daraus die der geraden Linie. Ihr Beweis hat jedoch einige dunkle Punkte, die noch nicht vollständig aufgeklärt sind. (Die betr. Literatur ist angegeben von Herrn F. Klein in einem Aufsatze: Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Math. Ann. IV, p. 573 sq. D. Ü.).

Aus der Erfahrung wissen wir, dass es eine Fläche gibt, welche durch Umklappen auf sich selbst zu liegen kommt, welche also eine gerade Linie, mit der sie 2 Punkte gemeinsam hat, ganz und gar enthält *). Diese Fläche ist die Ebene.

Dieses sind die fundamentalen Hypothesen, auf welche die ersten 28 Sätze Euklid's sich stützen, und welche zum Beweise für die Existenz der Parallelen führen. Man könnte das Studium der Geometrie verfolgen, ohne eine neue Hypothese zuzulassen; und die Arbeiten von Lobatchefsky und J. Bolyai haben gezeigt, dass die obigen Hypothesen ganz allein genügen, eine vollsändige Geometrie aufzubauen, welche diejenige als besonderen Fall umfasst, die uns die Erfahrung als die mit den wirklichen Eigenschaften der Ausdehnung am meisten übereinstimmende zeigt.

Diese allgemeine Geometrie kann bis an's Ende entwickelt werden, ohne dass uns etwas zwingt, einem gewissen Parameter, d. h. einer in den meisten Massbestimmungen vorkommenden Constante, einen bestimmten Wert beizulegen. Sie ist, ganz unabhängig von dieser Bestimmung, absolut wahr; und wenn uns die Erfahrung einen Raum lieferte, in welchem die fundamentalen Massbestimmungen für einen andern Wert dieses Parameters ausser Null bewahrheitet würden, so wären für diesen Raum alle erhaltenen Folgerungen richtig. So hat Herr Beltrami gezeigt, dass die ebene Geometrie von Lobatchefsky und Bolyai ihre volle Verwirklichung findet auf den Oberflächen mit constanter negativer Krümmung **).

Um aber eine mit der Erfahrung möglichst vollständige Uebereinstimmung zu erhalten, ist man darauf geführt, unter allen Werten, welche der in Frage stehende Parameter ***) annehmen kann, den Wert Null zu wählen, der sich zugleich als derjenige ergibt, welcher dem einfachsten und am leichtesten zu behandelnden Falle entspricht. Man

---

*) Man hat einen Beweis für diese Eigenschaft gegeben, indem man von der Definition einer Ebene als Ort einer Geraden, die auf den beiden Schenkeln eines Winkels gleitet, ausging. Siehe V. Valeriani, Giornale di Matematiche. t. VII, p. 376.

**) Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea. Giornale di Matematiche VI, p. 285.

***) Dieser Parameter kann nicht allein negative Werte annehmen, welche der Geometrie von Lobatchefsky oder der hyperbolischen Geometrie, wie man sie in letzter Zeit genannt hat, (Siehe Klein, Math. Ann. t. IV, p. 577) entsprechen würden, sondern auch positive Werte, wie in der elliptischen Geometrie, wo die Linien kürzesten Abstandes sich in mehr als einem Punkte treffen können.



erhält auf diese Weise die euklidische oder die gewöhnliche Geometrie. Diese Wahl des Parameters entspricht, in ihrer elementaren Form, der Hypothese einer einzigen Richtung für den Parallelismus.

Bis zu welchem Punkte war diese Wahl durch die Erfahrung bedingt? Das wusste man vor den neueren Untersuchungen von Legendre und Lobatchefsky nicht mit Bestimmtheit. Man wusste bereits, dass die schärfsten Beobachtungen bisher keine Differenz mit der euklidischen Geometrie ergeben hatten. Aber erst diese beiden Geometer bewiesen, dass wenn die Uebereinstimmung für Figuren von grossen Dimensionen stattfindet, sie umsomehr für Figuren kleinerer Dimensionen stattfinden muss, und ihre Schlüsse haben der experimentellen Verification der euklidischen Hypothese einen Wert und eine Bedeutung gegeben, die unvergleichlich höher sind als das, was man Analoges für die anderen physikalischen Wissenschaften erhalten kann.

So konnte, wie man weiss, die Erfahrung zu den ersten Erfindern der Geometrie nicht sprechen. Sie stützen sich, ebenso wie heut noch sehr viele moderne Mathematiker, bei ihren Beweisen auf Evidenz-Gründe, auf Anschauungs-Gründe, um Schlüsse zu umgehen. Sie vermehren lieber die Zahl der Axiome und vermeiden die Prüfung des Axioms, weil es „evident“ ist. Die euklidische Hypothese ist zu dem geworden, was man Evidenz (Anschauung) nennt; sie ist berechtigt, den beiden Hülfsmitteln des Erkennens, der Erfahrung und der logischen Behandlung, als vermittelndes Dritte beizutreten, und an der Fruchtbarkeit der einen wie an der Sicherheit der andern Teil zu nehmen. Für uns ist die Anschauung nichts anderes als eine Erfahrung, die so oft wiederholt ist, dass die Macht der Gewohnheit uns das Bewusstsein davon geraubt hat, und deren Resultate, durch das Gedächtniss bewahrt, uns jedesmal, wenn wir darauf zurückkommen wollen, einer tatsächlichen Reproduction überheben. Es ist uns unmöglich, ihre Wesenheit zuzugeben, da es so bequem ist, sich auf sie zu berufen, wenn die sicheren Gründe fehlen.

Man hat bemerkt, indem man teils nach einer geometrischen Construction, teils nach den Angaben eines geübten Auges urteilt, dass wenn man eine zu einer Geraden parallele Linie um einen ihrer Punkte noch so wenig dreht, ein Treffen beider Linien stattfindet. Das hat genügt, diese Tatsache unter die Principien aufnehmen zu lassen, und man hat sie daselbst behalten, weil alle ihre Folgerungen sich jederzeit in Uebereinstimmung gezeigt haben mit den verschiedensten Erfahrungen des Lebens und mit den genauesten wissenschaftlichen Messungen.

Somit scheint uns festgestellt zu sein, dass die Geometrie, wie

die Mechanik, die Optik, die Theorie der Wärme und der Electricität aus zwei Teilen besteht: 1) aus einem physikalischen Teile, der zwar beschränkter ist als in den übrigen Wissenschaften, in den aber die fundamentalen Hypothesen über die Eigenschaften des Raumes gehören; er umfasst zugleich die Anwendungen dieser Wissenschaft auf das Studium der Natur, auf praktische Astronomie, Geodäsie, Topographie etc.; 2) aus einem theoretischen und abstracten Teile, der die Hypothesen, die der physikalische Teil geliefert hat, welcher Art sie auch immer seien, in's Werk setzt; er allein hat Anspruch auf den Namen „exacte Wissenschaft". Diesem Teile allein kommt die mathematische Gewissheit zu, die sich nur auf die Uebereinstimmung der Hypothesen mit ihren Folgerungen, und keineswegs auf den Wert der Hypothesen selbst bezieht. Die Prüfung der Hypothesen gehört ausschliesslich dem physikalischen Teile an, den dieselben in die exacte Wissenschaft einzuführen und dann ihre Richtigkeit, sei es direct, sei es nach ihren Folgerungen, zu ermessen hat.

VII.

Der Körperinhalt des senkrechten Cylinders und Kegels in der absoluten Geometrie.

Von

Herrn *A. v. Frank*,
Professor an der Gewerbeschule in Graz.

Das Verfahren in der absoluten Geometrie: den Rauminhalt eines Körpers zu finden, ist demjenigen ganz ähnlich, welches in der analytischen euklidischen Geometrie eingeschlagen wird; nur mit dem Unterschiede, dass die unendlich nahen parallelen Ebenen die das Körperelement begrenzen, in der absoluten Geometrie in Flächen gleichen Abstandes übergehen.

Um die hier notwendigen Flächenbestimmungen vornehmen zu können, muss man sich erinnern: dass der Flächenraum irgend einer, in der Fläche gleichen Abstandes $= h$ liegenden Figur, zu dem Flächenraume der Projection derselben auf die zugehörige Ebene ein constantes Verhältniss besitzt, welches, wenn wir mit f' den Flächenraum der Figur, mit f jenen der Projection bezeichnen, durch die Gleichung

$$f' = f\left(\frac{e^{\frac{h}{k}} + e^{-\frac{h}{k}}}{2}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1)$$

ausgedrückt ist*).

---

*) pag. 76. Ark. 64. der abs. Geom. v. Frischauf.

Bei der vorliegenden Aufgabe werden wir beide Körper von kreisförmigem Querschnitt voraussetzen; der Flächenraum eines Kreises vom Halbmesser $= r$ ist aber nach Art. 59 des angeführten Werkes gleich

$$\pi k^2\left(e^{\frac{r}{k}}+e^{-\frac{r}{k}}-2\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2)$$

und auf Grundlage dieser und der Formel 1) wollen wir die Lösung der Aufgabe bewerkstelligen.

I. Cylinderinhalt.

Den Cylinder denken wir uns nach oben von einer zur ebenen Basis zugehörigen Fläche gleichen Abstandes $= h$ begrenzt. Die den Cylinder erzeugende Gerade steht in jedem Augenblick senkrecht auf der Basis, daher, wenn wir im Abstande x und $x+dx$ von denselben Flächen gleichen Abstandes legen, wir Querschnittsfiguren erhalten, deren Projection stets der Basiskreis ist. Bezeichnen wir mit r den Halbmesser der Basis, mit f' die Fläche der Querschnittsfigur, endlich mit dp das zwischen den Flächen gleichen Abstandes enthaltene Körperelement, so haben wir sofort

$$dp = f'dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3)$$

Der Flächenraum der kreisförmigen Basis ist nach 2)

$$\pi k^2\left(e^{\frac{r}{k}}+e^{-\frac{r}{k}}-2\right)$$

nach 1) ist aber:

$$f' = \pi k^2\left(e^{\frac{r}{k}}+e^{-\frac{r}{k}}-2\right)\left(\frac{e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}}{2}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots 4)$$

daher:

$$dp = \pi k^2\left(e^{\frac{r}{k}}+e^{-\frac{r}{k}}-2\right)\left(\frac{e^{\frac{x}{k}}+e^{-\frac{x}{k}}}{2}\right)^2 dx.$$

Die Integration zwischen den Grenzen 0 und h giebt sofort als Cylinderinhalt:

$$p = \frac{\pi k^3}{4}\left(e^{\frac{r}{k}}+e^{-\frac{r}{k}}-2\right)\left(e^{\frac{2h}{k}}-e^{-\frac{2h}{k}}+\frac{2h}{k}\right) \quad \ldots\ldots (\mathrm{I})$$

Durch Einführung der hyperbolischen Functionen erhält man etwas compendiösere Formeln.

Es wird dann:

$$p = \frac{\pi k^3}{4}\left(2\,\mathfrak{Cos}\,\frac{r}{k}-2\right)\left(2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{2h}{k}+\frac{2h}{k}\right)$$

oder auch:

$$p = \pi k^3\left(\mathfrak{Cos}\,\frac{r}{k}-1\right)\left(\mathfrak{Sin}\,\frac{2h}{k}+\frac{h}{k}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (\mathrm{I'})$$

II. Kegelinhalt.

Auf dieselbe Weise wie beim Cylinder zerlegen wir den senkrechten Kegel durch unendlich nahe der ebenen Basis zugehörige Flächen gleichen Abstandes in Elemente, deren Querschnittsprojectionen sämmtlich Kreise sein werden.

Nehmen wir ein solches Element dp, welches sich im Abstande x von der Basis befindet; bezeichnen wir wieder mit f' die Fläche des Querschnittes, mit f jene seiner Projection, so haben wir wie früher

$$dp = f'dx$$

und:

$$f' = f\left(\frac{e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}}{2}\right)^2$$

Ferner sei r der Halbmesser der Kegelbasis, h die Höhe des Kegels; z bezeichne den Halbmesser der Querschnitts-Projection, so ist unter gleichzeitiger Einführung der hyperbolischen Functionen:

$$f = 2\pi k^2 \left(\mathfrak{Cos}\,\frac{z}{k} - 1\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots 5)$$

und

$$dp = 2\pi k^2 \left(\mathfrak{Cos}\,\frac{z}{k} - 1\right) \mathfrak{Cos}^2 \frac{x}{k}\,dx \quad \ldots \ldots \ldots 6)$$

Nennen wir endlich α den Winkel, welchen die Erzeugende mit der Basis einschliesst, und die Differenz $r - z = \varrho$, so haben wir zunächst:

$$\sin\alpha = \frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{h}{k}}{\sqrt{\mathfrak{Cos}^2 \frac{r}{k}\,\mathfrak{Cos}^2 \frac{h}{k} - 1}} \quad \ldots \ldots \ldots 7)$$

Nach Auflösung des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten x und ϱ, und dem bekannten der Kathete x gegenüber liegenden Winkel α, und Benutzung des Wertes 7) erhält man:

$$\mathfrak{Cos}\,\frac{\varrho}{k} = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\frac{x}{k}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{h}{k}} \sqrt{\mathfrak{Sin}^2 \frac{x}{k}\left(\mathfrak{Cos}^2 \frac{r}{k}\,\mathfrak{Cos}^2 \frac{h}{k} - 1\right) + \mathfrak{Sin}^2 \frac{h}{k}} \quad \ldots 8)$$

weil aber:

$$z = r - \varrho$$

also auch:

$$\mathfrak{Cos}\,\frac{z}{k} = \mathfrak{Cos}\,\frac{r - \varrho}{k}$$

ist, so wird aus Formel 6) folgender Ausdruck:

$$dp = 2\pi k^2 \left(\operatorname{Cos}\frac{r-\varrho}{k} - 1\right) \operatorname{Cos}^2 \frac{x}{k} dx \quad \ldots\ldots \quad 9)$$

Nun ist aber:

$$\operatorname{Cos}\frac{r-\varrho}{k} = \operatorname{Cos}\frac{r}{k}\operatorname{Cos}\frac{\varrho}{k} - \operatorname{Sin}\frac{r}{k}\operatorname{Sin}\frac{\varrho}{k} \quad \ldots\ldots \quad 10)$$

Zur Vereinfachung führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Cos}^2\frac{r}{k}\operatorname{Cos}^2\frac{h}{k} - 1 &= a \\ \operatorname{Sin}\frac{h}{k} &= b \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

Durch Benutzung dieser Schreibkürzung, und unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Werte 8) und 10) erhalten wir Gleichung 9) in folgender Form:

$$dp = 2\pi k^2 \left[\frac{\operatorname{Cos}\frac{r}{k}}{b} \operatorname{Cos}\frac{x}{k} \sqrt{a\operatorname{Sin}^2\frac{x}{k} + b^2} \right.$$
$$\left. - \frac{\operatorname{Sin}\frac{r}{k}}{b} \operatorname{Cos}\frac{x}{k} \sqrt{a-b^2} \,.\, \operatorname{Sin}\frac{x}{k} - \operatorname{Cos}^2\frac{x}{k}\right] dx$$

Durch die Integration des vorstehenden Ausdruckes zwischen den Grenzen 0 und h, wird der Körperinhalt des Kegels gefunden; zeigen wir vorläufig diese Integration nur an, so haben wir:

$$p = \frac{2\pi k^3}{b}\left\{\operatorname{Cos}\frac{r}{k}\int_0^h \operatorname{Cos}\frac{x}{k} \cdot \frac{dx}{k}\sqrt{a\operatorname{Sin}^2\frac{x}{k} + b^2}\right.$$
$$\left. - \operatorname{Sin}\frac{r}{k}\sqrt{a-b^2}\int_0^h \operatorname{Sin}\frac{x}{k}\operatorname{Cos}\frac{x}{k}\frac{dx}{k} - b\int_0^h \operatorname{Cos}^2\frac{x}{k}\frac{dx}{k}\right\}$$

Die Auswertung dieser 3 Integrale ist nun sehr einfach; man erhält nach einigen Reductionen, und weil

$$\sqrt{a-b^2} = \operatorname{Cos}\frac{h}{k}\operatorname{Sin}\frac{r}{k}$$

ist, den Wert:

$$p=\frac{2\pi k^3}{b}\left\{\frac{\mathrm{Cos}\frac{r}{k}\,\mathrm{Sin}\frac{x}{k}}{2}\sqrt{a\,\mathrm{Sin}^2\frac{x}{k}+b^2}\right.$$

$$+\frac{b^2\,\mathrm{Cos}\frac{r}{k}}{2\sqrt{a}}\log\left(\sqrt{a}\,\mathrm{Sin}\frac{x}{k}+\sqrt{a\,\mathrm{Sin}^2\frac{x}{k}+b^2}\right)-\tfrac{1}{2}\mathrm{Sin}^2\frac{r}{k}\,\mathrm{Cos}\frac{h}{k}\,\mathrm{Sin}^2\frac{x}{k}$$

$$\left.-\frac{b}{2}\left(\mathrm{Cos}\frac{x}{k}\,\mathrm{Sin}\frac{x}{k}+\log\left(\mathrm{Cos}\frac{x}{k}+\mathrm{Sin}\frac{x}{k}\right)\right)\right\}_0^h \quad \ldots\ldots 12)$$

welcher Ausdruck noch zwischen den Grenzen 0 und h zu nehmen ist.

Weil nun:

$$\mathrm{Cos}\frac{x}{k}+\mathrm{Sin}\frac{x}{k}=e^{\frac{x}{k}}$$

ist, so wird

$$\log\left(\mathrm{Cos}\frac{x}{k}+\mathrm{Sin}\frac{x}{k}\right)=\log e^{\frac{x}{k}}=\frac{x}{k} \quad \ldots\ldots\ldots 13)$$

Die Einführung der Grenzen liefert daher den Ausdruck:

$$p=\frac{\pi k^3}{b}\left(\mathrm{Cos}\frac{r}{k}\,\mathrm{Sin}^2\frac{h}{k}\sqrt{a+1}+\frac{\mathrm{Sin}^2\frac{h}{k}\,\mathrm{Cos}\frac{r}{k}}{\sqrt{a}}\log(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})\right.$$

$$\left.-\mathrm{Sin}^2\frac{r}{k}\,\mathrm{Sin}^2\frac{h}{k}\,\mathrm{Cos}\frac{h}{k}-\mathrm{Sin}^2\frac{h}{k}\,\mathrm{Cos}\frac{h}{k}-\mathrm{Sin}\frac{h}{k}\cdot\frac{h}{k}\right) \quad \ldots 14)$$

Nach einigen leicht zu übersehenden Kürzungen und Berücksichtigung, dass die Länge s der Seite des Kegels durch die Gleichung:

$$\mathrm{Cos}\frac{s}{k}=\mathrm{Cos}\frac{h}{k}\,\mathrm{Cos}\frac{r}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 15)$$

gegeben ist, erhalten wir endlich:

$$p=\pi k^2\left(\mathrm{Tg}\frac{h}{k}\,\mathrm{Cotg}\frac{s}{k}\,.\,s-h\right) \quad \ldots\ldots\ldots (II)$$

als den Kegelinhalt in der absoluten Geometrie.

Wollte man statt der Seite s den Radius der Basis einführen, so hätte man:

$$p=\pi k^3\left\{\frac{\mathrm{Sin}\frac{h}{k}\,\mathrm{Cos}\frac{r}{k}}{\sqrt{\mathrm{Cos}^2\frac{r}{k}\,\mathrm{Cos}^2\frac{h}{k}-1}}\log\left(\sqrt{\mathrm{Cos}^2\frac{r}{k}\,\mathrm{Cos}^2\frac{h}{k}-1}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\mathrm{Cos}\frac{r}{k}\,\mathrm{Cos}\frac{s}{k}\right)-\frac{h}{k}\right\} \quad \ldots (II')$$

Um zu zeigen wie man aus den Formeln der absoluten Geometrie jene der euklidischen erhält, wollen wir in Gleichung (II) für die Charakteristik des Raumes k, den die euklidische Geometrie specialisirenden Wert

$$k = \text{unendlich gross}$$

einführen, müssen jedoch vorher die hyperbolischen Functionen in Reihen entwickeln. Es ist bekanntlich:

$$\mathfrak{Sin}\,\alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + \dots$$

$$\mathfrak{Cos}\,\alpha = 1 + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \dots$$

Gleichung (II) wird mit diesen Werten:

$$p = \pi k^2 \left[\frac{\left(\frac{h}{k} + \frac{h^3}{3!\,k^3} + \dots\right)\left(1 + \frac{s^2}{2!\,k^2} + \dots\right) s}{\left(1 + \frac{h^2}{2!\,k^2} + \dots\right)\left(\frac{s}{k} + \frac{s^3}{3!\,k^3} + \dots\right)} - h \right]$$

Kürzt man durch s und k ab und hebt h heraus, wobei man zugleich auch gleichen Nenner stellt, so kommt:

$$p = \pi k^2 h \frac{\left(1+\frac{h^2}{3!k^2}+\dots\right)\left(1+\frac{s^2}{2!k^2}+\dots\right) - \left(1+\frac{h^2}{2!k^2}+\dots\right)\left(1+\frac{s^2}{3!k^2}+\dots\right)}{\left(1+\frac{h^2}{2!k^2}+\dots\right)\left(1+\frac{s^2}{3!k^2}+\dots\right)}$$

wenn man mit k^2 im Zähler hinein multiplicirt, so hat man:

$$p = \pi h \frac{\left(k^2+\frac{h^2}{3!}+\dots\right)\left(1+\frac{s^2}{2!k^2}+\dots\right) - \left(k^2+\frac{h^2}{2!}+\dots\right)\left(1+\frac{s^2}{3!k^2}\right)}{\left(1+\frac{h^2}{2!k^2}+\dots\right)\left(1+\frac{s^2}{3!k^2}+\dots\right)}$$

oder auch:

$$p = \pi h \frac{k^2 + \frac{s^2}{2!} + \dots + \frac{h^2}{3!} + \frac{h^2 . s^2}{2!\,3!\,k^2} + \dots - k^2 - \frac{s^2}{3!} - \frac{h^2}{2!} - \frac{h^2 s^2}{2!3!k^2}}{\left(1 + \frac{h^2}{2!k^2} + \dots -\right)\left(1 + \frac{s^2}{3!k^2} + \dots\right)}$$

Führt man die hier angezeigten Operationen aus und bemerkt zugleich, das für $k = \infty$ der Nenner gleich 1 wird, im Zähler alle Glieder verschieden, welche k enthalten, so erhält man:

$$p = \frac{\pi h}{3}(s^2 - h^2)$$

nun ist aber:

$$s^2 - h^2 = r^2$$

daher:

$$p = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

die bekannte Formel für den Cubikinhalt des senkrechten Kegels in der euklidischen Geometrie.

Die Gleichung (II) lässt sich noch in einer anderen Form darstellen.

Der Neigungswinkel α, welchen die Erzeugende mit der Basis einschliesst, war nach Gleichung 7)

$$\sin\alpha = \frac{\mathfrak{Sin}\frac{h}{k}}{\sqrt{\mathfrak{Cos}^2\frac{r}{k}\mathfrak{Cos}^2\frac{h}{k} - 1}}$$

Nun ist aber:

$$\mathfrak{Sin}\frac{s}{k} = \sqrt{\mathfrak{Cos}^2\frac{r}{k}\mathfrak{Cos}^2\frac{h}{k} - 1}$$

daher:

$$\sin\alpha = \frac{\mathfrak{Sin}\frac{h}{k}}{\mathfrak{Sin}\frac{s}{k}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 16)$$

Bezeichnen wir endlich mit φ den halben Winkel an der Spitze des Kegels, so ist:

$$\cos\varphi = \sin\alpha . \mathfrak{Cos}\frac{r}{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 17)$$

Die Werte 16) und 17) eingesetzt bringen die Gleichung (II) auf die Form:

$$p = \pi k^2(s\cos\varphi - h) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II')}$$

welcher Ausdruck dadurch bemerkenswert ist, dass derselbe keine hyperbolischen Functionen enthält.

VIII.

Bemerkung über Symmetriekegelschnitte des Dreiecks.

Von

Emil Hain.

I.

Ist x_a der Abstand eines Punktes X von der Seite BC des Dreiecks ABC; so ist X ein Symmetriepunkt dieses Dreiecks, wenn x_a eine nach b und c symmetrische Function der Seiten a, b, c ist und x_b, x_c durch cyklische Vertauschung aus x_a erhalten werden.

Liegt irgend eine Reihe von Punkten X so, dass die Normalen derselben der Relation:

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

Genüge leisten, wo $a_1 b_1 c_1$ constant sind, so liegen die Punkte X auf einer Geraden. Sie heisst eine Symmetriegerade des Dreiecks, wenn a_1 eine nach b und c symmetrische Function der abc ist und b_1, c_1 durch cyklische Vertauschung aus a_1 erhalten werden.

Liegt hingegen eine Reihe von Punkten X so, dass man hat:

$$g_{aa} x_a^2 + g_{bb} x_b^2 + g_{cc} x_c^2 + 2 g_{bc} x_b x_c + 2 g_{ca} x_c x_a + 2 g_{ab} x_a x_b = 0$$

wo die g_{aa} und g_{bc} constant sind; so liegen die Punkte X im Allgemeinen auf einem Kegelschnitt. Er heisst ein Symmetriekegelschnitt des Dreiecks, wenn g_{aa} und g_{bc} nach b und c symmetrische Functionen der abc sind und durch cyklische Vertauschung aus einander erhalten werden.

Ist der Punkt X, dessen Normalen $p_a p_b p_c$ sind, ein Symmetriepunkt; so nennen wir ihn den Symmetriepunkt p_a. Ebenso heisst die Symmetriegerade, deren Gleichung:

$$a_1 x_a + b_1 x_b + c_1 x_c = 0$$

die Symmetriegerade a_1. Den Symmetriekegelschnitt:

$$\Sigma g_{aa} x_a^2 + 2 \Sigma g_{bc} x_b x_c = 0$$

wollen wir mit (g_{aa}, g_{bc}) bezeichnen. So ist z. B. der Schwerpunkt des Dreiecks ABC der Symmetriepunkt bc. Die Gerade, welche den Schwerpunkt mit dem Inkreiscentrum verbindet, ist die Symmetriegerade $a(b-c)$. Für jeden Punkt des Umkreises gilt die Relation:

$$a x_b x_c + b x_c x_a + c x_a x_b = 0$$

Hier ist $g_{aa} = 0$, $g_{bc} = a$. Der Umkreis ist also der Symmetriekegelschnitt: $(0, a)$.

II.

Jeder durch die Ecken des Dreiecks gehende Symmetriekegelschnitt hat die Form: $(0, g_{bc})$.

Es ist $A \equiv 1, 0, 0$. Setzt man diese Werte in die allgemeine Gleichung ein, so wird:

$$x_b^2 = x_c^2 = x_b x_c = x_c x_a = x_a x_b = 0$$

$$\Sigma g_{aa} x_a^2 + 2 \Sigma g_{bc} x_b x_c = g_{aa} = 0$$

Es verschwinden also die Coefficienten der x_a^2 und man erhält als Gleichung eines dem Dreieck umschriebenen Kegelschnittes:

$$\Sigma g_{bc} x_b x_c = 0$$

Sind die Seiten des Dreiecks nicht Sehnen des Kegelschnitts, sondern in Bezug auf diesen Polaren ihrer Gegenecken; so ist die Form des Kegelschnitts: $(g_{aa}, 0)$.

Es hat die Polare eines Punktes ξ_a in Bezug auf den Kegelschnitt (g_{aa}, g_{bc}) die Form: $g_{aa}\xi_a + g_{ab}\xi_b + g_{ac}\xi_c$. Die Coefficienten der x_a in der Gleichung dieser Geraden werden durch cyklische Vertauschung der Indices erhalten, wobei zu bemerken ist, dass:

$$g_{ab} = g_{ba}, \quad g_{bc} = g_{cb}, \quad g_{ca} = g_{ac}$$

Soll nun BC die Polare von A sein, so kann man setzen:

$$BC \equiv \lambda_a, \quad 0, \quad 0$$

wo λ_a eine beliebige nach b und c symmetrische Function der Seiten a, b, c bezeichnet. Dann ist:

$$g_{aa}\xi_a + g_{ab}\xi_b + g_{ac}\xi_c = \lambda_a$$
$$g_{ba}\xi_a + g_{bb}\xi_b + g_{bc}\xi_c = 0$$
$$g_{ca}\xi_a + g_{cb}\xi_b + g_{cc}\xi_c = 0$$

Wegen $A \equiv 1, 0, 0$ **ist aber** $\xi_a = 1$, $\xi_b = \xi_c = 0$; **somit** $g_{aa} = \lambda_a$, $g_{ba} = g_{ca} = 0$. **Demnach ist die Form jedes dem Dreieck polar entsprechenden Kegelschnitts:** $(g_{aa}, 0)$.

III.

Sind P **und** Q **Symmetriepunkte des Dreiecks und treffen die Geraden** PA **und** QA **die** BC **in** P_a **und** Q_a, **so liegen die Punkte** $P_a Q_a$ **auf einem Symmetriekegelschnitt.**

Um mittelst dieses Satzes, der aus dem Carnot'schen Theorem hergeleitet werden kann und zuerst von Steiner aufgestellt wurde, die Gleichung dieses Kegelschnitts zu finden; setzen wir $P \equiv p_a$, $Q \equiv q_a$. Es ist dann:

$$P_a \equiv 0, \quad p_b, \quad p_c$$
$$Q_a \equiv 0, \quad q_b, \quad q_c$$

Nach Einführung dieser Werte in die allgemeine Form (g_{aa}, g_{bc}) erhalten wir:

$$g_{bb}p_b^2 + g_{cc}p_c^2 + 2g_{bc}p_b p_c = 0$$
$$g_{bb}q_b^2 + g_{cc}q_c^2 + 2g_{bc}q_b q_c = 0$$

woraus:

$$\frac{g_{bb}}{g_{bc}} = -\frac{2p_c q_c}{p_b q_c + p_c q_b} = -\frac{2p_c q_c p_a q_a}{p_a q_a(p_b q_c + p_c q_b)}$$

$$\frac{g_{cc}}{g_{bc}} = -\frac{2p_b q_b}{p_b q_c + p_c q_b} = -\frac{2p_a q_a p_b q_b}{p_a q_a(p_b q_c + p_c q_b)}$$

Diese Gleichungen berechtigen zur Annahme, dass:

$$g_{bb} = 2p_c q_c p_a q_a, \quad g_{cc} = 2p_a q_a p_b q_b, \quad g_{bc} = -p_a q_a(p_b q_c + p_c q_b)$$

Die Form des Symmetriekegelschnitts ist dann:

$$[2p_b q_b p_c q_c, \quad -p_a q_a(p_b q_c + p_c q_b)]$$

Ihre Richtigkeit wird durch Einsetzen der übrigen Werte für die Punkte $P_a Q_a$ bestätigt.

Es entspricht also jedem System zweier Symmetriepunkte des Dreiecks ein Symmetriekegelschnitt, welcher durch die Schnittpunkte der Ecktransversalen der beiden Punkte mit den Gegenseiten geht.

Dieser Kegelschnitt trifft die BC in den Punkten $P_a Q_a$. Ist die Distanz der beiden Punkte PQ sehr klein, so wird für den Grenzfall $PQ = 0$

$$2 p_b q_b p_c q_c = 2 p_b^2 p_c^2$$
$$p_a q_a (p_b q_c + p_c q_b) = 2 p_a^2 p_b p_c$$

Der Kegelschnitt hat dann die Form: $(p_b^2 p_c^2, \quad -p_a^2 p_b p_c)$ und berührt in den P_a die Seiten des Dreiecks; sein Centrum ist der Symmetriepunkt: $p_a(b p_b + c p_c)$.

Ist $P \equiv bc$ der Schwerpunkt des Dreiecks, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse. Sie berührt die Seiten in den Mitten, ihr Centrum ist der Schwerpunkt, ihre Form: $(a^2, \quad -bc)$.

Ist $P \equiv bc(s-b)(s-c)$, wo $2s = a + b + c$, so ist: $P_a C = s - c$, $P_a B = s - b$. Die P_a sind also die Berührungspunkte des Inkreises. Er ist somit der Symmetriekegelschnitt:

$$[a^2(s-a)^2, \quad -bc(s-b)(s-c)].$$

Wien, November 1875.

IX.

Beziehungen eines Dreiecks zu einer Geraden.

Von

Emil Hain.

I.

Trifft eine Gerade die Seiten BC des Dreiecks ABC in A', so bilden die Geraden AA' ein Dreieck, dessen Flächeninhalt gegeben ist durch den Ausdruck:

$$\frac{4F\Pi aa_1^2}{\Pi(bc_1a_1+ca_1b_1-ab_1c_1)}$$

wo $abcF$ Seiten und Fläche des Urdreiecks bezeichnen, und

$$a_1x_a+b_1x_b+c_1x_c=0$$

die Gleichung der Geraden $A'B'C'$ in trimetrischen Punktcoordinaten ist, das Dreieck ABC zum Fundamentaldreieck gewält.

Man findet zunächst:

$$\begin{aligned} AA' &\equiv 0 \quad b_1 \quad c_1 \\ BB' &\equiv a_1 \quad 0 \quad c_1 \\ CC' &\equiv a_1 \quad b_1 \quad 0. \end{aligned}$$

Das von drei Geraden

$$\Sigma a_1x_a=\Sigma a_2x_a=\Sigma a_3x_a=0$$

gebildete Dreieck hat zum Flächeninhalt Φ den Ausdruck:

$$\Phi=\frac{abcF\Delta^2}{\Delta_a\Delta_b\Delta_c}$$

wo Δ, Δ_a aus a und a_1 gebildete Determinanten sind. Und zwar ist hier:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ a_1 & 0 & c_1 \\ a_1 & b_1 & 0 \end{vmatrix} = 2a_1b_1c_1$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_1 & b_1 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = bc_1b_1 + ca_1b_1 - ab_1c_1.$$

Somit ist:

$$\Phi = \frac{4F\Pi aa_1^2}{\Pi(bc_1a_1 + ca_1b_1 - ab_1c_1)}.$$

Setzen wir $a_1 = b_1 = c_1$, so sind die AA' die äusseren Winkelhalbirenden; für sie wird:

$$\Phi = \frac{4abcF}{\Pi(b+c-a)} = \frac{abc(a+b+c)}{4F} = 2rs$$

(Archiv LVIII. 91.).

Für $A_1 = a$ ist $\Phi = 4F$, wie es auch sein muss, da in diesem Fall die AA' parallel den BC sind.

II.

Trifft eine Gerade die Seiten BC des Dreiecks ABC in A', so liegen die Mitten der AA' in einer Geraden.

Die Coordinaten von A und A' sind:

$$A \equiv 1 \quad 0 \quad 0$$
$$A' \equiv 0 \quad c_1 \quad -b_1$$

wo die a_1 dieselbe Bedeutung wie im Vorigen haben.

Die Normalen auf die Seiten des Dreiecks sind dann für dieselben Punkte und für A'' als Mitte von AA':

$$A \equiv \frac{2F}{a} \qquad 0 \qquad 0$$

$$A' = 0 \qquad \frac{2Fc_1}{bc_1 - cb_1} \qquad \frac{-2Fb_1}{bc_1 - cb_1}$$

$$A'' \equiv \frac{F}{a} \qquad \frac{Fc_1}{bc_1 - cb_1} \qquad \frac{-Fb_1}{bc_1 - cb_1}$$

Die Coordinaten der A'' sind also:

$$\begin{array}{llll} A'' \equiv & bc_1 - cb_1 & ac_1 & -ab_1 \\ B'' \equiv & -bc_1 & ca_1 - ac_1 & ba_1 \\ C'' \equiv & cb_1 & -ca_1 & ab_1 - ba_1 \end{array}$$

Sonach ist $B''C'' \equiv$

$$\begin{vmatrix} ca_1 - ac_1 & ba_1 \\ -ca_1 & ab_1 - ba_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ba_1 & -bc_1 \\ ab_1 - ba_1 & cb_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -bc_1 & ca_1 - ac_1 \\ cb_1 & -ca_1 \end{vmatrix}$$

Die Werte dieser Determinanten sind:

$$\begin{array}{l} a(bc_1a_1 + ca_1b_1 - ab_1c_1) \\ b(ca_1b_1 + ab_1c_1 - bc_1a_1) \\ c(ab_1c_1 + bc_1a_1 - ca_1b_1) \end{array}$$

Sie werden durch cyklische Vertauschung aus einander erhalten. Ist a_1 eine Symmetriegerade des Dreiecks, so ist auch $a(bc_1a_1 + ca_1b_1 - ab_1c_1)$ nach b und c symmetrisch. Die A'', das sind die Mitten der AA', liegen also in einer Geraden. Sie ist zugleich diejenige, in welcher nach Gauss die Mitten der Diagonalen eines Vierseits liegen. Wir wollen sie deshalb die Gaussische Gerade der A_1 in Bezug auf das Dreieck ABC nennen.

Es kann gefragt werden: von welcher Geraden a_1 ist die Gaussische Gerade eine gegebene a'?

Dann hat man das System der Gleichungen:

$$\begin{array}{r} abc_1a_1 + aca_1b_1 - a^2b_1c_1 = a' \\ -b^2c_1a_1 + bca_1b_1 + bab_1c_1 = b' \\ + cbc_1a_1 - c^2a_1b_1 + cab_1c_1 = c' \end{array}$$

woraus:

$$b_1c_1 \equiv \begin{vmatrix} +ab & +ac & a' \\ -b^2 & +bc & b' \\ +cb & -c^2 & c' \end{vmatrix} = 2abc(bc' + cb') \equiv bc' + cb'$$

$$a_1 \equiv (ab' + ba')(ac' + ca')$$

Die Harmonikale des Punktes $bc' + cb'$ ist: $(ab' + ba')(ac' + ca')$. Somit ist die Gaussische Gerade der Harmonikalen des Punktes $bc' + cb'$ die Gerade a'.

Die Gaussische Gerade der Harmonikalen des Punktes $b + c$ ist die Harmonikale des Inkreiscentrums. Die unendlich entfernte Gerade entspricht sich selbst als ihrer Gaussischen Geraden.

III.

Trifft eine Gerade die Seiten BC des Dreiecks ABC in A', und construirt man die Harmonikalen eines Punktes P in Bezug auf die so erhaltenen drei neuen Dreiecke; so bilden diese ein Dreieck mit dem Flächeninhalte Φ, so dass:

$$\Phi = \frac{9F(\Sigma a_1 p_a)^3 \Pi a p_a}{\Pi[a_1 p_a \Sigma a p_a + (b p_b + c p_c - 2 a p_a)\Sigma a_1 p_a]}$$

wenn $P \equiv p_a$ und $\Sigma a_1 x_a = 0$ die Gleichung der Geraden $A'B'C'$ ist. Zum Beweise dieser Formel construiren wir die Harmonikale von P in Bezug auf das Dreieck $AB'C'$. Wir ziehen also die Geraden PA, PB', PC' und verlängern dieselben bis zu ihren Gegenseiten in diesem Dreieck. PA treffe $B'C'$ in A_a, PB' die AB in C_a, PC' die AC' in B_a. Ferner treffe $A_a B_a$ die AB in C_a', $A_a C_a$ die AC in B_a'. Es ist dann $B_a' C_a'$ die Harmonikale von P in Bezug auf das Dreieck $AB'C'$. Wir erhalten:

$$\begin{array}{lccc}
A' & \equiv 0 & c_1 & -b_1 \\
B' & \equiv -c' & 0 & a_1 \\
C' & \equiv b_1 & -a & 0 \\
PA & \equiv 0 & p_c & -p_b \\
PB' & \equiv -a_1 p_b & c_1 p_c + a_1 p_a & -c_1 p_b \\
PC' & \equiv -a_1 p_c & -b_1 p_c & a_1 p_a + b_1 p_b \\
A_a & \equiv b_1 p_b + c_1 p_c & -a_1 p_b & -a_1 p_c \\
B_a & \equiv a_1 p_a + b_1 p_b & 0 & +a_1 p_c \\
C_a & \equiv a_1 p_a + c_1 p_c & +a_1 p_b & 0
\end{array}$$

Setzen wir:

$$a_1 p_a + b_1 p_b + c_1 p_c = \Sigma a_1 p_a = \varepsilon$$

so ist:

$$\begin{array}{lccc}
A_a B_a & \equiv a_1 p_b p_c & p_c(\varepsilon + b_1 p_b) & -p_b(a_1 p_a + b_1 p_b) \\
A_a C_a & \equiv a_1 p_b p_c & -p_c(a_1 p_a + c_1 p_c) & p_b(\varepsilon + c_1 p_c)
\end{array}$$

Ferner trifft $A_a B_a$ die AB in C_a' und $A_a C_a$ die AB in B_a. Dann ist:

$$\begin{array}{lccc}
B_a' & \equiv \varepsilon + c_1 p_c & 0 & -a_1 p_c \\
C_a' & \equiv \varepsilon + b_1 p_b & -a_1 p_b & 0 \\
B_a' C_a' & \equiv a_1 p_b p_c & p_c(\varepsilon + b_1 p_b) & p_b(\varepsilon + c_1 p_c)
\end{array}$$

Nun haben wir die Formel für Φ in I. zu benützen.

$$\Phi = \frac{abcF\Delta^2}{\Delta_a \Delta_b \Delta_c}$$

Die Rechnung gibt:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_1 p_b p_c & p_c(\varepsilon + b_1 p_b) & p_b(\varepsilon + c_1 p_c) \\ p_c(\varepsilon + a_1 p_a) & b_1 p_c p_a & p_a(\varepsilon + c_1 p_c) \\ p_b(\varepsilon + a_1 p_a) & p_a(\varepsilon + b_1 p_b) & c_1 p_a p_b \end{vmatrix} = 3\varepsilon^3 \Pi p_a$$

$$\varDelta_a \equiv \begin{vmatrix} p_c(\varepsilon + a_1 p_a) & b_1 p_c p_a & p_a(\varepsilon + c_1 p_c) \\ p_b(\varepsilon + a_1 p_a) & p_a(\varepsilon + b_1 p_b) & c_1 p_a p_b \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= \varepsilon p_a [a_1 p_a \Sigma a p_a + (b p_b + c p_c - 2 a p_a) \Sigma a_1 p_a]$$

Hieraus folgt:

$$\Phi = \frac{9\varepsilon^3 F \Pi a p_a}{\Pi[a_1 p_a \Sigma a p_a + \varepsilon(b p_b + c p_c - 2 a p_a)]}$$

Die Determinante $\varDelta$ kann nur dann Null werden, wenn $\varepsilon = \Sigma a_1 p_a = 0$ d. h. wenn P auf der Geraden a_1 selbst liegt. Die $B_a' C_a'$ fallen dann mit der a_1 zusammen.

Ist die Gerade a_1 die Harmonikale des Punktes p_a, ist also $a_1 = p_b p_c$; so ergibt sich:

$$\Phi = \frac{243 F \Pi a p_a}{\Pi(4 b p_b + 4 c p_c - 5 a p_a)}$$

Ist P das Inkreiscentrum, so sind für den Fall $4b + 4c = 5a$ zwei der Harmonikalen einander parallel.

IV.

Trifft eine Gerade die Seiten BC des Dreiecks ABC in A', und construirt man von einem Punkt P in Bezug auf die neu so entstandenen Dreiecke $AB'C'$ die Harmonikalen $B_a' C_a'$, so treffen die $B_a' C_a'$ die BC in Punkten einer Geraden. Dieser Satz, der von Cayley herrührt, wird bewiesen, wenn wir den Schnittpunkt A_1 der $B_a' C_a'$ mit BC suchen. Es ist:

$$\begin{array}{rlll} B_a' C_a' \equiv & a_1 p_b p_c & p_c(\varepsilon + b_1 p_b) & p_b(\varepsilon + c_1 p_c) \\ BC \equiv & 1 & 0 & 0 \\ A_1 \equiv & 0 & p_b(\varepsilon + c_1 p_c) & -p_c(\varepsilon + b_1 p_b) \\ B_1 \equiv & -p_a(\varepsilon + c_1 p_c) & 0 & p_c(\varepsilon + a_1 p_a) \\ C_1 \equiv & p_a(\varepsilon + b_1 p_b) & -p_b(\varepsilon + a_1 p_a) & 0 \\ B_1 C_1 \equiv & p_b p_c(\varepsilon + a_1 p_a) & p_c p_a(\varepsilon + b_1 p_b) & p_a p_b(\varepsilon + c_1 p_c) \end{array}$$

Daraus geht hervor, dass die $B_1 C_1$ eine Symmetriegerade des Drei-

ecks ist und die A_1 in einer Geraden liegen. Die Harmonikale von P in Bezug auf das Urdreieck ABC trifft die Gerade a_1 in dem Punkte $p_a(b_1p_b - c_1p_c)$. Nun ist:

$$\Sigma p_b p_c(\varepsilon + a_1 p_a) . p_a(b_1p_b - c_1p_c) = 0.$$

Es liegt sonach auch der Schnittpunkt der Harmonikalen von P in Bezug auf das Urdreieck mit der a_1 in der Geraden der A_1. In dieser Fassung, welche eine symmetrische Eigenschaft der Harmonikalen aller Dreiecke aus einer Geraden begreift, hat Cayley obigen Satz bewiesen. Deshalb wollen wir die Gerade der A_1 die Cayley-sche Gerade des Punktes p_a bezüglich der Geraden a_1 nennen.

Ist $a_1 = p_b p_c$ d. h. die Harmonikale von p_a, so fällt die Cayley-sche Gerade mit ihr zusammen. Die Harmonikale eines Punktes entspricht sich also selbst als ihrer Cayley'schen Geraden.

Man kann fragen: für welche a_1 ist die Cayley'sche Gerade bezüglich eines Punktes p_a eine gegebene a'? Es ist dann:

$$\begin{aligned} 2p_ap_bp_c a_1 + p_b^2 p_c b_1 + p_b p_c^2 c_1 &= a' \\ p_c p_a^2 a_1 + 2p_ap_bp_c b_1 + p_c^2 p_a c_1 &= b' \\ p_a^2 p_b a_1 + p_a p_b^2 b_1 + 2p_ap_bp_c c_1 &= c' \end{aligned}$$

Somit:

$$a_1 \equiv \begin{vmatrix} a' & p_b^2 p_c & p_b p_c^2 \\ b' & 2p_ap_bp_c & p_c^2 p_a \\ c' & p_a p_b^2 & 2p_ap_bp_c \end{vmatrix} \equiv p_b p_c (3a'p_a - b'p_b - c'p_c)$$

Für welche a_1 bezüglich des Punktes p_a ist also die Cayley'sche Gerade die Harmonikale des Inkreiscentrums? Hier ist:

$$a' = 1, \; a_1 = p_b p_c (3p_a - p_b - p_c)$$

Die Cayley'sche Gerade der a_2 bezüglich des Punktes p_a ist: $p_b p_c(\varepsilon_2 + a_2 p_a)$, wenn $\varepsilon_2 = \Sigma a_2 p_a$. Ist nun a_2 selbst die Cayley'sche Gerade der a_1 bezüglich desselben Punktes, so ist:

$$a_2 = p_b p_c(\varepsilon + a_1 p_a), \quad \varepsilon = \Sigma a_1 p_a$$

$$a_2 p_a = p_a p_b p_c(\varepsilon + a_1 p_a), \quad \varepsilon_2 = \Sigma a_2 p_a = 4\varepsilon \Pi p_a$$

Die Cayley'sche Gerade der Cayley'schen Geraden der a_1 bezüglich des Punktes p_a hat also die Form:

$$p_b p_c(5\varepsilon + a_1 p_a).$$

Wien, December 1875.

X.

Uebungsaufgaben.

Von

Emil Hain.

---

1. Sätze über Dreiecke mit einer Mittelseite.

Ist im Dreieck ABC die eine Seite $BC = a$ eine solche Function der beiden andern Seiten b und c, dass a ein Mittelwert zwischen diesen Seiten ist; so kann die Seite a die Mittelseite dieses Dreiecks genannt werden. Die gewöhnlichsten Fälle sind dann:

$$2a = b + c$$
$$a^2 = bc$$
$$\frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Ein Dreieck, in welchem die Mittelseite einer dieser Functionen entspricht, heisse bzhw. arithmetisch-, geometrisch-, harmonisch-proportional. Für solche Arten von Dreiecken gelten dann verschiedene Beziehungen, deren einfachere hier folgen und von welchen die meisten eine Umkehrung zulassen.

1. Die Höhe auf die Mittelseite eines arithmetisch-proportionalen Dreiecks ist das harmonische Mittel der andern Höhen.

2. Der Inkreisradius eines arithmetisch-proportionalen Dreiecks ist gleich dem Drittel der Höhe auf die Mittelseite.

3. Die Inkreisradien zweier flächengleicher arithmetisch-proportionalen Dreiecke verhalten sich umgekehrt wie die Mittelseiten.

4. Die Flächen zweier arithmetisch-proportionalen Tangentendreiecke eines Kreises verhalten sich so wie die Mittelseiten.

5. Der Radius des die Mittelseite eines arithmetisch-proportionalen Dreiecks von Aussen berührenden Ankreises ist gleich der Höhe auf die Mittelseite.

6. Das von den Summen je zweier Seiten eines arithmetisch-proportionalen Dreiecks als Seiten gebildete Dreieck ist ebenfalls arithmetisch-proportional.

7. Werden die Seiten eines arithmetisch-proportionalen Dreiecks um gleich viel verlängert oder verkürzt; so ist auch das aus diesen Seiten gebildete Dreieck arithmetisch-proportional.

8. In einem arithmetisch-proportionalen Dreieck ist nie das doppelte Rechteck aus den die Mittelseite umschliessenden Seiten gleich der siebenfachen Summe der Quadrate dieser beiden Seiten.

9. Ist in einem Dreieck auf eine Seite die Höhe gezogen und ist sie arithmetische Mittelseite für die so entstandenen Teildreiecke, so sind die beiden andern Seiten gleich lang.

10. Wenn der Sinus eines Winkels in einem beliebigen Dreieck sich verhält zu seinem Cosinus wie das dreifache Rechteck aus der Gegenseite und aus dem Umkreisradius zum Rechteck aus den beiden andern Seiten; so ist das Höhenfusspunktdreieck dieses Dreiecks arithmetisch-proportional.

11. Sind in einem Viereck die beiden Diagonalen gezogen, und sind für die so entstandenen Dreiecke, deren gemeinsame Spitze im Diagonalschnittpunkt liegt, die Seiten des Vierecks arithmetische Mittelseiten; so ist das Viereck ein Kreistangentenviereck.

12. Die Höhe auf die Mittelseite eines geometrisch-proportionalen Dreiecks ist die mittlere Proportionale der beiden andern Höhen.

13. Haben zwei geometrisch-proportionale Dreiecke gleichen Flächeninhalt, so verhalten sich ihre Umkreisradien ebenso wie die Würfel ihrer Mittelseiten.

14. Haben zwei geometrisch-proportionale Sehnendreiecke eines Kreises gleichen Flächeninhalt, so sind ihre Mittelseiten gleich lang.

15. Sind zwei geometrisch-proportionale Dreiecke einem und demselben Kreise eingeschrieben, so verhalten sich ihre Flächeninhalte wie die Würfel ihrer Mittelseiten.

16. Haben zwei geometrisch-proportionale Dreiecke die Mittelseite und deren Gegenwinkel gleich, so sind die Summen der Quadrate der andern Seiten in beiden Dreiecken gleich.

17. Wenn in einem Viereck die Diagonalen gezogen sind, so entstehen vier Dreiecke, wovon jedes eine Seite des Vierecks enthält. Sind diese Dreiecke in Bezug auf die Viereckseiten geometrisch-proportional, dann sind die Rechtecke aus den Gegenseiten des Vierecks einander gleich.

18. Die Höhe auf die Mittelseite eines harmonisch-proportionalen Dreiecks ist das arithmetische Mittel aus den beiden andern Höhen.

19. Haben zwei harmonisch-proportionale flächengleiche Dreiecke die Gegenwinkel der Mittelseiten gleich, so verhalten sich diese umgekehrt wie die Summen der beiden andern Seiten.

20. Die Quadrate der Mittelseiten zweier flächengleicher harmonisch-proportionalen Sehnendreiecke eines Kreises verhalten sich umgekehrt wie die Summen der beiden andern Seiten.

21. Ist das Quadrat einer Seite eines Dreiecks das arithmetische Mittel aus den Quadraten der beiden andern Seiten, so ist das aus den Summen je zweier Seiten dieses Dreiecks als Seiten gebildete Dreieck harmonisch-proportional.

22. Sind in einem Viereck die beiden Diagonalen gezogen und ist in jedem der vier Dreiecke, deren gemeinschaftliche Spitze im Diagonalenschnittpunkt liegt, die Viereckseite harmonische Mittelseite; so sind die Summen je zweier reciproken Gegenseiten einander gleich.

23. Nur im gleichseitigen Dreieck ist jede Seite das arithmetische, geometrische oder harmonische Mittel der beiden andern Seiten.

24. Ist eine Seite eines Dreiecks sowol die mittlere Proportionale als auch das arithmetische Mittel der beiden andern; so ist das Quadrat der Mittelseite das arithmetische Mittel der Quadrate der beiden andern Seiten und das Dreieck ist gleichschenklig.

25. Ist die Mittelseite eines geometrisch-proportionalen Dreiecks auch harmonische Mittelseite, so ist das Dreieck auch arithmetisch-proportional.

26. Liegt die Mittelseite eines arithmetisch-proportionalen Dreiecks einem Winkel von 60^0 gegenüber, so ist das Dreieck gleichseitig.

27. Haben zwei flächengleiche Dreiecke, das eine arithmetisch-, das andere geometrisch-proportional, eine und dieselbe Mittelseite; so ist das sechsfache Rechteck aus dem Inkreisradius des ersten und aus dem Umkreisradius des zweiten Dreiecks gleich dem Quadrat der Mittelseite.

28. Zerlegt jede Diagonale eines Vierecks dasselbe in je zwei

Dreiecke, so dass die Diagonalen arithmetische, geometrische oder harmonische Mittelseiten bilden, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

29. Es gibt keinen Punkt in der Ebene eines gleichseitigen Vierecks, dessen Verbindungsgeraden mit den Ecken Dreiecke bilden, die in Bezug auf die Quadratseiten arithmetisch, geometrisch oder harmonisch-proportional wären.

2. Sätze über die Transversalen, welche die Seiten eines Dreiecks in drei gleiche Teile teilen.

Auf den Seiten B, C des Dreiecks ABC seien die Punkte A_c und A_b so gelegen, dass $BA_c = A_cA_b = A_bC = \frac{1}{3}BC = \frac{a}{3}$. Für die Transversalen AA_c und AA_b gelten ausser den bereits im Archiv (LV. 331. LVII. 324.) mitgeteilten Beziehungen noch folgende:

1. Die Schwerpunkte der Dreiecke $A_bB_cC_a$ und $A_cB_aC_b$ fallen mit dem Schwerpunkt des Urdreiecks zusammen.

2. Die Paare der Geraden A_cB_c und A_bC_b schneiden sich im Schwerpunkt des Urdreiecks.

3. Die Paare der Geraden B_aC_b und C_aB_c, als auch die Paare der A_bC_a und A_cB_a schneiden sich in drei solchen Punkten, die als Ecken ein Dreieck bilden, dessen Schwerpunkt mit dem des Urdreiecks zusammenfällt.

4. Wird eine Seite eines Dreiecks in drei gleiche Teile geteilt und jeder Teilungspunkt mit dem Gegeneck verbunden; so ist das Rechteck aus dem Umkreisradius des ganzen und aus dem des mittleren der drei so entstandenen Dreiecke gleich dem Rechteck aus dem Umkreisradius der beiden andern Teildreiecke.

5. Sind ϱ, ϱ_{ac}, ϱ_{aa}, ϱ_{ab} die Inkreisradien der Dreiecke ABC, ABA_c, AA_cA_b, ACA_b; so ist:

$$\frac{7}{\varrho} + \Sigma\frac{1}{\varrho_{aa}} = \Sigma\left(\frac{1}{\varrho_{ab}} + \frac{1}{\varrho_{ac}}\right)$$

6. Sind t, t_{ac}, t_{aa}, t_{ab} die Paralleltransversalen (Archiv LVII. 438.) der Dreiecke ABC, ABA_c, AA_cA_b, ACA_b; so ist:

$$\frac{5}{t} + \Sigma\frac{1}{t_{aa}} = \Sigma\left(\frac{1}{t_{ab}} + \frac{1}{t_{ac}}\right)$$

7. Zieht man durch die Ecken eines Dreiecks zu den Gegenseiten Gerade, welche diese in drei gleiche Teile teilen und bildet aus je

drei abwechselnden Transversalen ein Dreieck; so verhält sich der Flächeninhalt jedes dieser beiden Dreiecke zu dem des Urdreiecks wie 7:9.

8. Die Dreiteilungspunkte (A_b, A_c) der Seiten eines Dreiecks liegen in einer Ellipse, deren Gleichung:

$$2\Sigma a^2 x_a^2 - 5\Sigma ab x_a x_b = 0$$

wo x_a die Normale eines Punktes auf die Seite BC ist.

8. Verschiedene Dreiecksätze.

1. Aus den Summen je zweier Seiten eines Dreiecks als Seiten kann immer ein anderes Dreieck gebildet werden. Sind a, b, c die Seiten des ersten Dreiecks, also $b+c$, $c+a$, $a+b$ die des zweiten, so ist der Flächeninhalt des letzteren $= \sqrt{abc(a+b+c)}$.

2. Sind a, b, c die Seiten eines Dreiecks, so kann immer ein Dreieck mit den Seiten $\sqrt{ab+ac}$, $\sqrt{bc+ca}$, $\sqrt{ca+ab}$ construirt werden. Der Flächeninhalt dieses Dreiecks ist die Hälfte von dem Flächeninhalte des Dreiecks mit den Seiten $a+b$, $b+c$, $c+a$.

3. Sind a, b, c die Seiten eines Dreiecks, so kann immer ein Dreieck construirt werden, dessen Seiten $\sqrt{b^2+c^2}$, $\sqrt{c^2+a^2}$, $\sqrt{a^2+b^2}$ sind. Der Flächeninhalt dieses Dreiecks ist $= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$.

4. Sind r und ϱ Um- und Inkreisradius des Dreiecks mit den Seiten a, b, c; ϱ' der Inkreisradius mit den Seiten $a+b$, $b+c$, $c+a$, so ist $\varrho' = \sqrt{2r\varrho}$.

5. Wird auf der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks ausserhalb (innerhalb) desselben eine Senkrechte errichtet, so ist der doppelte Abstand des Gegenecks der Basis von dieser Normalen gleich der Summe (Differenz) der Abstände der andern Ecken von derselben Geraden.

Wien, October 1875.

XI.

Miscellen.

1.

Product einer unendlichen Factorenreihe.

Im Folgenden wird bewiesen, dass

$$[\tang x].\sqrt{\tang 2x}.\sqrt[4]{\tang 4x}.\sqrt[8]{\tang 8x}\ldots = [2\sin x]^2 \qquad \text{(I)}$$

Setzt man in der identischen Gleichung

$$\tang \alpha = \frac{2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

der Reihe nach:

$$\alpha = x,\ 2x,\ 4x,\ \ldots\ 2^{n-1}x$$

so erhält man:

$$\tang x = \frac{2\sin^2 x}{\sin 2x}$$

$$\sqrt{\tang 2x} = \sin 2x.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 4x}}$$

$$\sqrt[4]{\tang 4x} = \sqrt{\sin 4x}.\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{\sin 8x}}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$\sqrt[2^{n-1}]{\tang(2^{n-1}x)} = \sqrt[2^{n-2}]{\sin(2^{n-1}x)}.\frac{\sqrt[2^{n-1}]{2}}{\sqrt[2^{n-1}]{\sin(2^n x)}}$$

und nach Multiplication dieser n Gleichungen:

$$[\tang x].\sqrt{\tang 2x}.\sqrt[4]{\tang 4x}.\sqrt[8]{\tang 8x}\ldots\sqrt[2^{n-1}]{\tang(2^{n-1}x)}$$

$$=\frac{2.\sqrt{2}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^{n-1}]{2}.[\sin x]^2}{\sqrt[2^{n-1}]{\sin(2^n x)}}=\frac{2.2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{8}}\ldots 2^{\frac{1}{2^{n-1}}}.[\sin x]^2}{\sqrt[2^{n-1}]{\sin(2^n x)}}$$

$$=\frac{2^{2\left[1-\frac{1}{2^n}\right]}.[\sin x]^2}{\sqrt[2^{n-1}]{\sin(2^n x)}}=\frac{[2\sin x]^2}{\sqrt[2^{n-1}]{2\sin(2^n x)}}$$

das ist: (II)

$$[\tang x].\sqrt{\tang 2x}.\sqrt[4]{\tang 4x}.\sqrt[8]{\tang 8x}\ldots\sqrt[2^{n-1}]{\tang(2^{n-1}x)}=\frac{[2\sin x]^2}{\sqrt[2^{n-1}]{\sin(2^n x)}}$$

Der Nenner dieses Ausdrucks lässt sich in folgender Reihe entwickeln:

$$\sqrt[2^{n-1}]{\sin(2^n x)}=\sqrt[2^n]{\{1-[\cos(2^n x)]^2\}}$$

$$=1-\frac{1}{2^n}[\cos(2^n x)]^2+\frac{\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)}{1.2}.[\cos(2^n x)]^4-\ldots \quad \text{(a)}$$

welche convergirt, wofern nur x nicht von der Form

$$x=\frac{h\pi}{2^k}$$

für ganze Zahlen k, h ist. Für $n=\infty$ verschwinden alle Terme ausser dem ersten; daher hat obiger Nenner den Grenzwert 1, und es resultirt die zu beweisende Gleichung (I).

Formel (I) kann man auf andere Art direct erhalten. Setzt man:

$$[\tang x].\sqrt{\tang 2x}.\sqrt[4]{\tang 4x}.\sqrt[8]{\tang 8x}\ldots=J$$

so ist

$$\log\tang x+\tfrac{1}{2}\log\tang 2x+\tfrac{1}{4}\log\tang 4x+\tfrac{1}{8}\log\tang 8x+\ldots=\log J$$

Durch Substitution von $w=2x, 4x, 8x, 16x, 32x\ldots$ in eine bekannte Formel:

$$\log\tang\frac{w}{2}=-2[\cos w+\tfrac{1}{3}\cos 3w+\tfrac{1}{5}\cos 5w+\tfrac{1}{7}\cos 7w+\ldots]$$

erhält man die Gleichungen:

$$\log \text{tang}\, x = -2\left[\cos 2x + \tfrac{1}{3}\cos 6x + \tfrac{1}{5}\cos 10x + \tfrac{1}{7}\cos 14x + \ldots\right]$$
$$\tfrac{1}{2}\log \text{tang}\, 2x = -\left[\cos 4x + \tfrac{1}{3}\cos 12x + \tfrac{1}{5}\cos 20x + \tfrac{1}{7}\cos 28x + \ldots\right]$$
$$\tfrac{1}{4}\log \text{tang}\, 4x = -\tfrac{1}{2}\left[\cos 8x + \tfrac{1}{3}\cos 24x + \tfrac{1}{5}\cos 40x + \tfrac{1}{7}\cos 56x + \ldots\right]$$
$$\tfrac{1}{8}\log \text{tang}\, 8x = -\tfrac{1}{4}\left[\cos 16x + \tfrac{1}{3}\cos 48x + \tfrac{1}{5}\cos 80x + \ldots\right]$$

und durch Addition

$$\log J = -2\left[\cos 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x + \tfrac{1}{3}\cos 6x + \tfrac{1}{4}\cos 8x + \tfrac{1}{5}\cos 10x + \ldots\right]$$

Und weil

$$2\log[2\sin x] = -2\left[\cos 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x + \tfrac{1}{3}\cos 6x + \tfrac{1}{4}\cos 8x + \ldots\right]$$

so ergiebt sich:

$$\log J = 2\log[2\sin x] = \log[2\sin x]^2$$

woraus:

$$J = [2\sin x]^2$$

was zu beweisen war.

Durch Substitution der Werte

$$\text{tang}\, x = \frac{1}{\text{cotg}\, x}$$

wird hieraus:

$$[\text{cotg}\, x].\sqrt{\text{cotg}\, 2x}.\sqrt[4]{\text{cotg}\, 4x}.\sqrt[8]{\text{cotg}\, 8x}\ldots = [\tfrac{1}{2}\text{cosec}\, x]^2 \qquad \text{(III)}$$

Die Formeln (I) und (III) lassen sich auch schreiben:

$$\sqrt{\text{tang}\, 2x}.\sqrt[4]{\text{tang}\, 4x}.\sqrt[8]{\text{tang}\, 8x}\ldots = 2\sin 2x \qquad \text{(IV)}$$

$$\sqrt{\text{cotg}\, 2x}.\sqrt[4]{\text{cotg}\, 4x}.\sqrt[8]{\text{cotg}\, 8x}\ldots = \tfrac{1}{2}\text{cosec}\, 2x \qquad \text{(V)}$$

G. Dobiciecki,
Techniker in Warschau.

2.

Höhe des Schwerpunktes eines Pyramidenstutzes, dessen Dichtigkeit von der untern bis zur obern Fläche sich progressiv verändert.

Es ist von mir in dem Archiv Teil 58. Seite 185 etc. ein Aufsatz über Grenzwertrechnung erschienen, welche auf höheren Bildungsanstalten die Integralrechnung teilweise ersetzt; mit dieser Rechnung soll obige Aufgabe gelöst werden.

Es sei g die Grundfläche einer Pyramide, h ihre Höhe; man teile die letztere von der Spitze an in n gleiche Teile, lege durch jeden Teilpunkt eine Ebene, parallel zur Grundfläche und stelle auf jede Durchschnittsfigur ein Prisma von der Höhe $\frac{1}{n}h$; der Rauminhalt des $x$ten Prismas ist:

$$\frac{x^2}{n^3}gh$$

Die Dichtigkeit der Pyramide sei an der Spitze d_0, an der Grundfläche d_2, so ist die Dichtigkeit des $x$ten Prismas

$$d_x = d_0 + \frac{x}{n}(d_2 - d_0)$$

folglich das Gewicht des betreffenden Prismas:

$$P_x = \frac{x^2}{n^3}ghd_0 + \frac{x^3}{n^4}gh(d_2 - d_0)$$

Nimmt man hiervon den Grenzwert der Summe von $x = m$ bis $x = n$, so ist das Gewicht des Stutzes von der Höhe $\left(1 - \frac{m}{n}\right)h$:

$$G = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{m^3}{n^3}\right)ghd_0 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{m^4}{n^4}\right)gh(d_2 - d_0)$$

Multiplicirt man das Gewicht des Prismas P_x mit dem Abstande desselben von der Grundfläche, d. i. $\left(1 - \frac{x}{n}\right)h$, so erhält man das Moment desselben in Beziehung auf g:

$$\frac{x^2}{n^3}ghd_0 + \frac{x^3}{n^4}gh(d_2 - d_0) - \frac{x^3}{n^4}ghd_0 - \frac{x^4}{n^5}gh(d_2 - d_0)$$

Nimmt man hiervon den Grenzwert der Summe, so ist das Moment des Pyramidenstutzes:

$$M = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{m^3}{n^3}\right)gh^2d_0 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{m^4}{n^4}\right)gh^2(d_2 - d_0) - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{m^4}{n^4}\right)gh^2d_0$$
$$- \frac{1}{5}\left(1 - \frac{m^5}{n^5}\right)gh(d_2 - d_0)$$

Die Höhe des Schwerpunktes über der Grundfläche g ist

$$S = \frac{M}{G}$$

d. i.

$$S = \frac{\left\{\frac{1}{3}\left(1-\frac{m^3}{n^3}\right)gh^2d_0 + \frac{1}{4}\left(1-\frac{m^4}{n^4}\right)gh^2(d_2-d_0) - \frac{1}{4}\left(1-\frac{m^4}{n^4}\right)gh^2d_0 - \frac{1}{5}\left(1-\frac{m^5}{n^5}\right)gh^2(d_2-d_0)\right\}}{\frac{1}{3}\left(1-\frac{m^3}{n^3}\right)ghd_0 + \frac{1}{4}\left(1-\frac{m^4}{n^4}\right)gh(d_2-d_0)}$$

Hebt man den Bruch mit $\left(1-\frac{m}{n}\right)gh$, setzt $\left(1-\frac{m}{n}\right)h = h_1$ und ordnet, so ergiebt sich:

$$S = \frac{\frac{1}{30}\left(1-\frac{m}{n}\right)\left(1+3\frac{m}{n}+6\frac{m^2}{n^2}\right)h_1d_0 + \frac{1}{20}\left(1+2\frac{m}{n}+3\frac{m^2}{n^2}+4\frac{m^3}{n^3}\right)h_1d_2}{\frac{1}{12}\left(1-\frac{m}{n}\right)\left(1+2\frac{m}{n}+3\frac{m^2}{n^2}\right)d_0 + \frac{1}{4}\left(1+\frac{m}{n}+\frac{m^2}{n^2}+\frac{m^3}{n^3}\right)d_2}$$

Bezeichnet d_1 die Dichtigkeit an der obern Fläche des Stutzes, so ist $d_1 = d_0 + \frac{m}{n}(d_2-d_0)$, oder $d_0 = \frac{d_1 - \frac{m}{n}d_2}{1-\frac{m}{n}}$. Wenn man diesen Wert von d_0 einträgt, so erhält man:

$$S = \frac{\frac{2}{5}\left(1+3\frac{m}{n}+6\frac{m^2}{n^2}\right)h_1d_1 + \frac{1}{5}\left(3+4\frac{m}{n}+3\frac{m^2}{n^2}\right)h_1d_2}{\left(1+2\frac{m}{n}+3\frac{m^2}{n^2}\right)d_1 + \left(3+2\frac{m}{n}+\frac{m^2}{n^2}\right)d_2}$$

Nun ist aber $\frac{m^2}{n^2} = \frac{g_1}{g}$, daher $\frac{m}{n} = \sqrt{\frac{g_1}{g}}$, trägt man dies ein, so ist:

$$S = \frac{\frac{2}{5}(g+3\sqrt{gg_1}+6g_1)hd_1 + \frac{1}{5}(3g+4\sqrt{gg_1}+3g_1)h_1d_2}{(g+2\sqrt{gg_1}+3g_1)d_1 + (3g+2\sqrt{gg_1}+g_1)d_2}$$

Setzt man in S die Dichtigkeit gleichförmig, also $d_1 = d_2$, so ergiebt sich als Schwerpunkt des Pyramidenstutzes

$$S = \frac{1}{4}h_1\left(1+\frac{\sqrt{gg_1}+2g_1}{g+\sqrt{gg_1}+g_1}\right)$$

denselben Ausdruck erhält man, wenn man den Unterschied der

Momente der ganzen Pyramide und des abgeschnittenen Stückes durch den Rauminhalt des Stutzes dividirt.

Wird $g_1 = 0$, so ist die Höhe des Schwerpunktes über der Grundfläche:

$$S = \frac{1}{5} h_1 \left(1 + \frac{d_1}{d_1 + 3d_2}\right).$$

ein Ausdruck, der in § 9 des angeführten Aufsatzes gefunden worden ist.

Plauen i./V. den 16. Dec. 1875.

F. E. Thieme.

3.

Ein Beitrag zur Messung der elektromotorischen Kräfte von Stromquellen.

a) Absolute Messungen.

Die Wirksamkeit einer Stromquelle hängt ab von der elektromotorischen Kraft und von dem Widerstande in der Quelle selbst. Das Ohm'sche Gesetz gibt Mittel an die Hand, diese Stücke auf bestimmte Masse zurückzuführen und ihre absoluten Werte darnach auszumitteln. Die absoluten Werte der elektromotorischen Kraft E und des Widerstandes W einer Stromquelle ergeben sich durch Combination der Resultate einer hinreichenden Anzahl von Versuchen, die man auf verschiedene Arten einleiten kann. Das Verfahren, welches ich einhalte zur Messung der elektromotorischen Kraft E, besteht in Nachstehendem.

Bezeichnet S die Stromstärke, W den Widerstand im Elektromotor und E die elektromotorische Kraft der Quelle, so besteht wenn kein Neusilberdraht weiter eingeschaltet ist, die Relation:

$$S = \frac{E}{W} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{I.}$$

Wird nun ein Neusilberdraht von der Länge l eingeschaltet, welcher die Stromstärke S auf $\frac{S}{n}$ herabbringt, so hat man für diesen Fall die Gleichung:

$$\frac{S}{n} = \frac{E}{W + l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{II.}$$

Aus II. entsteht:

$$SW + Sl = nE,$$

und mit Hülfe von I:

$$E + Sl = nE$$

oder:

$$E = \frac{Sl}{n-1}.$$

Wird nun $n = 2$ so ist $E = S.l$ IV, d. h. die elektromotorische Kraft E ist gleich dem Producte der Stromstärke S bei keiner weiteren Drahteinschaltung und der Länge l des Neusilberdrahtes, der die Stromstärke S auf $\frac{S}{2}$ zurückbringt.

In der Physik von Külp Band III Seite 349 wird E bestimmt durch die Gleichung:

$$E = \frac{S.S_1}{S-S_1}(l_1 - l),$$

in welcher S und S_1 die Stromstärken bei zwei verschiedenen Leitungswiderständen bedeuten; dieselbe geht in $E = S.l$ über, wenn $l = 0$; $S_1 = \frac{1}{2}S$ und für $l_1 = l$ gesetzt wird.

In der Gleichung: $E = S.l$ wird der numerische Wert durch die Einheiten, welche der Stromstärke und dem Widerstande zu Grunde liegen, festgestellt.

Ein Zinkeisenelement A gab bei keiner weiteren Drahteinschaltung eine Ablenkung von 64° 15′, um eine Ablenkung von 46° an der Tangentenbussole zu erhalten, welcher Winkel dem halben Tangentenwert von 64° 15′ nahezu entspricht, so musste ein 1,3 Meter langer Neusilberdraht eingeschaltet werden, in diesem Falle ist:

$$E = \mathrm{tg}\, 64^0\, 15 \times 1{,}3 = 2{,}695;$$

d. h. die betreffende Kraft ist 2,695 mal grösser als diejenige, welche bei dem Leitungswiderstande eines Neusilberdrahtes von einem Meter Länge und 1,5 Millimeter Dicke eine Ablenkung von 45° an der Bussole hervorbringt.

b) Relative Messungen.

Handelt es sich um das Verhältniss zweier Stromquellen, so ist folgendes Verfahren einzuhalten. Für die zwei Stromquellen bestehen nachstehende Gleichungen:

$$\text{für Quelle } A: \begin{cases} S = \dfrac{E}{W} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.} \\[2ex] \dfrac{S}{n} = \dfrac{E}{W+l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II.} \end{cases}$$

und

$$\text{für Quelle } B: \begin{cases} S_1 = \dfrac{E_1}{W_1} \quad \text{III.} \\ \dfrac{S_1}{n} = \dfrac{E_1}{W_1 + l_1} \quad \text{IV.} \end{cases}$$

wenn S und S_1 die Stromstärken bei keiner weiteren Drahteinschaltung, E und E_1 die elektromotorischen Kräfte, und l und l_1 diejenigen Drahtlängen bedeuten, welche ihre Stromstärke auf den $n$ten Teil zurückführen.

Aus I. und II. erhält man:

$$E = \frac{Sl}{n-1} \quad \text{V.}$$

analog aus III. und IV.:

$$E_1 = \frac{S_1 l_1}{n-1} \quad \text{VI.}$$

wo durch Division von V. und VI.:

$$\frac{E}{E_1} = \frac{Sl}{S_1 l_1} \quad \text{VII.}$$

hervorgeht; d. h. die elektromotorischen Kräfte zweier Stromquellen sind direct proportional den Producten aus den Stromstärken bei keinen weiteren Drahteinschaltungen und denjenigen Drahtlängen, welche im Stande sind ihre Stromstärken auf den $n$ten Teil der ursprünglichen Stärken zurückzubringen.

Wird $S = S_1$ dann entsteht aus VII.:

$$\frac{E}{E_1} = \frac{l}{l_1}$$

d. h. die elektromotorischen Kräfte verhalten sich wie die eingeschalteten Drahtlängen, welche die Nadel von einer gleichen Ablenkung auf eine geringere Ablenkung zurückzubringen im Stande sind; ein Verfahren was Wheatstone einhielt bei der relativen Messung der elektromotorischen Kräfte von Stromquellen. (Siehe Physik von Külp Band III Seite 350).

Das obige Zinkeisenelement A verglich ich mit einem anderen B das bei keiner weiteren Drahteinschaltung eine Ablenkung von 70° 15′ an der Tangentenbussole zeigte. Um nun eine Ablenkung von 54° 15′ zu erhalten, welcher Winkel dem halben Tangentenwert von 70° 15′ sehr nahe entspricht, so musste ein 1,10 Meter langer Draht eingegeschaltet werden, es besteht die Gleichung:

$$\frac{E}{E_1} = \frac{\mathrm{tg}\, 64 \times 1{,}3}{\mathrm{tg}\, 70^0\, 15' \times 1{,}1} = \frac{2{,}695}{3{,}063} \quad \text{oder:}$$

$$E : E_1 = 1 : 1{,}13.$$

Da bei meiner Tangentenbussole nur auf ¼ Grad genau abgelesen werden kann, so nahm ich bei dem Element A nicht $46^0\, 2'$, sondern 46^0 und bei dem zweiten Element B nicht $54^0\, 19'$, sondern nur $54^0\, 15'$.

Külp.

4.

Ueber das Verhältniss der Stromstärken einer Kette zu einem einzigen Elemente.

a) Gleich starke Becher.

Für eine Kette von N gleich starken Elementen besteht der Ausdruck:

$$S = \frac{Ne}{Nw + g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

und für ein Element der nachstehende:

$$s \quad \frac{e}{w + g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

Wird die Stromstärke S der Kette auf $\frac{S}{n}$ durch eine Drahtlänge l gedämpft, so wird:

$$\frac{S}{n} = \frac{Ne}{Nw + g + l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III.}$$

erhalten. Die Gleichungen I. und II. liefern:

$$S = \frac{Ne(n-1)}{l},$$

und für $n = 2$:

$$S = \frac{Ne}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IV.}$$

zieht man schliesslich II. in Betracht, so bekommt man:

$$S : s = N(w + g) : l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{V.}$$

d. h. die Stromstärke einer Kette verhält sich zur Stromstärke eines Elementes wie das Product aus der Zahl der Becher der Kette in den Gesammtleitungswiderstand — Dämpfungslänge — eines Elementes zur Dämpfungslänge der Kette.

Sind in obiger Proportion alle Grössen bis auf l bekannt, so kann die Dämpfungslänge durch Rechnung gefunden werden, man hat:

$$l = \frac{N(w+g)}{S} \times s.$$

Zwei gleich starke Zinkeisenelemente gaben das Nachstehende:

$$\frac{\operatorname{tg} 70}{\operatorname{tg} 65^0\, 30'} = \frac{2 \,.\, 118}{190} \quad \text{oder:}$$
$$1{,}252 = 1{,}242.$$

Dass die Elemente auch wirklich gleich waren, ergibt sich wie folgt:

$$118 = w + g \quad \text{oder:}$$
$$w = 118 - 44 = 74,$$

da 44 der Widerstand in der Tangentenbussole, ebenso ist:

$$190 = 210 + 44 \quad \text{oder:}$$
$$w = 73,$$

woraus die Stärkegleichheit der Elemente hervorgeht.

b) Ungleich starke Becher.

Sind die Elemente, welche zu einer Kette verbunden werden, ungleich, so ist die Rechnung für zwei Elemente, folgende. Es bestehen für diesen Fall die Gleichungen:

$$S = \frac{E + E_1}{w + w_1 + g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

und:

$$s = \frac{E}{w + g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

Bringt man die Stromstärke S auf $\frac{S}{n}$ herab, so ist:

$$\frac{S}{n} = \frac{E + E_1}{w + w_1 + g + l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III.}$$

aus I. und III. wird wieder:

$$S = \frac{(E + E_1)(n-1)}{l},$$

woraus für $n = 2$:

$$S = \frac{E + E_1}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IV.}$$

hervorgeht, und endlich unter Berücksichtigung von II.:

$$\frac{S}{s} = \frac{(E+E_1).(w+g)}{E.l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{V.}$$

sich ergibt; d. h. die Stromstärke der Kette verhält sich zur Stromstärke des Vergleichelementes wie das Product aus der Summe der elektromotorischen Kräfte der Elemente in den Gesammtleitungswiderstand — Dämpfungslänge — des Vergleichelementes zum Producte aus der Dämpfungslänge der Kette in die elektromotorische Kraft des Vergleichelementes.

In dem Ausdrucke V. kann man auch für die elektromotorischen Kräfte die Producte der Stromstärken bei keinen weiteren Drahteinschaltungen in ihre Widerstände — Dämpfungslängen — setzen, wodurch derselbe in folgenden übergeht:

$$\frac{S}{s} = \frac{(Ws+W_1 s_1)\,W}{Wsl}.$$

Für eine grössere Anzahl als zwei Elemente, wird die Rechnung auf eine gleiche Weise geführt.

Die experimentelle Bestätigung der Gleichung: V b) behalte ich mir vor.

Külp.

5.

Ueber das Verhältniss eines kleinplattigen Elementes zu einer Kette von grossplattigen Elementen.

Die Relation für das kleinplattige Element ist:

$$s = \frac{E}{w+g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

und die betreffende für die Kette von N gleich starken Elementen, die folgende:

$$S = \frac{NE}{\frac{Nw}{m}+g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

Durch eine Drahtlänge l, wird S auf $\frac{S}{n}$ gestillt, wodurch man erhält:

$$\frac{S}{n} = \frac{NE}{\frac{Nw}{m}+g+l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III.}$$

Die Gleichungen II. und III. geben den Ausdruck:

$$S = \frac{NE(n-1)}{l},$$

der für $n = 2$ in:

$$S = \frac{NE}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IV.}$$

übergeht, woraus unter Zuziehung von I. die Proportion:

$$s : S = l : N(w + g)$$

entsteht, d. h. die Stromstärke eines kleinplattigen Elementes verhält sich zur Stromstärke einer Kette von grossplattigen Elementen, wie die Dämpfungslänge der Kette zum Producte aus der Zahl der Becher in den Gesammtleitungswiderstand — Dämpfungslänge des kleinplattigen Elementes.

Für zwei gleich starke Elemente zur Kette verbunden und einem kleinplattigen Elemente von nur halb so grossen Platten, erhielt ich das folgende Resultat:

$$\frac{\text{tg}\, 51^0\, 30'}{\text{tg}\, 66^0\, 45'} = \frac{232}{2 \times 212}$$

oder:

$$0{,}540 = 0{,}547.$$

Da die verschiedenen Untersuchungen alle nach demselben Principe ausgeführt werden, so ist es am Platze das Verfahren zu benennen, und schlage vor dasselbe mit dem Namen „galvanische Dämpfungsmethode" zu belegen. Külp.

6.

Ueber die Bestimmung des Leitungswiderstandes der Metalle.

Der Leitungswiderstand der Metalle kann auch mit Hülfe der „galvanischen Dämpfungsmethode" ausgeführt werden. Man hat in diesem Falle die Gleichungen:

$$S = \frac{E}{W} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

und

$$\frac{S}{n} = \frac{E}{W + x + \lambda} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

wo x den Leitungswiderstand des eingeschalteten Drahtes, von gegebener Länge, dessen Widerstand bestimmt werden soll, und λ die-

jenige Länge Neusilberdraht — Zuschusslänge — bezeichnet, welche man noch hinzufügen muss, um die Stromstärke S auf $\frac{S}{n}$ vollständig herabzudrücken. — Die Länge des einzuschaltenden Drahtes muss man jedoch so wählen, dass durch dieselbe S allein nicht schon $\frac{S}{n}$ oder gar kleiner als $\frac{S}{n}$ wird. Da die Widerstände der Metalle mit Kupfer als gutem Leiter verglichen werden, so richtet man sich am besten bei der Wahl der einzuschaltenden Länge nach dem schlechtesten Leiter. Wird zwischen den Gleichungen I. und II. E eliminirt, so ist:

$$x = W(n-1) - \lambda,$$

und für $n = 2$:

$$x = W - \lambda,$$

d. h. der Widerstand des betreffenden Metalls ist gleich der Dämpfungslänge des Elementes — da $W = w + g = l$ — weniger der Drahtlänge λ — Zuschusslänge — welche noch eingeschaltet wurde, um S auf $\frac{S}{2}$ genau zurückzuführen. Wenn die Zuschusslänge $\lambda = 0$, so ist $x = W$ d. h. gleich der Dämpfungslänge selbst.

Für einen zweiten Draht von anderem Material, aber von gleicher Länge und gleichem Querschnitt hat man analog:

$$x_1 = W - \lambda_1,$$

folglich:

$$x : x_1 = (W - \lambda) : (W - \lambda_1).$$

Werden die Differenzen $(W - \lambda)$ und $(W - \lambda_1)$ die Leitungsfactoren der entsprechenden Metalle genannt, dann ist das Verhältniss ihrer Widerstände gleich demjenigen ihrer Leitungsfactoren.

Als Beleg mag folgender Versuch dienen. Nachdem 150 die Dämpfungslänge des vorhandenen Zinkeisenelements, das eine Ablenkung von 61° 30′ gab, gefunden, so wurde ein Kupferdraht und Eisendraht von gleicher Länge und gleichem Querschnitte nach einander eingeschaltet, um die Zuschusslängen 141 und 95 zu finden; man hat hiernach:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{150-141}{150-95} = \frac{1}{6{,}11},$$

d. h. die specifischen Leitungswiderstände — Leitungsfactoren — meiner Drähte verhielten sich wie: 1 : 6,11.

Wird die Leitungfähigkeit des Kupfers gleich 100 gesetzt, so ist die des Eisens in diesem Falle 16,36 *).

Külp.

6.

Zur Theorie des Maximums der Stromstärke.

Der Wert der grössten Stromstärke ist:

$$S = \frac{E}{2\sqrt{WG}},$$

wo man für W, die Dämpfungslänge des Elementes weniger dem Widerstande in der Tangentenbussole setzen kann, es ist nun:

$$S = \frac{E}{2\sqrt{(l-g)G}}.$$

Wird $G = l$, ist ferner g sehr klein, und kann gegen l vernachlässigt werden, so ist:

$$S = \frac{E}{2l}.$$

d. h. das Maximum der Stromstärke ist in diesem Fall gleich der elektromotischen Kraft dividirt durch die doppelte Dämpfungslänge.

Für einen anderen Maximalwert besteht analog die Gleichung:

$$S_1 = \frac{E_1}{2l_1},$$

und hieraus:

$$S : S_1 = El_1 : E_1 l,$$

d. h. die beiden Maximalwerte stehen alsdann in einem zusammengesetzten Verhältnisse, im directen Verhältnisse ihrer elektromotorischen Kräfte und zugleich im umgekehrten Verhältnisse ihrer Dämpfungslängen.

Für $E = E_1$ ist:

$$S : S_1 = l_1 : l,$$

---

*) Um die Versuche bequem ausführen zu können, so fertigt Herr Mechaniker Waibler in Darmstadt einen Rheostaten mit Feder und Zähler für die ganzen Umdrehungen an, der zu empfehlen ist; auch sind bei demselben empfindliche Tangentenbussolen zu haben, die den nötigen Grad der Feinheit besitzen.

d. h. die Stromstärken der beiden Maximalwerte verhalten sich umgekehrt wie die Dämpfungslängen.

Wird $l = l_1$, so ist:

$$S : S_1 = E : E_1,$$

d. h. die Stromstärken der beiden Maximalwerte stehen im directen Verhältnisse ihrer elektromotorischen Kräfte, und endlich wenn $S = S_1$, so wird:

$$E : E_1 = l : l_1,$$

d. h. die elektromotorischen Kräfte verhalten sich gerade so wie ihre Dämpfungslängen.

Külp.

Litterarischer Bericht

CCXXXIII.

Methode und Principien.

Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale. Von Dr. J. Thomae, Professor an der Universität Freiburg in Baden. Halle a./S. 1875. Louis Nebert. 4°. 48 S.

Da man erst in neuerer Zeit angefangen hat die elementaren Grundlagen der Integralrechnung einer ernstlichen Prüfung zu unterwerfen, so ist es gewiss ein sehr förderliches Unternehmen, die Ergebnisse dieser Prüfung zum Gegenstand einer von der Materie der Doctrin gesonderten Schrift zu machen; denn es dient dazu die objective Entscheidung über die principiellen Fragen herbeizuführen, während eine einem bestimmten Lehrgang vorausgeschickte Behandlung derselben die Basis als subjective, durch die Wahl der Methode motivirte erscheinen lässt. In der Tat beschränkt sich die vorliegende Schrift auf die Begründung der Begriffe und elementaren allgemeinen Sätze. Fleiss und Sorgfalt in der Bearbeitung ist durchweg unverkennbar, exactes Zuwerkegehen und Bündigkeit für einen hinreichend grossen Teil zuzugestehen, damit ungeachtet wesentlicher Mängel das Ganze im Zusammenhang verstanden werden kann. Wegen dieses im ganzen bewahrten Zusammenhangs ist es aber auch nicht schwer zu erkennen, wie eine Incorrectheit im Anfang die Ursache immer neuer Dunkelheiten wird. Der Verfasser ist nämlich noch nicht darüber zur Klarheit gelangt, was unendliche Grössen sind: es fehlt in den anfänglichen Bestimmungen, so wie in principiellen Anwendungen durchweg die Unterscheidung der Variabeln und Constanten. Er sagt, die Rechnung mit irrationalen Zahlen beruhe auf einer Aus-

dehnung des Gleichheitsbegriffs. „Zahlen heissen gleich, wenn man von ihnen nachweisen kann, dass sie sich um weniger als jede dem absoluten Betrage nach noch so klein vorgegebene (zunächst rationale) Zahl unterscheiden.“ Offenbar wäre diese Differenz = 0, wenn es sich um beiderseitig constante Grössen handelte. Dann aber wäre der Sinn: Zahlen heissen einander gleich, wenn ihre Differenz null ist. Und das wäre keine Ausdehnung des Gleichheitsbegriffs. Die hier gemeinte Differenz, welche allein Sinn hat, ist also eine variabele, der Bestimmung gemäss, trotz der Vermeidung des Namens, unendlich kleine; die approximativ dargestellte Irrationale ist eine variabele Zahl, ihr ideeller Wert deren Grenzwert. Zur Erleichterung des Ausdrucks schreiben wir in vielen Fällen die Variabele statt ihres Grenzwerts, z. B. $\pi = 3, 14 \ldots$ statt $\pi = \lim 3, 14 \ldots$ und zwar ohne Zweideutigkeit, weil unter π eine Constante verstanden wird. Der Sinn der Gleichheit aber ist hier genau derselbe wie überall. Daher ist nicht der mindeste Grund zur Erweiterung des Gleichheitsbegriffs. Allein die Statuirung einer solchen ist nicht bloss überflüssig, sondern auch falsch und unklar, falsch, sofern sie die Aussage includirt, das gleich Genannte und als gleich Behandelte sei nicht eigentlich gleich, unklar, sofern sie die Bedingung des exacten Verständnisses verhüllt, die Auffassung der gesetzmässigen Variabilität. In der Tat scheint der Verfasser Mühe darauf verwandt zu haben, es mit der Formulirung der Definition denjenigen recht zu machen, denen das Erlernen jener Bedingung unbequem ist, die am liebsten solange mit unsichern Grundsätzen wirtschaften, bis sie auf einen Fehler stossen. Die Begünstigung solcher Leser, die sich namentlich durch Umgehung des Wortes „unendlich klein“ kund giebt, ist um so verwerflicher, weil die völlige Klarlegung des Sachverhältnisses äusserst leicht gewesen wäre.

Die hervortretendste Folge des genannten Mangels ist die Dunkelheit, welche beständig über dem Verhältniss der Einzelwerte der Variabeln zum Intervall waltet. Da wir das Verhalten einer Function im Intervall analytisch nur durch die Auffassung von Einzelwerten fixiren können, so musste über die Beziehung zwischen beiden Rechenschaft gegeben werden. Dies ist hier nicht geschehen; vielmehr lässt die Darstellung den Schein bestehen, als wenn die Einzelwerte das Intervall ausmachten. Namentlich wird von Rational- und Irrationalzahlen in einem Intervall (etwa von 0 bis 1) stets so gesprochen, als wären sie 2 coordinirte Classen von Zahlen, die sich in das Intervall teilten. Dabei bleibt unbeachtet, dass die Irrationalen durch kein Gesetz auf Einzelwerte beschränkt sind, sondern als blosser Rest auftreten, während die Rationalen eine unendliche Doppelreihe von Einzelwerten bilden, nach deren Wegnahme das Intervall so gross

bleibt, wie es war. Wie wir aus der geometrischen Darstellung kennen, hat das Integral $\int_0^1 f(x)\,\partial x$ einen Wert nur vermöge des Intervalls, das x durchläuft, und bleibt unverändert, wieviel auch Einzelwerte von fx, sei es auch eine unendliche unendlichfache Reihe von solchen, beliebig abgeändert werden, da ja unendlich viele Ordinaten keinen Teil der Fläche bedecken. Was so durch räumliche Betrachtung sofort erhellt, folgt aber auch aus der analytischen Definition des Integrals. Letztere gründet sich zwar auf die Einzelwerte, hebt aber die eingeführte Lücke durch die Bedingung vollständig auf, dass das Integral von der Teilung des Intervalls unabhängig sein muss. Die Definition lässt eine exclusiv rationale Teilung zu, gestattet aber auch alle rationalen Werte zu überspringen. Entweder ist in beiden Fällen das Resultat dasselbe, oder es giebt kein Integral; nie aber können die Werte von $f(x)$ für rationale x einen Einfluss auf den Wert des Integrals üben. Diesen Umstand verkennt der Verfasser augenfällig, indem er in §. 20. „Beispiele unendlich oft unstetiger integrabeler Functionen“ Fälle aufführt, wo die zu integrirende Function $f(x)$ für alle irrationalen x null ist, und gleichwol ihre Werte für rationale x noch besonders gesetzmässig bestimmt. Der Integralwert musste null sein auch ohne jenes letztere Gesetz. Dieses hatte die müssige Bestimmung, dass der für solche Fälle offenbar nicht ausreichende Wortlaut der Definition auch hier zutreffen sollte. Doch der Begriff hat sich nicht nach dem Wortlaut, sondern der Wortlaut nach dem Begriff zu richten. Um Integrale von Functionen einführen zu können, deren Einzelwerte eine vom trennenden Intervall abweichende Bestimmung haben, war der Ergänzungssatz notwendig: Das Integral einer Function ist unabhängig von allen durch Intervalle getrennten Einzelwerten derselben. Giebt es also für alle Teilungen, welche die Einzelwerte überspringen, einen von der Teilung unabhängigen Grenzwert der in der Definition bezeichneten Summe, so ist dieser unbedingt der gültige Integralwert. Dann fallen viele bloss durch Ungeschick in die Betrachtung hineingezogenen Sonderbarkeiten weg, und die Theorie vereinfacht sich bedeutend.

Wenn im Verlauf der Schrift öfters Fragen auftreten, die sich nur unter Beschränkungen des Functionsbegriffs entscheiden liessen, so ist es nicht der wahren Sachlage entsprechend, diesen Umstand als Besonderheiten jener Fragen darzustellen. Der allgemeine Functionsbegriff hat sich nach jeder Richtung hin als unfruchtbar erwiesen. Wie der Erfolg lehrt, ist die successive Erweiterung der einzig naturgemässe Weg. Man sollte daher nicht den entgegengesetzten Schein solange als möglich zu erhalten suchen. Wie nun in §. 4. der Verfasser sagt, tritt der Functionsbegriff in seiner allgemeinsten (d. h.

doch wol allgemeineren) Bedeutung zum erstenmal bei der Lehre von den bestimmten Integralen auf. Er rechtfertigt dadurch eine vorausgehende Besprechung desselben. Noch mehr gerechtfertigt ist aber jedenfalls die Forderung, dass zur Grundlegung der Theorie nicht Sätze verwandt werden, die sich auf den specielleren Begriff stützen. Da der Verfasser sie ausser Augen setzt, da er den Differentialquotienten in die Betrachtung zieht, einige auf denselben fussende Sätze über Integrale als bekannt citirt, daraus den Mittelwertsatz ableitet und diesen wieder für die fernere Begründung gebraucht, so ist die ganze vorausgehende Besprechung, abgesehen von einem grossen Teile, der schon für die Differentialrechnung notwendig, und dahin zu verweisen ist, nur eine Störung des logischen Connexes. Der Satz über den das Integral darstellenden Summengrenzwert liess sich ohne alle Vorbereitung auf algebraischer Basis begründen; aus ihm folgten dann leicht der Mittelwertsatz, die Differentiation sowie die übrigen bekannten elementaren Sätze, und die Bedingungen der Gültigkeit, die wie richtig bemerkt immer nur als ausreichend nie als notwendig nachgewiesen werden können, lagen dann weit übersichtlicher zutage, als es auf dem längeren und heterogen gemischten Wege der Herleitung erreichbar ist. H.

Die ersten Sätze der ebenen Geometrie. Grundbegriffe. Winkel. Dreieck. Viereck. Von **Aug. Moroff**, Assistenten an der Studienanstalt zu Hof. Mit in den Text gedruckten Figuren. Hof. Franz Büching. 45 S.

Indem wir, absehend von der besondern Bestimmung für gewisse Schulen, das Werkchen als einen methodischen Versuch betrachten, geleitet von dem Gedanken eine vorgefundene Abneigung der Anfänger gegen das Studium der Geometrie zu überwinden, wird es hier nur darauf ankommen, das Eigentümliche daran herauszustellen. Eine vorausgeschickte Besprechung der Grundbegriffe giebt zu erkennen, dass der Weg durch den Verstand zur Anschauung gewählt worden ist. Ein solcher hat mindestens die gleiche Berechtigung wie der umgekehrte, bei welchem überdies gewöhnlich die Verstandesentwickelung vernachlässigt, oft sogar vereitelt wird. Die beste Wahl wird immer ein Gleichmass in der Inanspruchnahme beider Fähigkeiten sein. Die Besprechung ist stellenweis einfach, leichtfasslich und exact, stellenweis wieder geschraubt und nur für Kundige verständlich, z. B. die Erklärung der Richtung durch die Visirlinie. Doch dem lässt sich durch den Vortrag abhelfen; wichtiger ist es, dass sich, und zwar nicht selten, das Richtige mit Falschem untermischt vorfindet. So steht z. B. hier: „Wir sagen, der Raum sei unbegrenzt — dennoch betrachten wir ihn als ein Ganzes —". Diese Aufstellung ist

nicht zu ergänzen, sondern geradezu umzukehren: Der Raum ist unbegrenzt; man spricht oft incorrect von ihm, als wenn er ein Ganzes wäre und Teile hätte. Ferner liest man hier die falsche Behauptung: „Eine ununterbrochene Folge von Punkten heisst eine Linie". Die Vorstellungen der Bewegung und des gleichzeitigen Stattfindens einer Vielheit mischen sich hier unklar durch einander. Dass unendlich viele Punkte keine Linie ausmachen, war wichtig genug, deutlich auszusprechen. Statt dessen wird der Unterschied geflissentlich vertuscht, und die Lücke des Verständnisses mit dem unvereinbaren Prädicat „ununterbrochen" verdeckt. Aehnliches würde viel zu rügen sein. Auch dem Parallelensatz ist ein falscher Beweis beigefügt worden; die darunterstehende Bemerkung, der Beweis sei offenbar correct, kann die fehlende Gedankenverbindung nicht herstellen. H.

Reine Analysis.

Ueber eine Function, welche einer linearen Differential- und Differenzengleichung vierter Ordnung Genüge leistet. Von Dr. J. Thomae, Professor an der Universität Freiburg in Baden. Halle a./S. 1875. Louis Nebert. 4°. 22 S.

Der Verfasser hat in den Gött. Nachr. 1874. p. 249. die Differentialgleichung, durch welche diese Function definirt ist, hergeleitet, und führt gegenwärtig die damals angekündigte Absicht aus, dieselbe in ausgedehnterer Weise zu discutiren. Er definirt im Artikel I eine Function P durch ihre Periodicität und weist im Artikel II deren Identität mit dem vollständigen Integrale einer Differentialgleichung 4. Ordnung nach, woraus ihre Existenz sich ergiebt. Im Artikel III wird gezeigt, wie sich eine Differenzengleichung durch eine nach Gauss'schen Π-Functionen fortschreitende Reihe mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten integriren lässt, im Artikel IV, dass die Function P auch noch das vollständige Integral einer Differenzengleichung 4. Ordnung ist. Im Artikel V werden die Darstellungen sämmtlicher Zweige der Function P in den Punkten $0, 1, \infty$ durch bestimmte Integrale aufgestellt, im Artikel VI die Anwendung von Integralen gerechtfertigt, welche nach gewöhnlicher Definition keinen Sinn haben. Im Artikel VII werden gewisse Coefficienten, die den Zusammenhang der einzelnen Zweige von P unter sich vermitteln, durch Π-Functionen und hypergeometrische Reihen 3. Ordnung dargestellt. Der Verfasser hebt noch eine im Artikel IV enthaltene Untersuchung als von allgemeinerem Interesse hervor, in welcher eine aus den Lösungen einer Differenzengleichung 2. Ordnung und ihren ersten Differenzen gebildete Determinante durch Π-Functionen vollständig dargestellt wird. H.

Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. Academische Vorträge von Dr. **Alfred Enneper**, Professor an der Universität zu Göttingen. Halle a./S. 1876. Louis Nebert. 541 S.

Wenn man beim Erscheinen eines neuen Lehrbuchs über elliptische Functionen hauptsächlich an 3 verschiedene Darstellungsweisen denken kann, die historische, systematische und methodische, so ist, wie der Titel es noch nicht kund giebt, hier sichtlich die zweite gewählt worden. Für die Anordnung scheint vorzugsweise die Natur des Lehrstoffs und die Uebersichtlichkeit der Resultate massgebend gewesen zu sein, wenn man auch in einzelnen Punkten nicht mit derselben einverstanden sein kann, z. B. wo die Reduction der Integrale in einem Abschnitt beginnt, in einem viel späteren fortgesetzt wird. Die Geschichte hat dabei in doppelter Hinsicht Beachtung erfahren, einesteils durch den, wie sich wol annehmen lässt, vollständigen Nachweis der zu den einzelnen Theoremen gehörigen Litteratur und durch viele darauf bezügliche Notizen, anderenteils durch die Reproduction der Methoden aus den Originalarbeiten, welche im wesentlichen beibehalten sind. Beides ist jedoch nicht ausreichend den Entwickelungsgang der Entdeckungen im Zusammenhange, sowie die Art und Weise der Beteiligung erkennen und so den historischen Gesichtspunkt als obersten oder auch nur ernstlich ins Auge gefassten erscheinen zu lassen. Mit jener Wiedergabe historischer Methoden wäre offenbar die dritte Darstellungsweise unvereinbar gewesen. Nimmt man sich zum Ziele, den gesammten Inhalt auf kürzestem, instructivstem und elegantestem Wege herzuleiten, so kann man nicht gleichzeitig Methoden aufbewahren wollen. Erwägt man aber, dass zu letzterem Zwecke die Jedermann zugänglichen Originalarbeiten genügen, und dass im ganzen schon eine grosse Anzahl von Bearbeitungen der Theorie existirt, so wird man einen wesentlichen Fortschritt in der Methode von einem neuen Gesammtwerke über den Gegenstand mehr erwarten und wünschen als nochmalige Reproductionen, und zwar einen Fortschritt, der das Ganze, nicht, wie die Darstellung des Entdeckers, das blosse Theorem im Auge hat. Der Verfasser sagt nun, dass seine eigenen Arbeiten im 9. Abschnitt enthalten sind. Dieser handelt von der Substitution $n$ten Grades und der Multiplication und besteht aus Deductionen namhafter Autoren, ohne Angabe was der Verfasser dazu getan oder daran geändert hat; eine neue Beziehung der Theoreme unter sich tritt hier so wenig wie in den übrigen Abschnitten zutage. Consequenterweise ist mit den Methoden auch die Bezeichnung beibehalten werden, was der Verfasser mit den Worten motivirt: „Die Theorie, wie sie Jacobi hinterlassen, kann nicht als abgeschlossen angesehen werden, so dass wol einer spätern Zeit eine einheitliche Bezeichnung vorbehalten bleibt.“ Unter diesem Gesichts-

punkt durfte wol allenfalls Jacobi die Beibehaltung der Legendre'schen Bezeichnung rechtfertigen, wiewol er sowenig, als es Abel getan hat, sich daran für gebunden zu halten brauchte. Heutzutage aber ist der Grund gänzlich hinfällig, da kein Mensch mehr daran denkt, dass die Theorie durch neue Entdeckungen in ihren Grundzügen verändert werden könnte. Worauf wir dann noch warten sollen, ist nicht abzusehen. Es handelt sich nicht um ein Uebereinkommen über frei zu wählende Zeichen, sondern vor allen Dingen um Anerkennung der Sachlage, die vermöge der Inversion eine andere ist, als sie für Legendre war. Die Amplitude war ein aus praktischem Grunde gewähltes Functionsargument, jetzt ist sie für Deductionen eine disponibele Vermittelung, für das Functionszeichen aber ein bedeutungsloses, entstellendes Einschiebsel. Hierüber existirt keine Meinungsverschiedenheit; entschliesst man sich aber, der Sachlage Folge zu geben, so ist auch die Wahl der Zeichen keine Frage mehr; denn, mögen es Viele oder Wenige sein, die der Gudermann'schen Bezeichnung beigetreten sind, es sind eben Alle, die jenen Entschluss gefasst haben, und von Seiten der Uebrigen liegt kein Einwand vor. Das einzige zutreffende Motiv für die Beibehaltung der Legendre'schen Zeichen ist daher die Erhaltung à tout prix, und dieses ist allerdings mit dem Geiste des Buches in voller Uebereinstimmung. Was den Umfang des Lehrstoffs betrifft, so wird man zwar in manchen Stücken dem Ermessen des Bearbeiters gern überlassen die Grenzen zu bestimmen; in der Theorie der elliptischen Functionen kann jedenfalls darüber wenig Zweifel sein. Dass aber das von Abel so kurz und elegant gelöste Problem der Division der elliptischen Functionen, nebst der daraus leicht hervorgehenden Lösung für die Thetafunctionen keine Aufnahme gefunden hat, ja nicht einmal erwähnt ist, lässt sich kaum durch irgend welche Erwägungen erklären. Nach Behandlung der Multiplication im letzten Abschnitt muss die Frage der Division entstehen; hier aber bricht das Lehrbuch ab und lässt den Leser ohne Bescheid. Bei allem indes, was im einzelnen zu misbilligen bleibt, ist anzuerkennen, dass das Buch das Interesse der Studirenden mehr im Auge hat, als es eine Reihe von Erscheinungen auf dem gleichen Gebiete betätigt haben. Nachdem eine zeitlang Methoden beliebt waren, welche die Anfangsgründe aus der Theorie der Complexen herleiten, also an sich Deutliches auf undeutlichen Grund stellen, dadurch die Einbildung des Wissens mehr als die selbständige Productions- und Urteilskraft fördern, den Studirenden gerade das verschweigen, was sie bei Vorkommen elliptischer Integrale in eigenen analytischen Rechnungen notwendig brauchen, um von der Theorie Anwendung zu machen, musste eine Rückkehr zur natürlichen reellen Methode schon als solche willkommen sein, so wünschenswert es auch war, dass sie sich durch höhere Ausbildung mehr empfohlen hätte, gerade

um der überhand nehmenden Macht des verkehrten didaktischen Princips den Boden zu entziehen. H.

Geometrie.

Elemente der Geometrie. Erste Abtheilung. Geometrie der Ebene. Systematisch entwickelt von Dr. Friedrich Kruse, Oberlehrer am königlichen Wilhelmsgymnasium zu Berlin. Berlin 1875. Weidmann. 319 S.

Das Vorliegende ist eine neue Bearbeitung der Geometrie der Lage. Obgleich keine directe Aeusserung darüber gegeben ist, scheint doch die Bestimmung für den Schulgebrauch teils indirect angedeutet zu sein, teils aus dem Umfang der behandelten Gegenstände zu erhellen. Der Verfasser sagt, auf fremde Aeusserung gestützt: es habe bisher nur an dem einen gefehlt, dem Principe der Projectivität auch im Gebiete der Euklidischen Geometrie die Herrschaft zu verschaffen; er glaube mittels einer eingehenderer Gliederung der perspectivischen Lage diese Herrschaft fest begründet und die Grundlagen eines Lehrgebäudes klar gelegt zu haben, das den richtigen wissenschaftlichen und didaktischen Anforderungen in hohem Grade genüge. Da die gegenwärtige Bearbeitung die räumlichen Grundbegriffe gründlicher, exacter und richtiger behandelt als die meisten Lehrbücher der Geometrie es tun, so ist es wol am Orte, die bestimmten Punkte zu besprechen, welche in dieser Hinsicht verschiedenes vermissen lassen. Der erste bezieht sich auf die Ausführungen im Vorwort. Hier ist das Verhältniss, in welches der Verfasser die Geometrie der Lage zur Euklidischen Geometrie stellt, ganz ungenügend. Es trifft nicht einmal genau zu, dass letztere von der Grösse, erstere von der Lage handele: in der Euklidischen sind, gleichviel ob viel oder wenig davon die Rede ist, die Elemente der Lagenbestimmung vollständig enthalten. Was er aber ganz ignorirt, ist das entgegengesetzte didaktische Ziel beider, dass nämlich letztere die Concentration auf die notwendigen Bedingungen mathematischer Erkenntniss, erstere die Ausbreitung und Systematisirung des Lehrstoffs verfolgt. Soll aber erstere die Herrschaft im Gebiete der letzteren gewinnen, so muss man verlangen, dass sie entweder dahin gelangt das Concentrationsvermögen in gleichem Masse zu cultiviren oder zeigt, dass es überflüssig sei, was kein wissenschaftlicher Mathematiker zugeben wird. Die gegenwärtige Bearbeitung besteht nur in Ausbreitung und Gliederung. Soviel man auch Wert auf diese legen mag, zur mathematisch wissenschaftlichen Bildung den Grund zu legen reicht sie nicht hin. Anders haben andere Bearbeiter das Verhältniss aufgefasst.

Thomae (s. litt. Ber. 229. S. 6.) charakterisirt die Geometrie der Lage als die allgemeinere, auf weniger Voraussetzungen basirte, woraus eine wertvolle Verwendung für das Studium der Methodik, aber nicht für den Elementarunterricht hervorgeht.

In dem Hauptstück über die Grundbegriffe finden sich 3 Stellen, welche der Ergänzung bedürfen. Bei Einführung der Bewegung (§. 4. S. 3) fehlt die notwendige Voraussetzung des Grundbegriffs der Congruenz. Wird diese Voraussetzung nicht ausgesprochen, so bleibt eine Unklarheit für die ganze Folge zurück. Schreibt man einem Raumgebilde Bewegung zu, so gehört dazu die Vorstellung, dass es bei Ortsveränderung dasselbe bleibe. In der Physik beruht diese Identität auf der Materie, in der Geometrie, welche davon abstrahirt, kann sie nur in der Congruenz bestehen, man müsste denn den Begriff der Bewegung weiter ausdehnen wollen, als es hier und gewöhnlich geschieht. Der Mangel macht sich besonders bei Erklärung der Geraden bemerklich. Zweitens ist die Erklärung einer Strecke (§. 4. S. 5.) nicht in Uebereinstimmung mit der Anwendung. Nach jener giebt es zwischen 2 Punkten nur eine Strecke, nach dieser 2 entgegengesetzte. Letzteres ist richtig, die Erklärung ist zu berichtigen. Drittens ist (§. 7. S. 6.) bei Verschiebung einer Geraden nur von Verschiebung in sich die Rede; wie es mit der Verschiebung nach aussen steht, fehlt jede Erörterung. H.

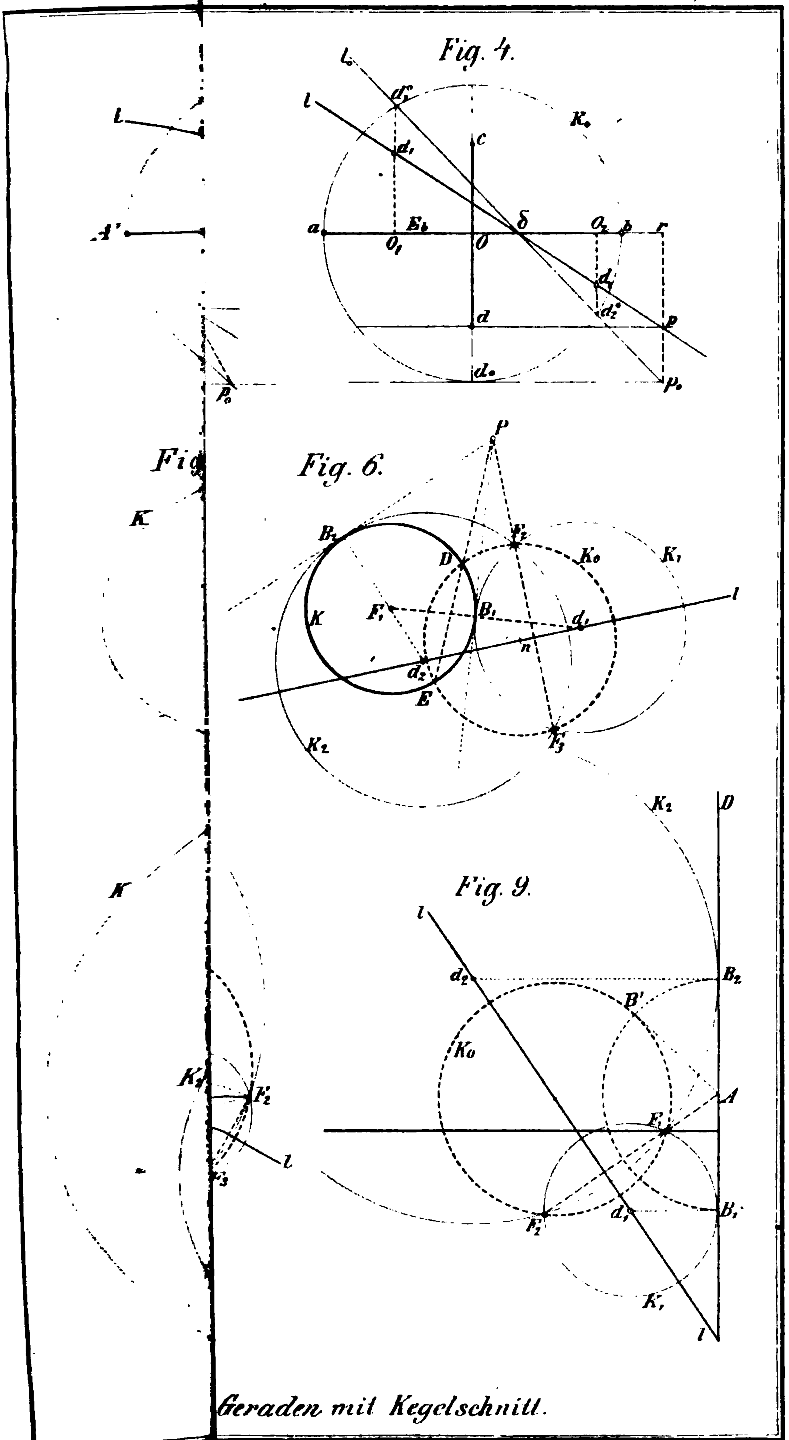
Éléments de géométrie projective. Par Luigi Cremona, Directeur de l'école d'application des ingénieurs à Rome, traduits, avec la collaboration de l'auteur, par Ed. Dewulf, Chef de bataillon du Génie, Officier de la Legion d'Honneur, etc. Première partie. Paris 1875. Gauthier-Villars. 272 S.

Die Bestimmung des Buchs ist es nach Erklärung des Verfassers, die Kenntniss der Theorien und Methoden der neuern synthetischen Geometrie, von Carnot, Brianchon, Poncelet, Möbius, Steiner, Chasles, Staudt u. A. sämmtlich in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts geschaffen, auf den italienischen Schulen zu verbreiten. Obwol er dem Werke in keiner Hinsicht Originalität zuschreibt, so ist dasselbe doch keine blosse Reproduction; die einheitliche Verarbeitung nach dem Gesichtspunkt leichtest möglicher Aneignung ist jedenfalls eine Leistung, die ihm als eigene zukommt. Er deutet dies nur in Form einer Rechtfertigung an, indem er sagt, dass er sich an den Gang der einzelnen Autoren nicht gebunden habe. Eine gleiche Freiheit nimmt er zum Zwecke der Verdeutlichung und Vereinfachung auch in Anspruch, indem er sich nicht auf exclusiv planimetrische Betrachtung beschränkt, vielmehr öfters auch Raumgebilde ausser der

Ebene zuzieht. Eine dritte Licenz, zu der er sich bekennt, ist, dass er nur selten die Quellen citire, auch bisweilen andere als die ersten Bearbeitungen angebe; er habe bei den wenigen Citaten allein den Zweck, die Jugend mit den Namen der grossen Meister der Wissenschaft bekannt zu machen. Gegen das Verfahren an sich, nur unter anderm Gesichtspunkte, würde nichts einzuwenden sein; bei Anwendung oder Verbreitung längst bekannter Sätze und Methoden denkt man gewöhnlich nicht daran, ihre Entdecker zu nennen, und oft wird man Veranlassung haben auf eine leichter zugängliche Schrift als auf die Originalschrift zu verweisen. Mit dem hinzugefügten Motiv hingegen, wenn man von dem vorliegendem Falle und den Personen absieht, auf die es sich hier bezieht, wird die Maxime einer, unserer Zeit durchaus nicht fremden, intriganten Agitation proclamirt, welche unter dem obigen Vorgeben durch vorzugsweise Citation berühmter Namen die unverdiente zeitweilige Berühmtheit zu schaffen und zu vermehren, die ihr entgegenstehenden Leistungen in Unbekanntschaft zu erhalten sucht. Da der Verfasser, natürlich ohne es zu wollen, diese Taktik durch Bekenntniss zu jenem Motiv selbst in dem flagranten Falle gutheisst, wo der verschwiegene, weniger gekannte Autor wirklich dasselbe geleistet hat — denn meistens wird das verschwiegen, was die Richtung des bevorzugten Schriftstellers kreuzt — so ist voller Grund gerade hier auf die Verwerflichkeit des Princips, welches unter populärem Titel angekündigt nicht nur einer grossen Ungerechtigkeit, sondern auch einer Verzögerung der Fortschritte der Wissenschaft dient, aufmerksam zu machen. Doch nur gegen das Princip soll hier Einspruch erhoben werden; im Vorwort finden sich die Entdecker der Reihe nach aufgeführt, auf welche im Hauptwerke kein Bezug genommen werden konnte. H.

Ueber Pole und Polaren der parabolischen Curven dritter Ordnung. Von Dr. Ad. Hochheim, Oberlehrer an der Höheren Gewerbeschule zu Magdeburg. Halle a. S. 1875. Louis Nebert. 4°. 16 S.

Die Schrift untersucht nach einander Gestalt, Lage, Eigenschaften der konischen, der geraden Polare, die Durchmesser einer parabolischen Curve 3. Ordnung, die Pole einer Geraden, Beziehungen der Polaren zu einander, die gemischte Polare zweier Punkte, Polaren, deren Pole auf einer parabolischen Curve 3. Ordnung liegen, die Hesse'sche Curve einer solchen Curve, die harmonische Polare, den begleitenden Kegelschnitt, die Polokonik und gemischte Polokonik zweier Geraden. H.



Steindruckerei von F.W. Kunike in Greifswald

Fig. I.

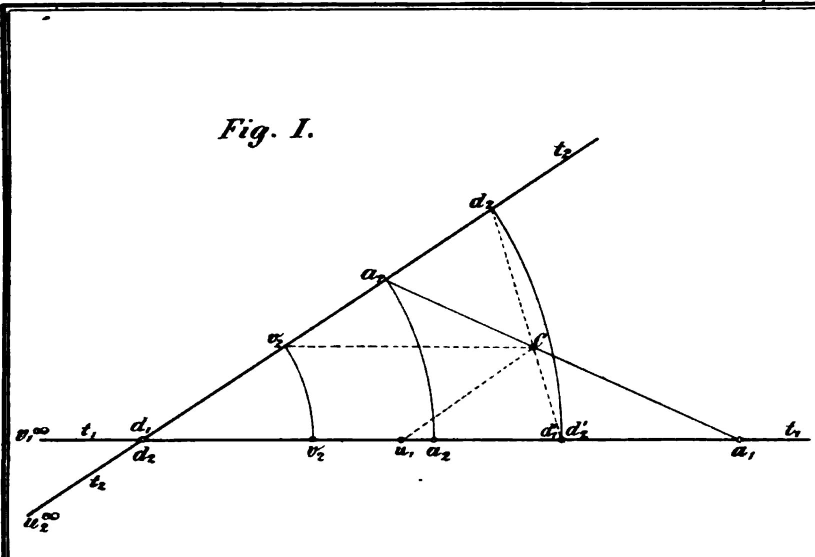
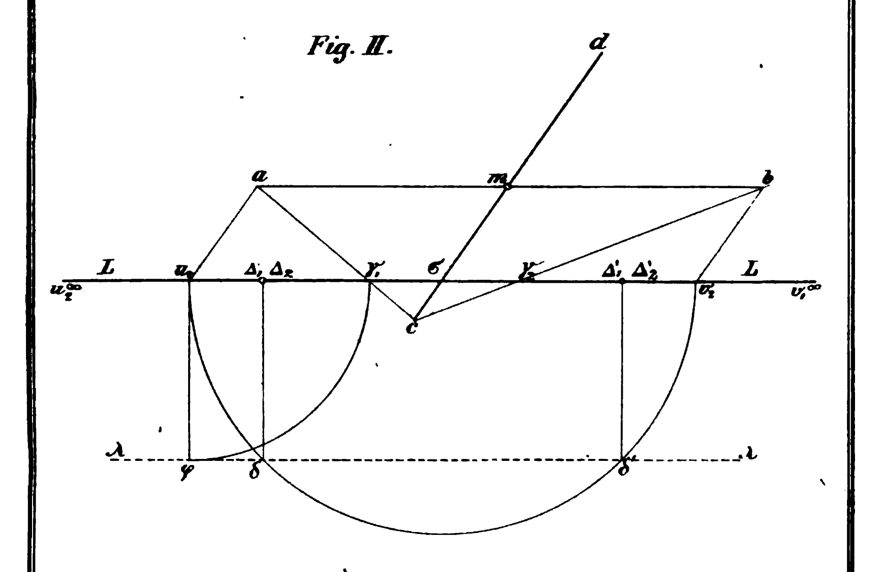


Fig. II.



II. Peschka: Construction d. Durchschn. von Geraden mit Kegelschn.

Druck von F. W. Kunike.

12.

Fig. 16.

Fig. 19.

Steindruckerei von F. W. Kunike ...

Teil

Taf. IV.

Fig. 7.

P
b_1
A
o
b_2
b
K
a_1
p_1
a
γ

Fig. 8.

d_1 n
e
c
a
d
d'
f
b'
b
c

Grun

Steindruckerei von F. W. Kunike, Greifswald.

Fig. 12.

Fig. 15.

...he Aufgaben.

Grun...

Steindruckerei von F. W. Kunike, Greifswald.

Fig. 18.

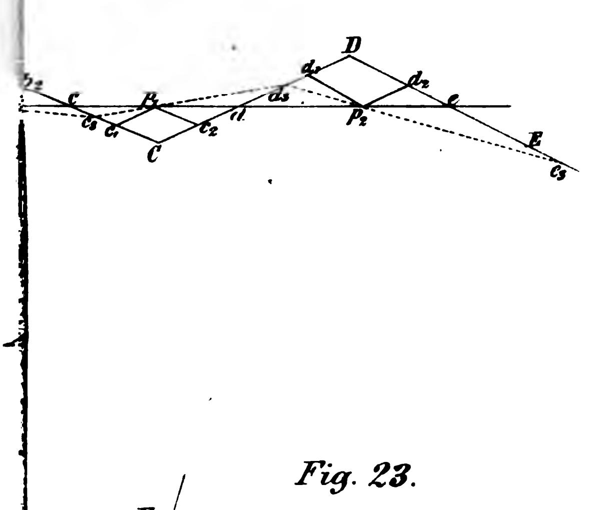
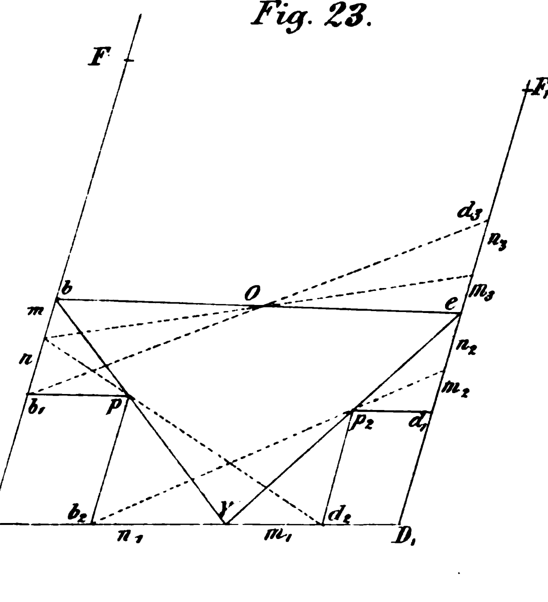


Fig. 23.



Steindruckerei von F. W. Kunike, Greifswald.

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Neunundfunfzigster Teil. Zweites Heft.

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1876.

Braunschweig. **PROSPECTUS.** April 1876.

Lehrbuch
der
Physik und Meteorologie.

Theilweise nach
Pouillet's Lehrbuch der Physik
selbständig bearbeitet
von
Dr. Joh. Müller,
weil. Professor zu Freiburg im Breisgau.

Achte umgearbeitete und vermehrte Auflage
bearbeitet
von
Leop. Pfaundler,
Dr. der Philosophie, Besitzer des goldenen Verdienstkreuzes mit der Krone, Professor der Physik an der Universität Innsbruck, correspondirendes Mitglied der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien und mehrerer anderen gelehrten Gesellschaften.

In drei Bänden.

Mit gegen 2000 in den Text eingedruckten Holzstichen, Tafeln, zum Theil in Farbendruck, und einer Photographie.

Erster Band.
gr. 8. Fein Velinpap. geh. Erste Abtheilung. Preis 4 Mark.

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn in Braunschweig.

Zur Zeit als dieses Lehrbuch zum ersten Male erschien, hielt man es noch vielfach für nothwendig, in dem Prospectus naturwissenschaftlicher Werke, die grosse Bedeutung der Naturwissenschaften hervorzuheben. Man glaubte durch Hinweis auf die Erfindungen der Dampfmaschine, der Galvanoplastik, des Telegraphen, des Fernrohrs, des Mikroskops u. s. w. darlegen zu müssen, dass die Physik speciell eine eminent nützliche und praktisch verwerthbare Wissenschaft sei und dass ursprünglich unfruchtbar scheinende theoretische Untersuchungen später grosse praktische Bedeutung erlangen können.

Es war dies die Zeit des Misstrauens der Empiriker gegen die Leistungsfähigkeit der aufstrebenden exacten Wissenschaft; es war die

Zeit, in der Justus Liebig, von den kurzsichtigen „Praktikern" c
bayerischen Landtages provocirt, die treffliche Antwort ertheilte, da
die Akademie der Wissenschaften nicht dazu da sei, dem Landwirt
Recepte zur Vertilgung der Mäuse zu liefern. Diese Zeit ist vorüb
Der Kampf der reinen Empirie mit der Wissenschaft ist ausgefochte
letztere hat den Kampfplatz behauptet. Wir haben daher nicht me
nöthig, die Bedeutung der Naturwissenschaften hervorzuheben.

Was die Physik speciell betrifft, so hat sie seit jener Zeit no
ausserordentlich an Terrain gewonnen. Seitdem nämlich die Mine
logen, Botaniker und Zoologen aufgehört, ausschliesslich oder vorwiege
Systematik zu betreiben, seitdem die Krystallographie, die Pflanze
und Thierphysiologie Bedeutung gewonnen, ist Physik eine unentbel
liche Hülfswissenschaft für diese Disciplinen geworden und kann wed
der Mineralog, der Berg- und Hüttenmann, noch der Land- und For
wirth physikalischer Kenntnisse entrathen. Die innigen Beziehung
der Physik zur Chemie und die unentbehrlichen experimentellen Hülf
mittel, welche jene dieser liefert, zwingen aber auch den Chemike
Pharmaceuten und Industriellen sich in der Physik mehr zu orientire
Der Mediciner endlich hängt mit tausend Fäden an unserer Wisse
schaft. Er musste dies stets mehr erkennen, je mehr er sich übe
zeugte, dass die Vorgänge im Organismus nicht einer besondern Leben
kraft, sondern den allgemeinen physikalischen und chemischen Kräfte
ihre Erscheinung verdanken.

Mit dem Gesagten allein schon wäre der Physik eine ausse
ordentliche Verbreitung gesichert. Aber ihr Feld muss noch grösse
werden. Es muss sich die Ueberzeugung Bahn brechen, dass sie übe
haupt gar Niemandem, der auf Bildung Anspruch machen will, *völli*
fremd bleiben darf.

Auch die sogenannten humanistischen Wissenschaften stehen näm
lich nicht ausser Zusammenhang mit derselben. Sehen wir auch da
von ab, dass unsere religiösen Vorstellungen durch die Ergebnis
physikalischer Forschungen beeinflusst wurden und noch werden, da
also der Theologe sie nicht ignoriren sollte; so werden wir doch v
Allem vom Philosophen verlangen, dass er deren Resultate berüc
sichtige. Es wird dies für ihn sehr heilsam sein und ihn viellei
davor bewahren, ein zweites Mal so tief zu sinken, als er in Deutschla
zur Zeit der Herrschaft der sogenannten Naturphilosophie gesunken i

Die historischen Wissenschaften hängen durch Chronologie u
Geographie mit der Physik zusammen, und wenn auch letztere imm
mehr einen selbstständigen und naturwissenschaftlichen Charakter a
zunehmen im Begriffe steht, so wird doch der nicht einseitige Histo
ker gezwungen sein, sich mit jenem Gränzgebiete, auf welchem si
physikalisches und historisches Wissen begegnen, bekannt zu mach

Aber auch selbst die Sprachwissenschaft kann sich nicht ga
von uns isolirt halten. Seitdem die Physiker das Wesen der Voc
ergründet haben, seitdem es theoretisch möglich geworden, die fe
sten Dialectverschiedenheiten der Vocalaussprache durch physikalisc

Hülfsmittel zu unterscheiden, ja durch Formeln zu definiren, seitdem überhaupt eine Physiologie der Sprache entstanden ist, seitdem ist auch dieser Zweig der Sprachwissenschaft der physikalischen Methode unterworfen.

Die Physik gehört demnach zur allgemeinen Bildung, sie muss ein Gemeingut aller Derjenigen werden, welche fern von engherziger Einseitigkeit ausser ihren speciellen Beschäftigungen und Forschungen einen freien Ueberblick über die uns umgebende Welt in ihrer Einwirkung auf unsere Sinne zu gewinnen suchen.

Selbst in rein formeller Hinsicht hat die Kenntnissnahme der in der Physik am glänzendsten angewandten induktiven Methode eine hohe Bedeutung, indem sie uns bei richtiger Auffassung vor Täuschungen über den Werth unserer Vorstellungen bewahrt, uns lehrt, Sicheres vom nur Wahrscheinlichen oder nur Möglichen zu unterscheiden und uns die Grenzen erkennen lässt, über welche hinaus wir weder durch Beobachtungen noch durch Schlüsse absolute Wahrheit finden können.

Durch das Vorstehende ist das Bedürfniss nach einem Lehrbuche erwiesen, welches sich die Aufgabe gestellt hat, in leichtfasslicher Weise und mit Zuhilfenahme derjenigen mathematischen Kenntnisse, welche bei jedem Gebildeten vorauszusetzen sind, die Hauptlehren der Experimentalphysik weiteren Kreisen zugänglich zu machen. Dieser Aufgabe hat Müller's Lehrbuch in sieben auf einander folgenden Auflagen seit dem Jahre 1844 mit Erfolg entsprochen und demselben Zwecke hofft es auch in dieser achten vom Unterzeichneten nach den neuesten Fortschritten der Wissenschaft ergänzten Auflage zu dienen.

In besonderer Rücksicht auf alle die zahlreichen Liebhaber unserer Wissenschaft, welche nicht Gelegenheit finden, akademische Vorträge mit Experimenten zu besuchen, bietet das vorliegende Lehrbuch eine ausführlichere Beschreibung der Apparate und der damit anzustellenden Versuche, als in den meisten Compendien zu finden ist, und unterstützt das Verständniss durch eine grosse Anzahl vorzüglicher Abbildungen im Texte und auf beigefügten Tafeln. Dasselbe gewinnt dadurch auch Bedeutung für die Mechaniker, welche oft ihre Arbeiten nach diesen Abbildungen ausführen können.

Der grösseren Handlichkeit wegen erscheint das Buch statt wie bisher in zwei, diesmal in drei Bänden, von denen der erste die allgemeine Physik und Akustik, der zweite Optik und Wärmelehre, der dritte Elektricität, Magnetismus und Meteorologie enthalten wird. Von diesen wurde der erste Band noch von dem für die Wissenschaft zu früh verstorbenen Verfasser Professor Dr. Müller bearbeitet. Die Revision eines Theils dieses Bandes und die Neubearbeitung der folgenden Bände unter Mitbenutzung hinterlassener Aufzeichnungen des Verfassers hat der Unterzeichnete übernommen.

Innsbruck, 10. April 1876.

Leop. Pfaundler.

In F. Soennecken's Rundschriftverlag in Remscheid erschien in III. Auflage und ist durch alle Buchhandlungen Deutschlands und des Auslandes zu beziehen:

Die Rundschrift

fach ist und kein besonderes Geschick erfordert, so haben selbst solche Schüler gute Fortschritte gemacht, welche keine Begabung für graphische Fertigkeiten besitzen.

In Folge der günstigen Resultate wird, nachdem die betreffenden Hefte im Druck erschienen sind, die Einrichtung getroffen werden, dass alle Schüler der hiesigen Gewerbeschule das Schreiben der Rundschrift erlernen.

Remscheid, 24. März 1875.

Dr. Krumme,
Direktor der städt. Gewerbeschule.

Vorwort des Verfassers.

So grossen Werth wir Deutsche gemäss der hohen Entwickelung unserer Sprache auf eine deutliche und schöne Handschrift legen, so fehlt es uns doch immer noch an einer eleganten und zugleich deutlichen Zierschrift, welche ohne Kunstanwendung geläufig geschrieben werden kann. Diesem Bedürfnisse abzuhelfen ist der Zweck des vorliegenden Heftes. Es repräsentirt eine Unterrichts-Methode für die allgemein beliebte, dem eigentlichen Wesen nach jedoch noch wenig bekannte

Rundschrift

und lehrt **ohne Voraussetzung kalligraphischen Talentes** durch Erklärung und methodische Behandlung der Schriftzüge **jeden Schreibfähigen** diese edle Zierschrift **nach wenigen Uebungsstunden kunstgerecht und geläufig schreiben.**

Die bis jetzt bei uns erschienenen Rundschrift-Anleitungen, selbst die auf den Welt-Ausstellungen in Paris 1867 und Wien 1873 preisgekrönten, sind für den Selbst-Unterricht nicht besonders geeignet. Sie zeigen im Vergleich mit der Rundschrift-Darstellung in D'Alemberts Encyclopädie (Recueil de planches sur les sciences et les arts, seconde livraison, en deux parties, première partie. Paris

Rundschriften in derselben schwierigen Construction wie jene Encyclopädie meist ohne nähere Erklärung nur als ein fertiges Ganzes dar und entbehren:

1. der auf Erkenntniss des Wesens der Rundschriftformen gegründeten strengen Durchführung eines folgerichtigen Systems,
2. der für eine **geläufige** Schrift **nothwendigen gleichmässigen** Federhaltung und
3. der Erwähnung, resp. Erklärung der abgestumpften Federn und ihrer Behandlung,

so dass die dargestellten Schriften auch von geschickten Kalligraphen nur mit Mühe nachgebildet und überhaupt nicht geläufig geschrieben werden können.

Die Rundschrift-Ziffern und Interpunktionen fehlen sogar auch in den prämiirten Ausgaben.

Nach der vorliegenden, für Schulen sowol als auch für den Selbst-Unterricht bestimmten Methode entwickelt sich die Schrift von den einfachsten bis zu den anscheinend schwierigsten Buchstaben nach einem bestimmten Gesetze aus einzelnen, wenigen Grundzügen. Sie erleichtert durch Förderung des Verständnisses für die kunstgerechten Formen der Schrift das Schreiben selbst und bedingt durch ihre eigene Folgerichtigkeit eine gleichmässige, der natürlichen Fingerstellung entsprechende bequeme Federhaltung. Weitere Vorzüge hat dieses Heft durch die **genaue Erklärung und bildliche Darstellung der Federhaltung** und meiner **besonders zweckmässig construirten Rundschriftfedern**, ferner durch die beigegebenen **Linienblätter**, sowie namentlich durch die Beispiele, welche die vielfache Anwendbarkeit der Schrift in **Gewerbe-, Bau-, Zeichen-** und **Handelsschulen**, sowie in der Praxis der **Ingenieure, Architekten, Lithographen, Kaufleute** u. s. w. beweisen.

Herr Geheimer Regierungs-Rath Professor F. Reuleaux, Direktor der Königl. Gewerbe-Akademie in Berlin etc. etc., hat mir die Ehre erwiesen, meine Methode zu revidiren und **mit wesentlichen Verbesserungen zu versehen**, wofür ich demselben zu grossem Danke mich verpflichtet fühle.

Möge das Heft seinen Zweck, eine ächte Rundschrift, als die eleganteste, deutlichste und leichteste Zierschrift, in weitere Kreise einzuführen nicht verfehlen.

Remscheid, im August 1875.

F. Soennecken.

Urtheile der Presse.

Leipziger „Illustr. Zeitung." Hier und da, am meisten in Frankreich, weniger häufig im Süden und noch seltener im Norden von Deutschland findet eine Schriftgattung Verwendung, welche, in ihren Formen eine Art Mittelding zwischen der englischen Currentschrift und der Druckschrift, den Vortheil der deutlichen Lesbarkeit der letzteren mit dem der leichten Schreibbarkeit der ersteren verbindet. Diese Schriftart, die sogenannte *Rundschrift*, ist von F. Soennecken in Remscheid methodisch ausgebildet worden zu einem von allen Künsteleien und Schnörkeln freien, formenschönen und wirklich geläufig zu schreibenden Schriftsystem, das sich nicht nur eignet zum Einschreiben von Bezeichnungen auf Plänen und Zeichnungen, sondern auch zum Schreiben anstatt der gewöhnlichen Currentschrift. Soennecken hat in einem Werkchen *„Die Rundschrift"* (Remscheid, F. Soennecken's Rundschrift-Verlag) eine [illegible] Anleitung zur Erlernung seines Schriftsystems gegeben. Geh. Regierungsrath [illegible]

XII.

Ueber die Abhängigkeit zwischen Magnetismus und Härte des Stahles.

Von

Herrn Dr. *Ch. Ruths*,
Lehrer an der Gewerbeschule zu Dortmund.

I.

Die bekannte Eigenschaft des Stahles, durch Anlassen zu verschiedenen Oxydationsfarben bequem in verschiedenen Härtegraden dargestellt werden zu können, bietet uns ein Mittel dar, den Einfluss der Härte oder der dieselbe bedingenden Molecularkräfte auf den Magnetismus der Körper (zunächst des Stahles) einigermassen studiren zu können — eine Untersuchung, welche mit Rücksicht auf die magnetische Moleculardrehungs-Theorie nicht ohne Interesse sein wird. Zwar haben wir in der Oxydationsfarbe des angelassenen Stahles kein scharfes Kennzeichen über die Härte einer Stahlmasse; halten wir dieselbe aber in Ermangelung eines besseren einfachen Prüfungs-Mittels einmal fest, so wird man innerhalb gewisser Grenzen — insbesondere, wenn es sich um Vergleichung von Stahlmassen handelt, deren Dimensionen nicht allzusehr von einander abweichen — die Oxydationsfarbe als ein sicheres Moment zur Beurteilung der relativen Härte betrachten können.

Die Resultate nun, welche bis jetzt von verschiedenen Beobachtern bezüglich der Grösse der Magnetismen verschieden harter Stahlstäbe erhalten wurden, sind, soweit mir bekannt, kurz folgende:

a) Inducirter (temporärer) Magnetismus. Alle Beobachter stimmen hier in dem Satze überein, dass bei übrigens gleichen

Verhältnissen ein weicherer Stab eine grössere Menge Magnetismus temporär annehme, als ein härterer Stab. — Ich werde in der Folge hierauf, sowie auf einige specielle Andeutungen verschiedener Physiker wieder zurückkommen.

b) Remanenter (permanenter) Magnetismus. Hier sind die Ansichten geteilt; ich teile deshalb die Resultate der verschiedenen Exerimentoren kurz mit:

Coulomb*) fand für einen bei 1187° C. gehärteten Stahlstab (Länge = 162 mm., Breite = 14 mm., Dicke = 5 mm.), dass derselbe durch Anlassen zu Temperaturen von 15° bis 1250° C. successive mehr die Fähigkeit, Magnetismus zurückzuhalten (Coercitivkraft) verliere, woraus folgen würde, dass ein weicherer Stab weniger permanenten Magnetismus annehmen könne, als ein härterer. Ein cylindrisches Stahlstück (Länge = 336 mm., Dicke = 4 mm.) gab jedoch gerade das entgegengesetzte Resultat. Doch sollen dann stets im Innern des Stabes ausser dem Indifferenzpunkt in der Mitte noch zwei solche zu beiden Seiten auftreten, welche dann, wenn das Verhältniss von Länge zu Durchmesser unter 30, mit dem Indifferenzpunkte in der Mitte zusammenfielen.

Das Resultat, dass ein weicher Stab weniger Magnetismus zurückhalten könne, als ein härterer, geht auch aus den Versuchen folgender Beobachter hervor:

Müller**): Versuche mit Stäben von 167 mm. Länge und 6 mm. Dicke.

Plücker***): Versuche mit harten und angelassenen Stahlknöpfen von 14 mm. Länge, 8 mm. Durchmesser, welche von Magneten abgerissen worden waren.

Wiedemann†): Versuche mit Stäben von 220 Länge und 13,5 mm. Dicke.

Diesen Beobachtern stehen aber entgegen:

Hansteen††), der auf Grund von Versuchen mit Stahlstäben von 43 Lin. Länge, 1,1 Lin. Dicke dem weichen Stahle grössere Coercitivkraft zuschreibt, als dem harten Stahle.

*) Vergl. Biot, Traité de Physique, Tome III, pag. 108 etc.
**) Pogg. Ann. Bd. 85. S. 157.
***) Pogg. Ann. Bd. 94. S. 28.
†) Pogg. Ann. Bd. 106. S. 169 etc.
††) Pogg. Ann. Bd. 3. S. 236.

Lamont*) tritt gleichfalls für diese Ansicht in entschiedener Weise ein, Versuche mit Stäben von 81,2 Lin. Länge, 1,5 Lin. Breite und Dicke mitteilend.

Die hiernach stattfindenden Widersprüche in den Angaben verschiedener Beobachter einesteils, andernteils aber die oben berührte Wichtigkeit des Gegenstandes mit Rücksicht auf die magnetische Drehungstheorie, veranlassten mich, in dieser Beziehung eigene umfassende Versuchsreihen mit Stahlstäben von den verschiedensten Dimensionen anzustellen, indem ich stets solche von gleichen Dimensionen aber ungleicher Härte der Einwirkung gleicher inducirender Kräfte unterwarf und beziehentlich inducirten und remanenten Magnetismus untersuchte.

II.

Bei der Auswahl des von mir angewandten Materiales musste ich zuvörderst in Rücksicht ziehen, dass bei sehr langen Stahlstäben eine gleichmässige Härtung mechanisch fast nicht erreicht werden kann, wodurch dann in der Regel durch die mangelnde Structurhomogeneität auch eine ungleichmässige Verteilung des Magnetismus im Innern der Stäbe stattfindet. Ich habe daher bei meinen meisten Versuchsreihen englischen Stahldraht verwandt, der in zahlreichen Dickenverhältnissen im Handel vorkommt, und indem ich über eine Länge der einzelnen Stäbe von 120 mm. nicht hinaus ging, suchte ich vielmehr die verschiedenen Aenderungen des Axenverhältnisses (Länge zu Dicke) durch Auswahl verschiedener Dicken zu erreichen. — Ich teile indessen, aus den von mir an ca. 50 Stahlstäben angestellten Versuchsreihen nur die Beobachtungen an einem Satz von 120 Stäben mit, weil die übrigen im Wesentlichen doch nur die später gezogenen Folgerungen bestätigen. Von diesen 120 mm. langen Stäben gebe ich in der folgenden Tabelle die Dimensionen etc.

Nr.	Gewicht in mgr.	Radius in mm.	Volumen in cub. mm.	Axen-Verh. approx.
I.	1990	0,85	272	70
II.	4310	1,20	542	50
III.	6220	1,45	792	40
IV.	10550	1,90	1360	30
V.	17500	2,45	2261	25
VI.	25650	2,95	3279	20

*) Hdbch. d. Magn. S. 249, 250, 252, 253, 223.

Von jeder solchen Dimension (jeder Nummer) liess ich 3 Stäbe verfertigen, die aus demselben Drahtstücke genommen wurden und bei deren Auswahl, soviel äusserlich erkennbar, auf möglichste Homogeneität gesehen wurde. Sämmtliche Stahlstücke wurden nun in der bekannten Weise vollkommen (glashart) gehärtet, sodann von jeder Dimension ein Stück durch nicht zu schnelles einmaliges Erhitzen im Sandbade und nachheriges langsames Abkühlen zur Oxyd.-Farbe „dunkelgelb" und ein desgl. zur Oxyd.-Farbe „dunkelblau" gleichmässig angelassen. Da zu gleicher Oxydations-Farbe bei derselben Stahlsorte und übrigens gleichmässiger Behandlung wohl der gleiche Molecularzustand vorausgesetzt werden darf, so sehe ich auch bei einer später vorzunehmenden Vergleichung meiner Versuchsresultate die Stahlstücke derselben Oxyd.-Farbe als von gleicher Structur an. Hiergegen könnte man zwar noch einwenden, dass, insbesondere bei dickeren Stäben, durch die Operation des Härtens und Anlassens nur die Oberfläche eine bezügliche Veränderung erleidet, während der innerste Kern weich bleibt; da aber nach den bekannten Versuchen von v. Feilitzsch auch der Magnetismus eines Stabes sich zuvörderst in den äussersten Schichten ansammelt und erst mit wachsenden inducirten Kräften (mit der Annäherung an das Maximum) in das Innere eindringt, so wird doch dieser Umstand bei den folgend mitgeteilten Versuchsresultaten, wo die dickeren Stäbe von ihrem Maximum noch weiter entfernt sind, die gezogenen Schlussfolgerungen wohl kaum wesentlich beeinträchtigen.

III.

Die Magnetisirung der vorbeschriebenen 120 mm. langen Stäbe geschah zuvörderst mittelst einer Spirale von $2a = 120$ mm. Länge, $r = 9$ mm. mittl. Radius und $n = 320$ Windungen übersponnenen Kupferdrahtes. Ein dieselbe durchfliessender Strom von der Intensität i übt nach W. Weber*) auf einen in ihrer Axe liegenden, von der Mitte um b entfernten Punkt eines inducirten Stabes eine elektromagnetische Scheidungskraft aus:

$$X = \frac{\pi n i}{a}\left[\left(1+\frac{r^2}{(a-b)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1+\frac{r^2}{(a+b)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

Die mittlere Wirkung auf einen symmetrisch gegen die Mitte in die Spirale eingebrachten Stab von der Länge $= 2l$ wird daher sein:

$$X = \frac{\pi n i}{2la}\int_{-l}^{+l}\left[\left(1+\frac{r^2}{(a-b)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1+\frac{r^2}{(a+b)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]db$$

*) Elektrodyn. Massbest. S. 546.



oder nach Ausführung der Integration und Einführung der speciellen Werte:

$$X = 31{,}1 \, . \, i,$$

welcher Wert jedoch während der Dicke der Stäbe nur ein annähernder ist. Die Stromstärke i wurde mittelst einer Tangentenbussole in der gewöhnlichen Weise, in Erdkraft ausgedrückt, ermittelt.

Das in den Stäben inducirte Moment wurde mit Hülfe einer Bussole bestimmt, welche aus einer an einen Coconfaden aufgehängten 15 mm. langen parallelepipedischen Nadel bestand, auf welcher der Länge nach ein 80 mm. langer dünner Messingzeiger aufsass. Dieser spielte über einem in $\frac{1}{2}$ Grade geteilten Kreise mit Spiegelunterlage sodass man man mit Hülfe der Lupe $\frac{1}{4}^0$ mit Sicherheit schätzen konnte. Diese Bussole wurde auf Null gestellt und in der Ost-West-Linie senkrecht zur Richtung des magnetischen Meridianes die obengenannte Spirale in die constante Entfernung R^I von derselben gebracht. Ein durch die Spirale geleiteter Strom verursachte eine Ablenkung, die aber durch einen von der Nord-Süd-Seite genäherten harten, kurzen Magneten also compensirt wurde, dass die Nadel abermals auf Null einstand. Hierauf wurde der zu magnetisirende Stahlstab in die Spirale eingeschoben und die nunmehr erfolgte Ablenkung der Bussolen-Nadel abermals auf Null zurückgeführt, jedoch durch einen in der Ost-West-Linie senkrecht zum magnetischen Meridian von der entgegengesetzten Seite her der Nadel genäherten Compensations-Magneten, dessen magnetisches Moment M (in Erdkraft ausgedrückt), sowie dessen Polabstände D (Entfernung der Wirkungs-Centren des freien Magnetismus von der Mitte des Stabes) vorher vermittelst Ablenkungs-Beobachtung ermittelt worden waren. Ist nun R die Entfernung der Mitte dieses Magneten von der Bussole, R^I diejenige der Mitte der zu messenden Stahlstäbe vom Momente M' (zugleich der Mitte der Spirale) und D' die Polabstände der letzteren, so besteht für den Fall, dass sich die Wirkungen der beiden Magnete auf die Nadel aufheben, die Relation:

$$\frac{2MR}{(R^2 - D^2)} = \frac{2M'R'}{(R'^2 - D'^2)^2}$$

woraus das unbekannte M', in dem bekannten Moment M des Compensationsmagneten ausgedrückt, resultirt:

$$M^I = \frac{R}{R'} \cdot \frac{(R'^2 - D'^2)^2}{(R^2 - D^2)^2} \, . \, M$$

Betreffs der Magnetisirung der Stäbe füge ich noch hinzu, dass dieselben in fester Lage in die Mitte der Spirale eingebracht wurden,

worin sie ca. 1 Minute verblieben, während dessen das inducirte Moment auf die vorbeschriebene Weise gemessen wurde. Die Induction wurde nun nicht durch Stromunterbrechung aufgehoben, indem ich die Wirkung des beim Oeffnen in der Spirale stattfindenden Extrastromes auf die Quantität des zurückbleibenden Magnetismus vermeiden wollte; ich zog es vielmehr vor, den betr. Stab möglichst ohne Erschütterung aus der Spirale nach derselben Seite auszuziehen.

Nach jedem solchen Versuche wurde selbstredend controlirt, ob die Stromstärke unverändert geblieben war, und ob der an der Nord-Süd-Seite genäherte Hülfs-Magnet noch die Wirkung der Spirale auf die Bussole paralysirte.

Nachdem dergestalt sämmtliche Stäbe bei derselben Stromstärke geprüft waren, wurde der Strom unterbrochen, sämmtliche Magnete entfernt und nun zur Messung des remanenten magnetischen Momentes der Stäbe geschritten. — Zu dem Ende wurden die vorher inducirten Stäbe in der Nord-Süd-Linie in die constante Entfernung R^I von der Mitte der Bussole gebracht. Die hierdurch bewirkte Ablenkung wurde hierauf durch den, schon bei der Bestimmung der inducirten Magnetismen verwendeten Maassmagneten (Compensationsmagneten von Moment M) durch Annähern desselben an die Bussole in die Entfernung R in der Nord-Süd-Stellung auf Null zurückgeführt. Unter Zugrundelegung dieses hat man, wenn D resp. D' wie oben die Polabstände des Maassmagneten (M) resp. des zu messenden Magneten (M') bezeichnen, die Relation:

$$\frac{M}{(R^2+D^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M'}{(R'^2+D'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

woraus:

$$M' = \left[\frac{R'^2+D'^2}{R^2+D^2}\right]^{\frac{3}{2}} \times M$$

Nach Vollendung dieser Versuchsreihe wurde eine zweite inducirende Kraft in gleicher Weise, wie vorher, angewandt, ohne dass die Stäbe zuerst durch entgegengesetzte Ströme entmagnetisirt worden wären.

In dieser Weise bestimmte ich für mehrere aufsteigende Stromstärken die inducirten und remanenten Magnetismen der einzelnen Stäbe. Zuletzt unternahm ich noch eine Magnetisirung mittelst eines Elektromagneten mit zwei aufrechtstehenden Schenkeln, welche letzteren innerhalb der Grenzen von 3 — ca. 40 cm. vermittelst eines eisernen Ankers, worauf sie aufsassen, einander beliebig genähert und von einander entfernt werden konnten. Bei der Magnetisirung wurden diese Schenkel stets in eine solche Entfernung von einander gebracht, dass die zu magnetisirenden Stahlstäbe ca. 5—10 mm. auf Beiden

auflagen. Nach dem Aufsetzen der Stäbe wurden dieselben mittelst eines gewöhnlichen Stahlmagneten nach der Methode des einfachen Striches behandelt und hierauf ohne Erschütterung mit beiden Polen zugleich von dem Elektromagneten über einem vorher untergelegten Kartenblatte abgeschoben. Dieses Verfahren wurde mehrmals wiederholt, bis ein erneutes Aufsetzen den remanenten Magnetismus nicht weiter vermehrte.

Bezüglich der in die obigen Formeln für die magnetischen Momente eingeführten Polabstände D' der untersuchten Stäbe (Entfernungen der Wirkungs-Centren von der Mitte der Stäbe) füge ich noch Folgendes hinzu: Wenn wir annehmen, dass für Stäbe der gleichen Dimensionen mit zunehmender inducirender Kraft die einzelnen Teile der Stäbe ganz in gleichen Verhältnissen an Magnetismus zunehmen, so können wir eben für diesen Fall die Polabstände D' als constant annehmen, sonach uns mit einer einmaligen Bestimmung dieser Grössen für den remanenten Magnetismus begnügen, um bei den inducirten Magnetismen sodann die gleichen Werte einzuführen. Von dieser Annahme ausgehend habe ich für die gleiche Dimension nach dem Ablenkungsverfahren D' nur einmal, nachdem die grösste Stromstärke eingewirkt hatte, für annähernd die Entfernungen R^I bestimmt und die also gefundenen Werte in die obigen Formeln eingeführt. Ich habe diese Abkürzung der Beobachtungen hauptsächlich deshalb eintreten lassen, weil bei der jedesmaligen Bestimmung von D' die Zeitdauer meiner Versuche in solcher Weise würde verlängert worden sein, dass es mir Ermüdung halber nicht möglich gewesen wäre, alle Versuchsreihen für einen Satz zusammengehöriger Stäbe ohne Zeitunterbrechung vornehmen zu können. Eine jede derartige Unterbrechung würde aber — wohl deshalb, weil das remanente Moment der Stäbe schon nach einigen Stunden abgenommen hat — einen Bruch in der Folge der Beobachtungsreihen herbeigeführt haben. Aus diesem Grunde sind mir z. B. die sämmtlichen Werte der magnetischen Momente bei grösserer Stromstärke für die in IV. aufgeführten parallelepipedischen Stahlstärke unbrauchbar geworden. (Ich habe dort nur die ersten und die mittelst des Elektromagneten erhaltenen Endwerte angeführt).

IV.

In der folgenden Tabelle I. gebe ich eine Reihe von inducirten Momenten der vorgenannten Stäbe, welche unter Einwirkung der in der gleichen Horizontalreihe in der ersten Vertical-Columne befindlichen magnetischen Scheidungskräfte dem im Früheren Bemerkten gemäss erhalten wurden. In Tabelle II. gebe ich eine Reihe von

remanenten Momenten, die nach Einwirkung der in der ersten Columne verzeichneten magnetischen Scheidungskräfte in den Stäben zurückbleiben. Die magnetischen Scheidungskräfte sind in der Horizontalcomponente *H* der erdmagnetischen Kraft, die magnetischen Momente in Millionen dieser Kraft ausgedrückt. — Zur Erläuterung

Tabelle I.

Magnetische Scheidungskraft.	I. Radius = 0,85 mm. Axen-Verh. = 70			II. Radius = 1,20 mm. Axen-Verh. = 50			III. Radius = 1,45 mm. Axen-Verh. = 40		
	Glashart.	Gelb.	Blau.	Glashart.	Gelb.	Blau.	Glashart.	Gelb.	Blau.
300	1,40	1,76	1,84	3,41	3,64	3,69	2,37	5,24	5,52
489	1,64	1,88	1,92	3,85	3,92	4,00	3,41	5,88	6,21
712	1,84	1,96	2,04	4,01	4,22	4,21	4,29	6,23	6,92
1468	2,16	2,16	2,16	4,25	4,32	4,32	5,76	6,68	6,89

Tabelle II.

Magnetische Scheidungskraft.	I. Radius = 0,85 mm. Axen-Verh. = 70			II. Radius = 1,20 mm. Axen-Verh. = 50			III. Radius = 1,45 mm. Axen-Verh. = 40		
	Glashart.	Gelb.	Blau.	Glashart.	Gelb.	Blau.	Glashart.	Gelb.	Blau.
204	0,333	0,600	0,652	0,891	1,091	1,091	0,365	1,535	1,817
300	0,454	0,640	0,689	1,091	1,204	1,204	0,747	1,762	2,185
378	0,488	0,660	0,703	1,108	1,256	1,256	1,025	1,823	2,247
489	0,520	0,675	0,716	1,145	1,306	1,306	1,381	1,852	2,333
712	0,538	0,679	0,729	1,172	1,330	1,330	1,747	1,898	2,400
1011	0,542	0,681	0,735	1,182	1,337	1,337	1,962	1,981	2,423
1468	0,545	0,683	0,740	1,196	1,346	1,346	2,042	2,057	2,456
Behandlung mit Elektromagn.	0,712	0,918	0,963	1,483	1,593	1,593	2,422	2,562	2,922
Nach dem Anlassen und erneuter Magnetisirung.	1,056	—	—	—	—	—	3,056	—	—

der letzten Horizontalreihe der Tabelle II. sei noch bemerkt, dass ich zur Controlirung der Versuche zuletzt noch ein Anlassen der glasharten und gelben Stäbe zur Ox.-Farbe dunkelblau unternahm und dieselben hierauf mittelst des Elektromagneten von Neuem magnetisirte.

Inducirte Magnetismen.

IV. Radius = 1,90 mm. Axen-Verh. = 30			V. Radius = 2,45 mm. Axen-Verh. = 25			VI. Radius = 2,95 mm. Axen-Verh. = 20		
Glashart.	Gelb.	Blau.	Glashart.	Gelb.	Blau.	Glashart.	Gelb.	Blau.
5,92	6,97	6,73	5,45	10,20	10,61	8,32	10,91	12,36
6,91	7,83	7,51	7,52	11,89	12,02	11,15	13,68	15,32
7,69	8,28	8,65	9,27	13,05	13.68	13,27	15,73	18,28
8,98	9,03	9,27	10,69	14,52	14,92	15,65	18,56	19,09

Remanente Magnetismen.

IV. Radius = 1,90 mm. Axen-Verh. = 30			V. Radius = 2,45 mm. Axen-Verh. = 25			VI. Radius = 2,95 mm. Axen-Verh. = 20		
Glashart.	Gelb.	Blau.	Glashart.	Gelb.	Blau.	Glashart.	Gelb.	Blau.
1,245	1,456	1,851	0,865	1,781	2,086	1,246	1,483	1,537
1,819	1,606	2,306	1,717	2,212	2,602	2,084	2,002	1,995
2,084	1,716	2,508	2,508	2,375	2,834	2,838	2,317	2,125
2,306	1,791	2,617	3,351	2,507	2,941	3,600	2,508	2,230
2,561	1,888	2,733	4,383	2,526	3,010	4,751	2,617	2,306
2,733	1,969	2,800	4,870	2,562	3,029	5,283	2,675	2,336
2,835	2,006	2,875	5,142	2,588	3,172	5,430	2,693	2,380
3,352	2,858	3,370	6,073	3,515	4,390	6,823	3,969	3,790
2,563	2,322	—	—	—	—	—	—	—

Um die Einsicht in die weiter unten gezogenen Folgerungen aus den soeben mitgeteilten Versuchen zu erleichtern, gebe ich ferner in Tabelle III. und IV. die Quotienten, welche man erhält, wenn man das Product aus der magn. Scheidungskraft und den in II. gegebenen Volumen der Stäbe in die verzeichneten magnetischen Momente divi-

Tabelle

Magnetische Scheidungskraft.	I. Radius = 0,85 mm.			II. Radius = 1,20 mm.			III. Radius = 1,45 mm.		
	Glashart.	Gelb.	Blau.	Glashart.	Gelb.	Blau.	Glashart.	Gelb.	Blau.
300	17,2	21,6	22,6	21,0	22,4	22,7	10,0	22,1	23,3
489	12,3	14,1	14,2	14,5	14,7	15,0	8,8	15,2	16,0
712	9,5	10,1	10,5	10,4	10,9	10,9	7,6	11,0	12,3
1468	5,4	5,4	5,4	5,3	5,4	5,4	4,9	5,7	5,9

Tabelle

Magnetische Scheidungskraft.	I. Radius = 0,85 mm.			II. Radius = 1,20 mm.			III. Radius = 1,45 mm.		
	Glashart.	Gelb.	Blau.	Glashart.	Gelb.	Blau.	Glashart.	Gelb.	Blau.
204	6,0	10,8	11,7	8,1	9,9	9,9	2,2	9,5	11,2
300	5,5	7,8	8,4	6,7	7,4	7,4	3,1	7,4	9,1
378	4,7	6,4	6,8	5,4	6,1	6,1	3,4	6,0	7,5
489	3,9	5,0	5,4	4,3	5,0	5,0	3,5	4,7	6,0
712	2,7	3,5	3,7	3,0	3,4	3,4	3,1	3,3	4,2
1011	1,9	2,5	2,6	2,1	2,4	2,4	2,4	2,5	3,0
1468	1,3	1,7	1,8	1,5	1,7	1,7	1,7	1,8	2,1
	2600	3370	3530	2730	2940	2940	3050	3230	3680

dirt. Bei Tabelle III. liegen die Momente der Tabelle I., bei Tabelle IV. diejenigen der Tabelle II. zu Grunde. In der letzten Horizontalreihe der Tabelle IV. sind einfach nur die Quotienten aus den Volumen in die, in der vorletzten Horizontalreihe der Tabelle II. verzeichneten Momente gegeben.

III.

IV. Radius = 1,90 mm.			V. Radius = 2,45 mm.			VI. Radius = 2,95 mm.		
Glashart.	Gelb.	Blau.	Glashart.	Gelb.	Blau.	Glashart.	Gelb.	Blau.
14,5	17,1	16,5	8,05	15,0	15,6	9,7	11,1	12,5
10,4	11,7	11,3	6,8	10,8	10,9	6,9	8,5	9,5
7,9	8,5	8,9	5,7	8,1	8,5	5,7	6,7	7,8
4,5	4,5	4,6	3,2	4,4	4,5	3,2	3,8	3,9

IV.

IV. Radius = 1,90 mm.			V. Radius = 2,45 mm.			VI. Radius = 2,95 mm.		
Glashart.	Gelb.	Blau.	Glashart.	Gelb.	Blau.	Glashart.	Gelb.	Blau.
4,4	5,2	6,6	1,9	3,9	4,5	1,8	2,2	2,3
4,4	3,9	5,6	2,5	3,2	3,8	2,1	2,0	2,0
4,0	3,3	4,8	2,9	2,7	3,3	2,2	1,8	1,7
3,4	2,7	3,9	3,0	2,2	2,6	2,2	1,5	1,3
2,6	1,9	2,8	2,7	1,5	1,8	2,0	1,1	0,9
2,0	1,4	2,0	2,1	1,1	1,3	1,5	0,8	0,7
1,4	1,0	1,4	1,5	0,7	0,9	1,1	0,5	0,4
2460	2100	2490	2670	1550	1940	2080	1210	1180

Von meinen zahlreichen weiteren Versuchen teile ich nur noch folgende mit, weil sich dieselben auf Stäbe von sehr bedeutendem Querschnitt beziehen. Die in Rede stehenden Stäbe waren 4 parallelepipedische Stahlstücke aus englischem Guss-Stahl von den Dimensionen: Länge = 57,5 mm., Breite = 12 mm., Dicke = 0,5 mm. Ihre resp. Härten waren: Glashart, hellgelb, kirschrot und blau.

a) Diese Stäbe wurden zuerst mittelst eines Stahlmagneten (Moment = 1060000 H) nach der Methode des einfachen Striches behandelt. Eine hierauf erfolgte Messung der remanenten Magnetismen ergab, in Maassmagnet (M = 1110000 H) ausgedrückt, die Werte:

Glashart	Gelb	Rot	Blau
0,180	0,215	0,221	0,239

b) Die Stäbe wurden nunmehr mittelst einer gleichlangen Spirale bei aufsteigenden Stromstärken in derselben Weise wie die angeführten cylindrischen Stäbe magnetisirt. Unter Anwendung von Stromstärken, die Ablenkungen von 31,3°, 55,4° und 64,7° an der Tangentenbussole entsprachen, fand ich die inducirten magnetischen Momente genannter 4 Stahlstücke, zu denen ich noch ein ausgeglühtes weiches Eisenstück von gleicher Grösse hinzufügte:

Glashart	Gelb	Rot	Blau	w. Eisen
1,619 M	1,933	1,975	2,178	2,639
3,612	4,208	4,091	4,585	5,645
4,661	5,445	5,532	5,946	6,835

Die nach der Induction remanenten Momente der 4 Stahlstäbe fanden sich:

Glashart	Gelb	Rot	Blau
0,211 M	0,239	0,248	0,279
0,435	0,406	0,406	0,381
0,657	0,564	0,551	0,500

c) Nach Behandlung mittelst des Elektromagneten ergaben sich endlich die remanenten Momente:

Glashart	Gelb	Rot	Blau
2,328 M	1,572	1,460	1,110

V.

Der Discussion meiner Versuchsresultate muss ich vorausschicken, dass — wie direct einleuchtend und auch durch Versuche leicht erkennbar — einesteils die ursprüngliche moleculare Beschaffenheit, die

wohl in der Regel für irgend zwei im Handel vorkommende Stahlstäbe keine gleiche sein wird, anderenteils aber, selbst wenn das letztere der Fall wäre, die nur angenäherte gleiche Molecularbeschaffenheit der Stäbe gleicher äusserlicher Härte oder gleicher Oxyd.-Farbe (s. II.) die Ergebnisse der Magnetisirung in solcher Weise beeinflussen, dass man durchaus nicht diejenige Präcision der Resultate wie z. B. bei der Magnetisirung weichen Eisens erwarten darf. Es werden daher — insbesondere bei geringeren magnetischen Scheidungskräften sowie bei den remanenten Magnetismen, wo die Cohäsionskräfte einen bedeutenderen Einfluss äussern müssen — hin und wieder die Stäbe Abweichungen von der mittelst vieler Versuche festgestellten Regel zeigen, und weiter auch nur annähernd eine exact mathematisch ausdrückbare Beziehung zu einander erkennen lassen. Dies berücksichtigend habe ich die in III. erörterte einfache Versuchs-Methode für hinreichend genau gehalten und ferner die folgenden Schlussfolgerungen von diesem Gesichtspunkte aus gezogen.

Fassen wir nun zunächst die inducirten Magnetismen ins Auge, so lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

1) Zunächst zeigt die Betrachtung der Verticalreihen der Tab. I. u. III. den schon von Wiedemann *) ausgesprochenen Satz, dass sich die von aufsteigenden inducirenden Kräften in einem Stahlstabe zum ersten Male inducirten magnetischen Momente einem Grenzwerte — dem Maximum — nähern. Ferner zeigen die Horizontalreihen der Tab. I., sowie die unter IV b. mitgeteilten Versuche, dass bei Stäben gleicher Dicke die gleiche inducirende Kraft in einem weicheren Stahlstabe ein stärkeres Moment inducirt, als in einem härteren Stabe, was auch aus den Angaben von Barlow **), Müller ***) und Wiedemann †), wenn auch nicht in so evidenter Weise, wie aus den mitgeteilten Versuchen hervorgeht.

2) Tab. I. zeigt, dass die weichen Stäbe sich ihrem Maximum an inducirtem Magnetismus anfangs rascher nähern, als die harten Stäbe, dass aber umgekehrt bei vorgeschrittener Magnetisirung die harten Stäbe rascher wachsen, als die weicheren Stäbe. Beide scheinen für dünnere Stäbe ein und denselben Grenzwert zu erreichen, sodass also für diese das magnetische Maximum von der Härte unabhängig wäre.

---

*) Pogg. Ann. Bd. C. S. 239. und Bd. CVI. S. 297.

**) Gilb. Ann. Bd. LXXIII. S. 230.

***) Pogg. Ann. Bd. LXXXV. S. 157.

†) Pogg. Ann. Bd. CVI. S. 170.

3) Die Betrachtung der in ein und derselben Horizontalreihe stehenden Werte der Tab. III. zeigt für dünne Stäbe, die ihrem Maximum bereits nahe gerückt sind (bei der magn. Scheidungskraft 1468), nahezu eine Constanz dieser Werte, während man bei Vergleichung verschiedener Dicken der gleichen Härte und bei der gleichen schon bedeutenderen Scheidungskraft eine Abnahme der verzeichneten Werte gewahrt. Es folgt hieraus, dass die magn. Momente der ihrem Maximum nahe gerückten dünneren Stäbe bei gleicher inducirender Kraft den Querschnitten der Stäbe (die im Verhältniss der eingeführten Volumen stehen) annähernd proportional sind. Für dickere Stäbe sinkt indessen das Verhältniss der Momente unter dasjenige der Querschnitte herab; möglicherweise gilt jedoch der gezogene Schluss auch für das (hier nicht erreichte) Maximum der dickeren Stäbe.

4) Ueber den Einfluss der Länge der Stahlstäbe auf deren inducirtes magn. Moment habe ich in IV. keine Resultate mitgeteilt, weil ich in dieser Beziehung aus Mangel einer genügend grossen Anzahl von Versuchen einen entscheidenden Schluss nicht ziehen kann. Es liegen mir jedoch über das Längen-Verhältniss 1:2 Versuche vor, wonach im Maximum der Erregung bei gleicher inducirender Kraft die magnetischen Momente sich bei dünneren Stäben wie deren Längen verhalten. — Die Gültigkeit dieses Schlusses auch für andere Längenverhältnisse vorausgesetzt, würde demnach aus 3) u. 4) folgen, dass bei dünneren Stäben das Maximum der magn. Erregung annähernd dem Volumen proportional sei.

5) Dividiren wir die in Tab. I. verzeichneten Momente der Stäbe I. und II., welche mittelst der stärksten magn. Scheidungskraft (1468 H) erhalten wurden (wo dieselben ihrem Maximum nahe waren), durch die in II. gegebenen Gewichte (= 1990 resp. 4310 mgr.), so erhalten wir im Mittel den Wert 1010. Führen wir für die Horizontalcomponente H der erdmagn. Kraft deren (experimentell bestimmten) absoluten Wert = 1,92 ein, so wäre hiernach das Maximum magnetischer Erregung der Masseneinheit des Stahles in absolutem Maasse ungefähr = 1010.1,92 = 1960, ein Wert, der hinter dem von v. Waltenhofen*) für Eisen gefundenen Maximalwert (2100) zurückbleibt. Vergl. auch die Versuche mit den parallelepipedischen Stahlstücken und dem weichen Eisenstück in IV b.

Gehen wir nun zur Betrachtung der remanenten Magnetismen über, so ergeben sich auf Grund der Tab. II. und IV. die folgenden Schlussfolgerungen:

---

*) Pogg. Ann. Bd. CXXXVII. S. 526.

1) Tab. II. lehrt, dass die nach Aufhebung der ersten inducirenden Wirkungen in den einzelnen Stahlstäben zurückbleibenden Momente sich einem Grenzwerte (Maximum) nähern, was bei weichen Stäben eher als bei harten Stäben geschieht. Ferner lässt sich aus der anfänglichen Zunahme der Werte der harten Stäbe III., V. und VI. in Tab. IV. folgern, dass die remanenten Momente anfangs rascher wachsen, als die bezüglichen inducirenden Kräfte. (Dieselben Schlüsse hat bereits Wiedemann*) gezogen).

2) Was nun die Grösse der von den verschiedenen Stahlhärten zurückbehaltenen Magnetismen anbelangt, so werden bei schwächeren inducirenden Wirkungen (s. Tab. II.) die weichen Stäbe stärker remanent magnetisch als die harten; da aber, wie eben bemerkt, die ersteren ihrem Grenzwerte bereits nahe gerückt sind, während die letzteren noch stärker anwachsen, so tritt, jedoch nur bei dickeren Stäben, der Fall ein, dass mit wachsenden inducirenden Kräften der remanente Magnetismus der harten Stäbe denjenigen der weichen überholt. Ob dies geschieht, hängt nach meinen Versuchen von dem Axen-Verhältniss (Verhältniss von Länge zu Dicke) der betreffenden Stäbe ab, und tritt dann ein, wenn das letztere unter dem Wert 30–40 liegt. Uebertrifft also die Länge der Stahlstäbe deren Durchmesser um das 30—40fache, so werden mit unseren Magnetisirungsmitteln die weichen Stahlstäbe stärker remanent magnetisch als die harten, ist jenes Verhältniss geringer, dann ist die Sache umgekehrt. Mit Evidenz geht dies aus den in der letzten Horizontalreihe der Tab. II. mitgeteilten Resultaten des Anlassens der glasharten Stäbe I., III. und IV. hervor**). — Mit dieser Tatsache sind ferner die in I. erwähnten Widersprüche der Angaben verschiedener Experimentatoren aufgeklärt, indem sich aus den angegebenen Dimensionen der betreffenden Stäbe leicht berechnen lässt, dass die Resultate jener Beobachter mit dem Vorhergehenden in Einklang stehen.

4) Fassen wir die Werte der letzten Horizontalreihen der Tab. IV. ins Auge, so bemerkt man mit zunehmender Dicke bei den glasharten Stäben anfangs annähernd eine Constanz, bei den angelassenen Stäben aber ein bedeutendes Sinken der verzeichneten Werte. Hieraus folgt, dass nur für dünne und harte Stäbe der gleichen Länge das remanente magn. Moment bei vorgeschrittener Magnetisirung den Volumen oder Querschnitten proportional sei, während aber für grössere Dicken und weiche Stäbe das Verhältniss der remanenten Momente weit unter dasjenige der Querschnitte herabsinkt.

---

*) Pogg. Ann. Bd. CVI. u. C.

**) Eine Bildung von Folgepunkten, wie dieselbe Coulomb beobachtete (s. I.), konnte ich bei meinen Stäben nicht wahrnehmen.

VI.

Anknüpfend an I. will ich die Hauptmomente meiner Versuchsresultate nochmals kurz zusammenfassen:

Da die Magnetisirungs-Curven *) für die inducirten Magnetismen der weichen Stäbe stets über denjenigen der harten Stäbe verlaufen, und schliesslich bei dünnen Stäben nahezu den gleichen Wert erreichen, müssen wir schliessen, dass die Molecular-Kräfte, welche die Härte eines Stahlstabes bedingen, die Grösse des durch eine magnetisirende Kraft inducirten magn. Momentes herabmindern. Diese Herabminderung ist relativ bedeutender bei geringeren magnetisirenden Kräften, sowie, in Uebereinstimmung mit den Cohäsionserscheinungen (Elasticität und Härte), bedeutender bei harten und dicken Stäben. — Bei dünnen Stäben, die ihrem Maximum nahe gerückt sind, treten diese Einflüsse jedoch mehr zurück, sodass ein Unterschied zwischen weichen und harten Stäben dann nicht mehr zu bestehen scheint; in diesem Falle können auch die inducirten Momente annähernd dem Volumen proportional gesetzt werden. Ob dies Letztere auch für dicke Stäbe Gültigkeit hat, ist eine offene Frage, deren experimentelle Beantwortung wegen der Schwierigkeit das Maximum der magn. Erregung zu erreichen immerhin in Frage gestellt erscheint.

Der nach geschehener Induction in den Stahlstäben zurückbleibende (remanente) Magnetismus zeigt ein wesentlich anderes Verhalten als der inducirte Magnetismus:

Hier verlaufen nämlich die Magnetisirungs-Curven der weichen Stäbe anfangs zwar auch über denjenigen der harten Stäbe, mit zunehmender inducirender Kraft überholen aber umgekehrt bei den Stäben, deren Länge ihre Dicke weniger als ungefähr 30 mal übertrifft (deren Axenverhältniss unter 30), die harten Stäbe die weichen. Es folgt hieraus, dass die remanenten Magnetismen zum Teil von denselben Factoren, wie die inducirten Magnetismen, abhängen (wie denn ein remanenter Magnetismus ja auch eine vorhergegangene Induction voraussetzt); eine demgemässe Uebereinstimmung zeigt sich jedoch nur bei dünneren Stäben, deren Axenverhältniss grösser als ungefähr 30, sowie bei schwächeren inducirenden Wirkungen, in welchen Fällen dann, wie bei den inducirten Magnetismen, die weichen Stäbe stärker bleiben, als die harten (hierher gehören die Versuche von Hansteen und Lamont, s. I.). Bei dickeren Stäben und grösseren

*) Die magn. Scheidungskräfte als Abscissen, die magn. Momente als Ordinaten aufgefasst.

inducirenden Kräften tritt aber der Einfluss der vorausgegangenen Induction, resp. gewisser Factoren, von welchen dieselbe abhängt, entschieden zurück, sodass nunmehr die harten Stäbe stärker bleiben, als die weichen (hierher sind die Versuchsresultate von Coulomb, Müller, Plücker und Wiedemann zu rechnen, vergl. I.). Aus dem Vorangegangenen müssen wir den interessanten Schluss ziehen, dass der remanente Magnetismus des Stahles von bestimmten, mit den Härteverhältnissen zusammenhängenden Factoren abhängig sei, welche, wenigstens für stärkere inducirende Wirkungen, zum Teil von dem vorher inducirten Magnetismus nicht beeinflusst würden, sondern in eigener Weise von den Dimensionen der Stahlstäbe abhängig wären.

In weiterer Verfolgung dieses letzteren Schlusses habe ich noch umfassendere Versuche angestellt und hoffe, demnächst dieselben mit interessanten Schlüssen auf das Wesen der auch oben in Betracht kommenden sog. Coercitivkraft vorlegen zu können.

Dortmund, im Mai 1875.

XIII.

Das allgemeine Zerlegungsproblem der Determinanten.

Von

Siegmund Günther.

---

§. 1. Kaum war die Determinante als selbstständiges combinatorisches Symbol in die Wissenschaft eingeführt, so begannen auch schon die Versuche, die praktische Berechnung solcher Formen durch Zerlegung derselben in andere von weniger Elementen zu erleichtern. So entstanden jene freilich durch inductives Tatonnement gewonnenen Sätze von Laplace[1]), deren Gesammtheit die Nachwelt, wenn auch etwas uneigentlich, mit dem Namen des Laplace'schen Zerlegungstheoremes belegt hat. Allgemeinere Untersuchungen über die Zerfällung einer Determinante in Aggregate von Minoren-Producten hat später Cauchy[2]) angestellt, und selbstverständlich hat auch Jacobi in seiner fundamentalen Abhandlung den Gegenstand berührt[3]). Er begnügte sich sogar nicht mit der Behandlung des einfacheren durch Laplace's Vorarbeiten bereits einigermassen aufgehellten Falles, welcher die gegebene Form in eine Reihe von Producten aus je zwei Determinantenfactoren entwickeln lehrt, sondern liess die Anzahl dieser Factoren ganz unbestimmt. Allein obwol Jacobi's Beweise der hier in Frage kommenden Lehrsätze völlig einwurfsfrei genannt werden müssen, so kann von seiner Behandlungsweise doch mit Fug das behauptet werden, was man den Deductionen der alten griechischen Geometer nachzusagen pflegt: es wird die Ueberzeugung von der Wahrheit des Behaupteten erzwungen, ein Einblick in das eigentliche Wesen der Sache aber nicht gewährt. Zum grossen Teile trägt daran Jacobi's abgekürzte Schreibweise die Schuld; denn wenn bei irgend einer Gelegenheit das quadratische Arrangement der Elemente

gebieterisch gefordert wird, so ist diess sicherlich hier der Fall. Gewisse Specialfälle[4]) finden sich bei Jacobi allerdings eingehender discutirt vor; allein besonders für die praktische Ausführung solcher Zerlegungen giebt er so gut wie gar keine Anhaltspunkte.

Man kann auch nicht sagen, dass seit seiner Zeit wesentliche Fortschritte gemacht worden seien. Für die Mehrzahl der vorhandenen Lehrbücher bot die Materie, als nicht mehr den eigentlichen Elementen angehörig, keine Veranlassung zu Reformversuchen, und da man die sicheren Tatsachen besass, bekümmerte man sich auch sonst wenig um die Grundlagen. Nur das Baltzer'sche Werk[5]) macht auch hier, wie in anderen Fragen, eine Ausnahme; indes war auch ihm noch eine zu grosse Kürze geboten, um Anfängern leicht verständlich zu sein. Der Zweck dieser Abhandlung ist nun zunächst der, die Laplace'sche Methode in umfassender Weise zu discutiren und mit möglichst einfachen Hülfsmitteln einen Beweis für dieselbe zu erbringen. Jedoch glauben wir so auch noch einen weiter über das unmittelbar gesteckte didaktische Ziel hinausgreifenden Zweck zu erreichen, indem wir auf Grund eines neuen Satzes ein einfaches und naturgemässes Verfahren zur wirklichen Bildung der einzelnen Aggregat-Glieder gewinnen.

1) Laplace, Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde, Mém. de l'acad. des sciences, année 1792. II. S. 304.

2) Cauchy, Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transformations opérées entre les variables qu'elles renferment, Journ. de l'école polyt., Tome X. S. 101 ff.

3) Jacobi, De formatione et proprietatibus Determinantium, Journal f. d. reine u. angew. Mathem., 22. Band. S. 293.

4) Ibid. S. 294 ff.

5) Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig 1857. §. 4, 1. (Entsprechend in den späteren Auflagen).

§. 2. Die Aufgabe, welche wir uns zunächst stellen, wird also folgendermassen zu formuliren sein:

Gegeben ist eine Determinante $n$ten Grades

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix};$$

dieselbe soll in ein Aggregat von zweigliedrigen Producten umgewandelt werden, deren beide Factoren be-

züglich Unterdeterminanten vom Grade $p(<n)$ und $(n-p)$ sind.

Diese Aufgabe zerlegt sich folgerichtig in zwei Teile: Es soll nämlich erstens eine allgemeine Methode angegeben werden, nach welcher diese Zerlegung praktisch vorgenommen werden kann, ohne dass das Uebersehen irgend eines Gliedes möglich wäre; natürlich müssen wir zu diesem Zwecke die Anzahl der vorkommenden Entwickelungs-Glieder a priori anzugeben im Stande sein. Zweitens ist das Ergebniss der Zerlegung in Gestalt einer independenten Formel hinzustellen, in welcher als symbolische Ausdrücke lediglich die gewöhnlichen Summenzeichen auftreten dürfen.

Zur Erleichterung gehen wir von einer Voraussetzung aus, welche scheinbar allerdings den Charakter der Allgemeinheit alterirt. Als erstes Glied der zu bildenden Reihe soll nämlich das folgende gelten:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,p} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{p+1,p+1} & \cdots & a_{p+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,p+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

welchem offenbar das positive Vorzeichen zukommt. Dass jene Beschränkung in Wirklichkeit nur eine scheinbare ist, kann leicht eingesehen werden, indes werden wir zum Schlusse unserer Untersuchung noch einmal speciell darauf zurückkommen.

§. 3. Bezeichnen wir in jedem der einzelnen Producte, an deren Bildung wir nunmehr herantreten, den ersten Determinantenfactor mit I, den zweiten mit II, so können wir zunächst einmal die Festsetzung machen, dass Determinante I vom $p$ten, Determinante II vom $(n-p)$-ten Grade sein soll; ferner können wir bestimmen, dass die erste Verticalreihe von Determinante I stets den zweiten Index 1 besitzen soll, und zwar soll jede einzelne Determinante so beschaffen sein, dass sowol die ersten als auch die zweiten Indices ohne jede Inversion von links nach rechts, beziehungsweise von oben nach unten, aufeinanderfolgen.

Unter diesen Umständen wird in einer gewissen Anzahl der Determinanten I das Element $a_{1,1}$ den oberen Eckplatz links einnehmen. Wir wollen demnach bestimmen, in wie vielen Gliedern die Determinante I stets das nämliche Element $a_{1,1}$ an der bewussten Stelle aufweist; diese Anzahl sei M.

Denken wir uns die Determinante Δ ganz ausgerechnet, so kommt das Element $a_{1,1}$ im Ganzen $(n-1)!$ mal vor. Denken wir uns an-

dererseits die von uns angestrebte Reihe bereits gebildet, so wird es an jenem Platze M mal erscheinen, jedesmal zunächst multiplicirt mit einer ersten Unterdeterminante von I, also mit $(p-1)!$ Gliedern und dann noch mit der Determinante II, also mit $(n-p)!$ Gliedern. Es besteht sonach die Identität

$$M = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!},$$

und es handelt sich weiterhin nunmehr darum, diese M Glieder wirklich zu finden.

Hiezu dient der Satz:

Man bilde aus den Zahlen

$$2,\ 3,\ 4\ \ldots\ n$$

sämmtliche Combinationen ohne Wiederholungen zu je $(p-1)$ Elementen und setze jeder einzelnen Complexion noch 1 vor; alsdann ist sie bezüglich die Reihe der zweiten Indices der ersten Horizontalreihe von Determinante I, während die ersten Indices ausschliesslich Einheiten sind. Die Bildung der Determinanten II erhellt dann unmittelbar.

Um die Wahrheit dieses Satzes einzusehen, genügt es zu zeigen, dass M dem Numerus Combinationum ohne Wiederholungen von $(n-1)$ zu je $(p-1)$ Elementen gleich ist. In der Tat ergiebt sich aus der Definitionsgleichung

$$(n-1)! = [(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)].[(n-p)(n-p-1)\ldots 3.2.1]$$

unmittelbar

$$M \equiv \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{(p-1)!} \equiv N.\overset{(p-1)}{C}(n-1).$$

§. 4. Betrachten wir z. B. die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{\ ,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix}$$

und setzen $(n-p) = 2$ (also $p = 3$), so haben wir die Elemente 2, 3, 4, 5 zu je zweien zu combiniren und erhalten $\frac{4.3}{1.2} = 6$ Complexio-

nen. Wir formiren dieselben nach den bekannten Regeln der combinatorischen Analysis der Ordnung nach und bekommen, indem wir die Einheiten vorsetzen,

$$\begin{matrix} 1\,2\,3 & 1\,3\,4 & 1\,4\,5. \\ 1\,2\,4 & 1\,3\,5 & \\ 1\,2\,5 & & \end{matrix}$$

Demgemäss sind die ($M = 6$) Aggregat-Glieder, welche das Element $a_{1,1}$ an den ihm angewiesenen Platze haben, die nachstehenden:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{4,3} & a_{4,5} \\ a_{5,3} & a_{5,5} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,5} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{4,3} & a_{4,4} \\ a_{5,3} & a_{5,4} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{4,2} & a_{4,5} \\ a_{5,2} & a_{5,5} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,3} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,5} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{4,2} & a_{4,4} \\ a_{5,2} & a_{5,4} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,4} & a_{3,5} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{4,2} & a_{4,3} \\ a_{5,2} & a_{5,3} \end{vmatrix}.$$

Ehe wir die folgenden Aggregat-Glieder ermitteln, wollen wir uns zuvor überzeugen, welches Vorzeichen jedem der ersten M Glieder zuzuteilen ist. Hiezu verhilft uns der bereits früher aufgestellte Satz [6]):

Wird eine Determinante nach den Elementen einer bestimmten Reihe in erste Unterdeterminanten zerlegt und will man wissen, welches Vorzeichen das mit $a_{i,k}$ multiplicirte Glied dieser Zerlegung erhält, so untersuche man, ob

$$i + k$$

eine gerade oder ungerade Zahl ist; im ersten Falle ist das positive, im zweiten das negative Zeichen zu nehmen. Natürlich wird vorausgesetzt, dass die Determinante in ihrer Normalform $\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ gegeben war.

Denken wir uns nun aus den bereits entwickelten ein beliebiges Product herausgegriffen, dessen Determinante I von der Form

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,s_1} & a_{1,s_2} & \dots & a_{1,s_{p-1}} \\ a_{2,1} & a_{2,s_1} & a_{2,s_2} & \dots & a_{2,s_{p-1}} \\ a_{3,1} & a_{3,s_1} & a_{3,s_2} & \dots & a_{3,s_{p-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p,1} & a_{p,s_1} & a_{p,s_2} & \dots & a_{p,s_{p-1}} \end{vmatrix}$$

sein wird. Die mit dieser multiplicirte Determinante *II* enthält ein bereits an sich wolgeordnetes Diagonalglied und trägt deshalb von selbst das positive Zeichen, so dass es also lediglich auf das erste Diagonalglied

$$a_{1,1} \cdot a_{2,s_1} \cdot a_{3s_2} \quad \dots \quad a_{p,s_{p-1}}$$

der Determinante *I* ankommt.

Das erste Element ist $a_{1,1}$, also tritt der Factor $(-1)^{1+1}$ vor. Dann erscheinen alle diejenigen Elemente, welche in der ursprünglichen Determinante *I* den ersten Index 2 besassen, in der neuen Determinante $\frac{\partial I}{\partial a_{1,1}}$ mit dem zweiten Index 1, an Stelle des zweiten Index aber ist $(s_1 - 1)$ zu setzen. Ebenso tritt in der hieraus abgeleiteten Determinante $\frac{\partial^2 I}{\partial a_{1,1} \cdot \partial a_{2,s_1}}$ an die Stelle der Indices 3 und s_2 bezüglich der Index 1 und $(s_2 - 2)$.

In dieser Weise fortschliessend erkennen wir:

Das Diagonalglied

$$a_{1,1} \cdot a_{2,s_1} \cdot a_{3,s_2} \quad \dots \quad a_{p,s_{p-1}}$$

erscheint multiplicirt mit folgenden Factoren:

$$(-1)^{1+1} . (-1)^{1+s_1-1} . (-1)^{1+s_2-2} . (-1)^{1+s_3-3} . \quad (-1)^{1+s_{p-1}-(p-1)}$$

d. h. wenn wir die hier auftretenden Summen wirklich bilden, so erhalten wir das Diagonalglied von Determinante *I* in folgender Form:

$$(-1)^{\left[\frac{2+3p-p^2}{2} + \sum_{i=1}^{i=p-1} s_i\right]} \times a_{1,1} \cdot a_{2,s_1} \cdot a_{3s_2} \dots a_{p,s_{p-1}} \text{ *)}.$$

*) Den in der eckigen Klammer befindlichen Bruch findet man, indem man von $(1 + 1 + 1 + \dots + 1(p+1))$ die Summe $(1 + 2 + \dots + p - 1) = \frac{(p-1)p}{2}$ subtrahirt. Uebrigens scheint das hier inductorisch abgeleitete Theorem

In dem von uns oben angezogenen Falle ist ein für allemal

$$\frac{2+3p-p^2}{2}=1.$$

Dagegen hat man für die 6 Complexionen zweiter Indices der ersten Diagonalen, nämlich für 1, 2, 3; 1, 2, 4; 1, 2, 5; 1, 3, 4; 1, 3, 5; 1, 4, 5 resp. die folgenden Summen Σ:

$$s_1+s_2=2+3=5;\quad s_1+s_2=2+4=6;\quad s_1+s_2=2+5=7;$$
$$s_1+s_2=3+4=7;\quad s_1+s_2=3+5=8;\quad s_1+s_2=4+5=9;$$

soweit sind die Factoren jeder sechs Determinanten beziehungsweise die folgenden:

$$(-1)^{5+1}=+1;\quad (-1)^{6+1}=-1;\quad (-1)^{7+1}=+1;$$
$$(-1)^{7+1}=+1;\quad (-1)^{8+1}=-1;\quad (-1)^{9+1}=+1.$$

Als rein empirische Controle mag noch die sonst übliche Vorzeichenbestimmung einen Platz finden. Die sechs Glieder sind diese:

$$a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,3}\ a_{4,4}\ a_{5,5};\quad a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,4}\ a_{4,3}\ a_{5,5};\quad a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,5}\ a_{4,3}\ a_{5,4};$$
$$a_{1,1}\ a_{2,3}\ a_{3,4}\ a_{4,2}\ a_{5,5};\quad a_{1,1}\ a_{2,3}\ a_{3,5}\ a_{4,2}\ a_{5,4};\quad a_{1,1}\ a_{2,4}\ a_{3,5}\ a_{4,2}\ a_{5,3}.$$

Die ersten Indices sind hier wolgeorduet und es muss also die Zählung der Inversionen an den zweiten vorgenommen werden. Diese sechs Complexionen bieten deren nun bezüglich 0, 1, 2, 2, 3, 4 dar, also entsprechen ihnen die Vorzeichen +, −, +, +, −, +, wie auch wir gefunden haben.

6) Günther, Lehrbuch der Determinantentheorie, Erlangen 1875. S. 45.

§. 5. Die M Glieder, welche bisher betrachtet wurden und nun sowol ihrer Zusammensetzung als auch ihrem Vorzeichen nach völlig bekannt sind, besassen in ihrer Determinante I als erste Colonne stets die nämliche

$$a_{1,1}\ a_{2,1}\ a_{3,1}\ \ldots\ a_{p,1}.$$

Nunmehr setzen wir fest, dass für jedes der noch übrigen Glieder die erste Colonne von Determinante I diese sein soll:

$$a_{p+1,1}\quad a_{p+2,1}\quad a_{p+3,1}\quad\ldots\quad a_{n,1}.$$

---

bei consequenter Anwendung zur independenten Bestimmung des Vorzeichens jedes willkürlichen Determinanten-Gliedes dienen zu können, ohne irgend eine Inversions-Abzählung.

Damit ist zugleich ausgesprochen, dass Determinante I vom Grade $(n-p)$, Determinante II dagegen vom Grade p sein soll.

Die Anzahl dieser noch nicht gebildeten Glieder ist leicht anzugeben, bezeichnen wir sie durch N, so finden wir geradeso wie oben (§. 3.)

$$N = \frac{(n-1)!}{p!\,(n-p-1)!}.$$

Auch die Bildung der einzelnen Glieder ist jener früheren analog:

Man bilde aus den Zahlen

$$2,\ 3,\ 4\ \ldots\ n$$

sämmtliche Combinationen ohne Wiederholungen zu je $(n-p-1)$ Elementen und setze jeder einzelnen Complexion noch 1 vor; alsdann ist sie bezüglich die Reihe der zweiten Indices der ersten Zeile von Determinante I, während die ersten Indices ausschliesslich Einheiten sind.

Behalten wir unser bisheriges Beispiel bei, so haben wir, da $(n-p-1) = 1$ ist, im Ganzen $\frac{4}{1}$ Combinationen zu bilden und erhalten so die vier Complexionen

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5. \end{matrix}$$

Diess liefert uns $N = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$ Determinantenproducte:

$$\begin{vmatrix} a_{4,1} & a_{4,2} \\ a_{5,1} & a_{5,2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_{4,1} & a_{4,3} \\ a_{5,1} & a_{5,3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,2} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,2} & a_{3,4} & a_{3,5} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{4,1} & a_{4,4} \\ a_{5,1} & a_{5,4} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,5} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,5} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,5} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_{4,1} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,5} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix}.$$

Auch die das Vorzeichen bestimmenden Betrachtungen reproduciren sich im Wesentlichen, indem man sofort bemerkt, dass es nur wiederum auf den Charakter des ersten Diagonal-Gliedes von Determinante I ankommt. Da das linke obere Eck-Element diessmal nicht

$a_{1,1}$ selbst ist, so tritt zunächst der Factor $(-1)^{1+1}.(-1)^{p+1+1}$ vor. Alle übrigen Bemerkungen bleiben dagegen erhalten, und nehmen wir also die Determinante I der zweiten Serie von N Gliedern in der Fom

$$\begin{vmatrix} a_{p+1,1} & a_{p+1,t_1} & a_{p+1,t_2} & \dots & a_{p+1,t_{n-p-1}} \\ a_{p+2,1} & a_{p+2,t_1} & a_{p+2,t_2} & \dots & a_{p+2,t_{n-p-1}} \\ a_{p+3,1} & a_{p+3,t_1} & a_{p+3,t_2} & \dots & a_{p+3,t_{n-p-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,t_1} & a_{nt_2} & \dots & a_{n,t_{n-p-1}} \end{vmatrix}$$

an, so erhält dieselbe die Factoren

$$(-1)^{p+1+1}.(-1)^{1+1}.(-1)^{1+t_1-1}.(-1)^{1+t_2-2}\dots(-1)^{1+t_{n-p-1}-(n-p-1)}.$$

oder durch Zusammenfassung

$$(-1)^{\left[\frac{3n-p+4-(n-p)^2}{2}+\sum_{k=1}^{k=n-p-1}t_k\right]}.$$

Für uns ist

$$\frac{3n-p+4-(n-p)^2}{2}=6,$$

somit berechnen sich für die zuletzt gefundenen ($N=4$) Glieder die Factoren successive folgendermassen:

$$(-1)^{6+2}=+1;\ (-1)^{6+3}=-1;\ (-1)^{6+4}=+1;\ (-1)^{6+5}=1.$$

Stellen wir jetzt unsere Resultate zusammen, so finden wir speciell

$$\Sigma\pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4}a_{5,5}=\Sigma\pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}.\Sigma\pm a_{4,4}a_{5,5}-\Sigma\pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,4}.\Sigma\pm a_{4,3}a_{5,5}+\Sigma\pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,5}.\Sigma\pm a_{4,3}a_{5,4}+\Sigma\pm a_{1,1}a_{2,3}a_{3,4}.\Sigma\pm a_{4,2}a_{5,5}-\Sigma\pm a_{1,1}a_{2,3}a_{3,5}.\Sigma\pm a_{4,2}a_{5,4}+\Sigma\pm a_{1,1}a_{2,4}a_{3,5}.\Sigma\pm a_{4,2}a_{5,3}$$
$$+\Sigma\pm a_{4,1}a_{5,2}.\Sigma\pm a_{1,3}a_{2,4}a_{3,5}-\Sigma\pm a_{4,1}a_{5,3}.\Sigma\pm a_{1,2}a_{2,4}a_{3,5}$$
$$+\Sigma\pm a_{4,1}a_{5,4}.\Sigma\pm a_{1,2}a_{2,3}a_{3,5}-\Sigma\pm a_{4,1}a_{5,5}.\Sigma\pm a_{1,2}a_{2,3}a_{3,4}.$$

§. 6. Suchen wir jetzt den Zerlegungsprocess durch eine allgemeine Formel darzustellen. Indem wir zu jeder der bereits bekannten Determinanten I die zugehörige Determinante II fügen, finden wir

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$(s_l = l+1,\ l+2 \ldots n-p+1)$$

$$\Sigma (-1)^{\left[\frac{2+3p-p^2}{2} + \sum_{i=1}^{i=p-1} s_i\right]} \times \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,s_1} & a_{1,s_2} & \ldots & a_{1,s_{p-1}} \\ a_{2,1} & a_{2,s_1} & a_{2,s_2} & \ldots & a_{2,s_{p-1}} \\ a_{3,1} & a_{3,s_1} & a_{3,s_2} & \ldots & a_{3,s_{p-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{p,1} & a_{p,s_1} & a_{p,s_2} & \ldots & a_{p,s_{p-1}} \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} a_{p+1,2} & a_{p+1,3} \ldots a_{p+1,s_1-1} & a_{p+1,s_1+1} \ldots a_{p+1,s_2-1} & a_{p+1,s_2+1} \ldots a_{p+1,n} \\ a_{p+2,2} & a_{p+2,3} \ldots a_{p+2,s_1-1} & a_{p+2,s_1+1} \ldots a_{p+2,s_2-1} & a_{p+2,s_2+1} \ldots a_{p+2,n} \\ a_{p+3,2} & a_{p+3,3} \ldots a_{p+3,s_1-1} & a_{p+3,s_1+1} \ldots a_{p+3,s_2-1} & a_{p+3,s_2+1} \ldots a_{p+3,n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n,2} & a_{n,3} \ldots a_{n,s_1-1} & a_{n,s_1+1} \ldots a_{n,s_2-1} & a_{n,s_2+1} \ldots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$(t_m = m+1,\ m+2 \ldots p+2)$$

$$+ \Sigma (-1)^{\left[\frac{3n-p+4-(n-p)^2}{2} + \sum_{k=1}^{k=n-p-1} t_k\right]} \times \begin{vmatrix} a_{p+1,1} & a_{p+1,t_1} & a_{p+1,t_2} \ldots a_{p+1,t_{n-p-1}} \\ a_{p+2,1} & a_{p+2,t_1} & a_{p+2,t_2} \ldots a_{p+2,t_{n-p-1}} \\ a_{p+3,1} & a_{p+3,t_1} & a_{p+3,t_2} \ldots a_{p+3,t_{n-p-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n,1} & a_{n,t_1} & a_{n,t_2} \ldots a_{n,t_{n-p-1}} \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \ldots a_{1,t_1-1} & a_{1,t_1+1} \ldots a_{1,t_2-1} & a_{1,t_2+1} \ldots a_{1,n} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \ldots a_{2,t_1-1} & a_{2,t_1+1} \ldots a_{2,t_2-1} & a_{2,t_2+1} \ldots a_{2,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \ldots a_{3,t_1-1} & a_{3,t_1+1} \ldots a_{3,t_2-1} & a_{3,t_2+1} \ldots a_{3,n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{p,2} & a_{p,3} \ldots a_{p,t_1-1} & a_{p,t_1+1} \ldots a_{p,t_2-1} & a_{p,t_2+1} \ldots a_{p,n} \end{vmatrix}$$

Die den Summenzeichen oben beigesetzten Klammern besagen, welche Werte jedes einzelne s und t anzunehmen vermag *).

*) Eine kürzere Bezeichnung der einzelnen Glieder könnte man durch

Fragen wir schliesslich, wie gross die Anzahl der in diese Reihe eingegangenen Glieder sei, so müssen wir die für M und N gefundenen Werte addiren. Es ist

$$M+N=\frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!}+\frac{(n-1)!}{p!\,(n-p-1)!}=(n-1)!\left[\frac{p+n-p}{p!\,(n-p)!}\right]$$
$$=\frac{n!}{p!\,(n-p)!},$$

wie dies denn auch aus Jacobi's allgemeiner Formel (s. o. §. 1.) sich ergeben hätte.

§. 7. Wie gleich anfangs bemerkt, galt die ganze bisher durchgeführte Untersuchung nur für den Fall, dass das erste Glied der Reihe ein bestimmtes sei. Heben wir jetzt diese Beschränkung auf, indem wir die Annahme machen, irgend eine Unterdeterminante $p$ten Grades sei als Determinante I des ersten Gliedes gegeben, etwa diese:

$$\begin{vmatrix} a_{v_1,w_1} & a_{v_1,w_2} & \dots & a_{v_1,w_p} \\ a_{v_2,w_1} & a_{v_2,w_2} & \dots & a_{v_2,w_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{v_p,w_1} & a_{v_p,w_2} & \dots & a_{v_p,w_p} \end{vmatrix}$$

Um nun gleichwohl das bisherige Verfahren auch hier anwenden zu können, verfahren wir folgendermassen: Wir machen diejenige Colonne, welche als zweiten Index die Zahl w_1 trägt, zur ersten, diejenige, welche den zweiten Index 1 hat, zur zweiten, die bisherige dritte zur zweiten etc., und endlich die bisherige (w_1-1)te zur $w_1$ten; dadurch multiplicirt sich die ganze Determinante mit dem Factor $(-1)^{w_1}$. Bringt man ebenso die bisherige $w_2$te Colonne unter den nämlichen Bedingungen an die zweite Stelle, so tritt der Factor $(-1)^{w_2-2}$ auf und so schreitet man fort, bis endlich die früher $p$te Colonne nun durch die $w_p$te ersetzt ist; der dadurch entstehende Factor ist

---

Anwendung der Differentialquotienten gewinnen, indem man z. B. statt der ersten der vier obigen Determinanten den Ausdruck

$$\frac{\partial^{n-p}\Delta}{\partial a_{n,n}\,.\,\partial a_{n-1,n-1}\dots\partial a_{p,p}\,.\,\partial a_{p-2,p-2}\dots\partial a_{2,2}}$$

setzte; allein die Uebersichtlichkeit würde aus dieser Substitution gerade keinen Vorteil ziehen.

$$(-1)^{w_1-1+w_2-2+\ldots+w_p-p} = (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{i=p} w_i - \frac{p(p+1)}{2}}$$

Ganz ebenso wie mit den Colonnen verfahre man nun mit den Zeilen; hiedurch erhält man den Factor

$$(-1)^{v_1-1+v_2-2+\ldots+v_p-p} = (-1)^{\sum\limits_{k=1}^{k=p} v_k - \frac{p(p+1)}{2}}$$

und die Determinante Δ selbst hat folgende Gestalt angenommen:

$$(-1)^{\sum\limits_{l=1}^{l=p}(v_l+w_l)-p(p+1)} \times \begin{vmatrix} a_{v_1,w_1} \ldots a_{v_1,w_p} & a_{v_1,1} & a_{v_1,2} \ldots a_{v_1,w_1-1} & a_{v_1,w_1+1} \ldots a_{v_1,n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{v_p,w_1} \ldots a_{v_p,w_p} & a_{v_p,1} & a_{v_p,2} \ldots a_{v_p,w_1-1} & a_{v_p,w_1+1} \ldots a_{v_p,n} \\ a_{1,w_1} \ldots a_{1,w_p} & a_{1,1} & a_{1,2} \ldots a_{1,w_1-1} & a_{1,w_1+1} \ldots a_{1,n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n,w_1} \ldots a_{n,w_p} & a_{n,1} & a_{n,2} \ldots a_{n,w_1-1} & a_{n,w_1+1} \ldots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Diese Determinante besitzt allerdings nicht die von uns zu Grunde gelegte Normalform, kann aber leicht auf dieselbe reducirt werden, wenn man sie mit einer Hülfsdeterminante

$$\begin{vmatrix} a_{I,I} & a_{I,II} & \ldots & a_{I,N-I} & a_{I,N} \\ a_{II,I} & a_{II,II} & \ldots & a_{II,N-I} & a_{II,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{N-I,I} & a_{N-I,II} & \ldots & a_{N-I,N-I} & a_{N-I,N} \\ a_{N,I} & a_{N,II} & \ldots & a_{N,N-I} & a_{N,N} \end{vmatrix}$$

vergleicht.

Soll z. B. in der oben betrachteten Determinante fünften Grades die Unterdeterminante

$$\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \\ a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} \end{vmatrix}$$

als Determinante I des ersten Reihengliedes erscheinen, so setze man, da der Exponent von (-1) jetzt den Wert 8 annimmt,

$$\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,1} & a_{2,5} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,1} & a_{4,5} \\ a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,1} & a_{5,5} \\ a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,1} & a_{1,5} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,1} & a_{3,5} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{I,I} & a_{I,II} & a_{I,III} & a_{I,IV} & a_{I,V} \\ a_{II,I} & a_{II,II} & a_{II,III} & a_{II,IV} & a_{II,V} \\ a_{III,I} & a_{III,II} & a_{III,III} & a_{III,IV} & a_{III,V} \\ a_{IV,I} & a_{IV,II} & a_{IV,III} & a_{IV,IV} & a_{IV,V} \\ a_{V,I} & a_{V,II} & a_{V,III} & a_{V,IV} & a_{V,V} \end{vmatrix}$$

entwickle diese Hülfsform genau nach den in §. 5. und 6. gegebenen Regeln und setze zum Schluss

$$\begin{array}{lllll} I\;I = 22, & I\;II = 23, & I\;III = 24, & I\;IV = 21, & I\;V = 25, \\ II\;I = 42, & II\;II = 43, & II\;III = 44, & II\;IV = 41, & II\;V = 45, \\ III\;I = 52, & III\;II = 53, & III\;III = 54, & III\;IV = 51, & III\;V = 55, \\ IV\;I = 12, & IV\;II = 13, & IV\;III = 14, & IV\;IV = 11, & IV\;V = 15, \\ V\;I = 32, & V\;II = 33, & V\;III = 34, & V\;IV = 31, & V\;V = 35. \end{array}$$

Jedenfalls wird lediglich bei einer derartigen Behandlungsweise das wichtige Corollar der Laplace'schen Theoreme dem Anfänger vollständig klar werden, welchem zufolge, wenn $p(n-p)$ ein Rechteck erfüllende Elemente sich annulliren, die Determinante selbst als Product zweier Determinanten vom $p$ten und $(n-p)$ten Grade sich darstellen lässt. Ist nämlich in der Determinante Δ das Elementen-Rechteck *)

$$\left\Vert \begin{array}{llll} a_{v_1,w_1} & a_{v_1,w_2} & \ldots & a_{v_1,w_p} \\ a_{v_2,w_1} & a_{v_2,w_2} & \ldots & a_{v_p,w_p} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{v_{n-p-1},w_1} & a_{v_{n-p-1},w_2} & \ldots & a_{v_{n-p-1},w_p} \\ a_{v_{n-p},w_1} & a_{v_{n-p},w_2} & \ldots & a_{v_{n-p},w_p} \end{array} \right\Vert \equiv \left\Vert \begin{array}{ccc} 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 \ldots & 0 \end{array} \right\Vert$$

und bringt man durch eine Folge von Reihenvertauschungen, welchen die Factoren

$$(-1)^{w_1-1} \cdot (-1)^{w_2-2} \ldots (-1)^{w_p-p} \cdot (-1)^{v_{n-p}-1} \cdot (-1)^{v_{n-p-1}-2} \ldots (-1)^{v_1-(n-p)} \equiv P$$

entsprechen, jenes Rechteck in die untere linke Ecke des Quadrates, so resultirt

*) Die Doppelstriche der Einfassung sollen hier nicht etwa besagen, dass man es mit Matrizen, sondern lediglich, dass man es mit rechteckigen Schematen zu tun habe.

$$\varDelta = P.\left|\begin{array}{llllllll}
a_{1,w_1} & a_{1,w_2} \ldots a_{1,w_p} & a_{1,1} & \ldots a_{1,w_1-1} & a_{1,w_1+1} & \ldots a_{1,n} \\
a_{2,w_1} & a_{2,w_2} \ldots a_{2,w_p} & a_{2,1} & \ldots a_{2,w_1-1} & a_{2,w_1+1} & \ldots a_{2,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n,w_1} & a_{n,w_2} \ldots a_{n,w_p} & a_{n,1} & \ldots a_{n,w_1-1} & a_{n,w_1+1} & \ldots a_{n,n} \\
0 & 0 \quad \ldots 0 & a_{v_1,1} & \ldots a_{v_1,w_1-1} & a_{v_1,w_1+1} & \ldots a_{v_1,n} \\
0 & 0 \quad \ldots 0 & a_{v_2,1} & \ldots a_{v_2,w_1-1} & a_{v_2,w_1+1} & \ldots a_{v_2,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 \quad \ldots 0 & a_{v_{n-p-1},1} & \ldots a_{v_{n-p-1},w_1-1} & a_{v_{n-p-1},w_1+1} & \ldots a_{v_{n-p-1},n} \\
0 & 0 \quad \ldots 0 & a_{v_{n-p},1} & \ldots a_{v_{n-p},w_1-1} & a_{v_{n-p},w_1+1} & \ldots a_{v_{n-p},n}
\end{array}\right|$$

$$= (-1)^{\left[\sum\limits_{\varrho=1}^{\varrho=p} w_\varrho + \sum\limits_{\sigma=1}^{\sigma=n-p} v_\sigma - \frac{n^2+n+2p^2-2np}{2}\right]} \times \left|\begin{array}{llll}
a_{1,w_1} & a_{1,w_2} & \ldots & a_{1,w_p} \\
a_{2,w_1} & a_{2,w_2} & \ldots & a_{2,w_p} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n,w_1} & a_{n,w_2} & \ldots & a_{n,w_p}
\end{array}\right|$$

$$\times \left|\begin{array}{llll}
a_{v_1,1} & \ldots\; a_{v_1,w_1-1} & a_{v_1,w_1+1} & \ldots\; a_{v_1,n} \\
a_{v_2,1} & \ldots\; a_{v_2,w_1-1} & a_{v_2,w_1+1} & \ldots\; a_{v_2,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{v_{n-p},1} & \ldots\; a_{v_{n-p},w_1-1} & a_{v_{n-p},w_1+1} & \ldots\; a_{v_{n-p},n}
\end{array}\right|$$

Die hier gegebene Regel, das Vorzeichen des im gegebenen Falle allein übrig bleibenden Gliedes zu bestimmen, halten wir für neu; erst durch sie erhält der so sehr verwendbare Satz die rechte praktische Brauchbarkeit.

§. 8. Man erkennt leicht, dass die hier gegebene vollständige Discussion der Zerlegung in zweigliedrige Summen auch die mehrgliedrige involvirt:

Soll eine Determinante ausgedrückt werden als eine algebraische Summe von Gliedern, deren jedes aus h Determinantenfactoren besteht, so führt man dies Problem direct auf das im Vorstehenden gelöste zurück.

Der Grad der ursprünglichen Determinante sei n, die Grade der Unterdeterminanten, von denen immer je h mit einander multiplicirt in der Reihe erscheinen sollen, seien bezüglich $g_1, g_2, g_3 \ldots g_h$, wobei natürlich

$$g_1 + g_2 + \ldots + g_h = n$$

sein muss. Dass die Anzahl der Reihenglieder dann

$$\frac{n!}{g_1!\,g_2!\ldots g_k!}$$

ist, lässt sich durch Induction unmittelbar aus der von uns bereits bewiesenen Relation ableiten. Was dann die Zerlegung selbst angeht, so kann man dieselbe in folgender Weise bewerkstelligen:

Man betrachte zunächst den früheren Fall gegeben und zerlege die vorgelegte Determinante in ein Aggregat, dessen Glieder bezüglich durch Multiplication zweier Determinanten vom $(n-g_k)$ten und $g_k$ten Grade entstehen. Jedes einzelne dieser Glieder behandle man ebenso; die beiden Factoren jedes Aggregat-Gliedes werden nunmehr Determinanten vom $(n-g_k-g_{k-1})$ten und g_{k-1}ten Grade sein. Diesen Weg consequent fortsetzend gelangt man schliesslich dazu, die ursprüngliche Determinante in Form einer Summe darzustellen, deren einzelne Summanden Producte aus h Determinanten vom resp. $g_1, g_2 \ldots g_k$ten Grade sind.

Sollen wir etwa die siebenreihige Determinante

$$\left|\begin{array}{cc:ccc:cc}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} & a_{1,7} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} & a_{2,7} \\
\hdashline
a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} & a_{3,7} \\
a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} & a_{4,7} \\
a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} & a_{5,7} \\
\hdashline
a_{6,1} & a_{6,2} & a_{6,3} & a_{6,4} & a_{6,5} & a_{6,6} & a_{6,7} \\
a_{7,1} & a_{7,2} & a_{7,3} & a_{7,4} & a_{7,5} & a_{7,6} & a_{7,7}
\end{array}\right|$$

so zerlegen, dass $h = 3$, $g_1 = 2$, $g_2 = 3$, $g_3 = 2$ würde, so müssen wir zunächst wiederum eine arbiträre Bestimmung treffen, in welchem Cyklus die Zerfällung vor sich gehen soll. Am naturgemässesten werden wir handeln, wenn wir nach den im Schema angegebenen Linien zerteilen und als erstes Glied der zu bildenden Reihe das Product

$$+\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{6,6} & a_{6,7} \\ a_{7,6} & a_{7,7} \end{vmatrix}$$

gelten lassen. Alsdann ist der Charakter des Zerlegungsprocesses völlig bestimmt; ist z. B. als Determinante *III* die folgende

$$\begin{vmatrix} a_{6,1} & a_{6,6} \\ a_{7,1} & a_{7,6} \end{vmatrix}$$

gegeben, so erkennt man sofort, dass dieselbe in der erst gebildeten Reihe in Verbindung mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,7} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,7} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,7} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,7} \\ a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,7} \end{vmatrix}$$

auftritt. Handelt es sich dann darum, das Vorzeichen des Gliedes

$$\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,5} \\ a_{2,2} & a_{2,5} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,7} \\ a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,7} \\ a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,7} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{6,1} & a_{6,6} \\ a_{7,1} & a_{7,6} \end{vmatrix}$$

a priori zu bestimmen, so ist zweierlei zu tun. Man muss vorerst das Vorzeichen des Productes aufsuchen, so lange es nur aus zwei Gliedern besteht; hier ist

$$\frac{3n-p+4-(n-p)^2}{2}=8, \quad \sum_{k=1}^{k=1} t_k = t = 7,$$

also haben wir den Factor $(-1)^{8+7}=-1$. Der Fall, in welchem die erste Colonne nicht mehr als ersten Index 1, sondern eine andere Zahl aufwiese, lässt sich sofort auf diesen zurückführen, wie wir gleich zeigen wollen.

Denn wenn wir jetzt den zweiten Teil unserer Aufgabe in Angriff nehmen, müssen wir darauf achten, dass unsere Determinante fünften Grades nicht in der Normalform gegeben ist; denken wir uns aber wieder eine Hülfsdeterminante $\Sigma \pm a_{I,I}\, a_{II,II}\, a_{III,III}\, a_{IV,IV}\, a_{V,V}$ eingeführt, so erhellt, dass die ersten Indices beider Determinanten die gleichen sind, und dass, um von der zweiten auf die erste zurückzugehen, die zweiten Indices lediglich um eine Einheit vermindert werden müssen. Wir müssen demnach eigentlich das Zeichen des Productes

$$\begin{vmatrix} a_{I,I} & a_{I,IV} \\ a_{II,I} & a_{II,IV} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{III,II} & a_{III,III} & a_{III,VI} \\ a_{IV,II} & a_{IV,III} & a_{IV,VI} \\ a_{V,II} & a_{V,III} & a_{V,VI} \end{vmatrix}$$

ermitteln; hier ist

$$\frac{2+3p-p^2}{2}=2,\ \sum_{i=1}^{i=1} s_i=4,$$

also tritt $(-1)^{2+4}$ vor. Im Ganzen wird folglich dem fraglichen aus drei Determinantenfactoren gebildeten Gliede das Zeichen

$$(-1)^{8+7+2+4}=-1$$

beizugeben sein.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass auch in diesem allgemeinen Falle die Vorzeichenbestimmung aus einer independenten, aller Wahrscheinlichkeit nach freilich höchst complicirten Regel entnommen werden kann. Wir begnügen uns jedoch, dies für die praktisch wichtigste Specialität direct nachgewiesen, im Uebrigen aber einen Weg angedeutet zu haben, wie die Zerlegung sich factisch bewerkstelligen lässt.

XIV.

Studien zu Fürstenau's neuer Methode der Darstellung und Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coefficienten.

Von

Herrn *Hans Naegelsbach*,
Gymnasialprofessor in Zweibrücken.

Die neue Methode Fürstenau's, von ihm bekannt gemacht in zwei Abhandlungen, Marburg 1860 und Marburg 1867, in weiteren Kreisen wohl bekannt geworden durch ihre Aufnahme in Dr. Günther's Lehrbuch der Determinanten, beruht darauf, dass durch Elimination aus einer unendlichen Anzahl von Gleichungen die dem absoluten Wert nach kleinste, resp. grösste Wurzel einer algebraischen Gleichung gefunden wird als Quotient zweier Determinanten von unendlichem Grad. Durch eben solche Determinanten lassen sich dann auch die Coefficienten derjenigen Gleichung $k$ten Grades darstellen, welche die k kleinsten, resp. grössten Wurzeln der gegebenen Gleichung zu Wurzeln hat. Von einem Paar absolut kleinster oder grösster complexer Wurzeln lässt sich also die Summe und das Product durch solche Determinanten darstellen. Indem man statt der unendlichen Determinanten solche von endlichem, allmählich wachsendem Grad nimmt, erhält man Näherungswerte für die Wurzeln. Die Annäherung beruht darauf, dass bei wachsenden Exponenten gegen eine Potenz der grössten Wurzel die gleich hohen Potenzen der übrigen Wurzeln immer mehr verschwinden. Hier zeigt sich die Verwandtschaft der neuen

Methode mit einer schon von Daniel Bernoulli vorgeschlagenen, von Euler, Fourier, Stern weiter ausgebildeten Methode, nach welcher von den mittels der Newton'schen Formel zu bildenden Summe der gleichen Potenzen ausgegangen wird, und ebenfalls die Coefficienten der Gleichung bestimmt werden, welche die k grössten, resp. kleinsten Wurzeln der gegebenen Gleichung zu Wurzeln hat. Die Rechnung selbst gestaltet sich schliesslich bei beiden Methoden ganz gleich. Es soll durch diese Bemerkung keineswegs der Wert der neuen Methode herabgesetzt werden, sie hat ohne Zweifel ihren eignen theoretischen Wert und in Bezug auf praktische Anwendbarkeit scheint sie einer weiteren Ausbildung fähig zu sein, die ihr den Vorzug vor jener älteren Methode verleihen dürfte.

Für den Verfasser dieser Abhandlung hat die neue Methode besonders deshalb Interesse gehabt, weil sie in nahem Zusammenhang steht mit einer Classe von symmetrischen Functionen, die er in einem Programm des Zweibrücker Gymnasiums vom Jahr 1871 ausführlich behandelt, und dann wiederholt angewandt hat in Abhandlungen, die in der Zeitschrift für Math. u. Phys. niedergelegt sind. Ist $fx = 0$ die gegebene Gleichung, so sind diese Functionen nichts andres als die Coefficienten der Entwicklung von $\frac{1}{fx}$ nach fallenden, resp. steigenden Potenzen von x, und Fürstenau's Determinanten sind die Darstellungen dieser Functionen durch die Coefficienten der Gleichung. Aus diesem Zusammenhang ergibt sich eine wesentlich vereinfachte Ableitung der Methode, eine bequemere Darstellung und der genaue Ausdruck des Fehlers, den ein beliebiger Näherungswert in sich schliesst. Durch den letzteren erhält man Aufschluss über die Art, in welcher die Annäherung vor sich geht, und die Möglichkeit, Correcturen anzubringen, welche die Genauigkeit wesentlich vergrössern. Der letzte Punkt soll in einer folgenden Abhandlung untersucht werden. Ueber den vorletzten Punkt ist zu bemerken, dass mein Freund, Dr. Günther, bewiesen hat, dass die aufeinanderfolgenden Näherungswerte der Wurzeln sich als aufeinanderfolgende Näherungswerte eines unendlichen Kettenbruchs darstellen lassen. Der Schluss aber, den er daraus gezogen hat, dass nämlich die Näherungswerte abwechselnd grösser und kleiner als der wahre Wert sein müssen, ist nicht richtig. Der fragliche Kettenbruch kann auch negative Zähler enthalten, und dann verlieren seine Näherungsbrüche jene Eigenschaft.

Die Kenntniss der Fürstenau'schen Abhandlungen ist bei dem Folgenden nicht vorausgesetzt. Was von des Verfassers eignen früheren Arbeiten zur Anwendung kommt, soll, soweit es das Verständniss erheischt, kurz wiederholt werden.

§. 1.

Es sei

$$fx = x^n + C_1 x^{n-1} + \dots + C_n = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n) = 0$$

die gegebene Gleichung, so ist, wie bei Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, 4. Aufl. §. 10, 9., zu finden:

a) $$\frac{1}{fx} = \sum_{r=0}^{r=\infty} (\alpha_1{}^r \dots \alpha_n) . x^{-n-r},$$

wobei

b) $$(\alpha_1{}^r \dots \alpha_n) = \frac{\alpha_1{}^{r+n-1}}{f'(\alpha_1)} + \dots + \frac{\alpha_n{}^{r+n-1}}{f'(\alpha_n)}$$

$$= \frac{1}{\Delta(\alpha_1 \dots \alpha_n)} . \begin{vmatrix} \alpha_1{}^0, & \alpha_1{}^1, \dots & \alpha_1{}^{n-2}, & \alpha_1{}^{n-1+r} \\ \alpha_2{}^0, & \alpha_2{}^1, \dots & \alpha_2{}^{n-2}, & \alpha_2{}^{n-1+r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_n{}^0, & \alpha_n{}^1, \dots & \alpha_n{}^{n-2}, & \alpha_n{}^{n-1+r} \end{vmatrix}.$$

Dabei hat man auch noch

c) $$(\alpha_1{}^r \dots \alpha_n) = \sum_{a+b+\dots n=r} \alpha_1{}^a \alpha_2{}^b \dots \alpha_n{}^n,$$

d. h. kurz ausgedrückt: $(\alpha_1{}^r \dots \alpha_n)$ ist die Summe der Combinationen $r$ter Classe mit Wiederholungen der Elemente $\alpha_1 \dots \alpha_n$ gerade wie die Coefficienten von fx selbst die Summe der Combinationen ohne Wiederholungen derselben Elemente sind. Aus der Definitionsgleichung ergibt sich noch unmittelbar, dass $(\alpha_1{}^r \dots \alpha_n) = 0$ ist für $r = -1, -2, \dots -(n-1)$ und gleich 1 für $r = 0$.

Ganz analog ist nun auch, wie ich in dem erwähnten Programm gezeigt habe,

d) $$\frac{1}{fx} = -\sum_{r=1}^{r=\infty} (\alpha_1{}^{-r} \dots \alpha_n) . x^{-n+r}.$$

Für die $(\alpha_1{}^{-r} \dots \alpha_n)$ gilt als Definition noch immer die b), wenn man dort r negativ nimmt. Statt der c) aber hat man

e) $$(\alpha_1{}^{-r} \dots \alpha_n) = \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} . \sum_{a+b+\dots n=r-n} \alpha_1{}^{-a} \alpha_2{}^{-b} \dots \alpha_n{}^{-n}.$$

Man könnte also sagen, $(\alpha_1{}^{-r} \dots \alpha_n)$ ist die Summe der Combinationen $(-r)$ter Classe mit Wiederholungen der Elemente $\alpha_1 \dots \alpha_n$, doch ist der Ausdruck unverständlich ohne die beigegebene Gleichung e).

Für die $(\alpha_1{}^r \dots \alpha_n)$, für die ich die Bezeichnung Divisionscoefficienten vorgeschlagen habe, folgt nun aus a) und d), gültig für jedes ganze r, die identische Relation

f) $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n) + C_1(\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n) + \ldots + C_{n-1}(\alpha_1^{r-n+1} \ldots \alpha_n) + C_n(\alpha_1^{r-n} \ldots \alpha_n) = 0.$

Eine zweite wichtige Identität, auf welcher die Resultate dieser Abhandlung wesentlich beruhen, ist die folgende:

$$\text{g)}\quad (\alpha_1^r \ldots \alpha_n) - \underset{(\alpha_{n-i+1} \ldots \alpha_n)}{C^1} (\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n) + \underset{(\alpha_{n-i+1} \ldots \alpha_n)}{C^2} (\alpha_1^{r-2} \ldots \alpha_n) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^i \underset{(\alpha_{n-i+1} \ldots \alpha_n)}{C^i} (\alpha_1^{r-i} \ldots \alpha_n) = (\alpha_1^r \ldots \alpha_{n-i})$$

Dabei bedeutet $\underset{(\alpha_{n-i+1} \ldots \alpha_n)}{C^a}$ die Summe der Combinationen $a$ter Classe ohne Wiederholungen der i Elemente $\alpha_{n-i+1}, \alpha_{n-i+2}, \ldots \alpha_n$. Diese Identität ist ein besonderer Fall einer allgemeineren, die ich in der Abhandlung über die independente Darstellung der Bernoulli'schen Zahlen, Jahrgang 19. der Zeitschrift für Math. u. Phys. p. 220, benützt habe. Für den besonderen Fall gibt wohl den einfachsten Beweis die Identität der Entwicklungen von

$$\frac{(x - \alpha_{n-i+1})(x - \alpha_{n-i+2}) \ldots (x - \alpha_n)}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)} \text{ und } \frac{1}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_{n-i})}.$$

Ein besonderer Fall der g) ist wieder die Relation

$$\text{h)}\qquad (\alpha_1^r \ldots \alpha_n) = (\alpha_1^r \ldots \alpha_{n-1}) + \alpha_n (\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n)$$

welche sich auch leicht aus b), oder aus c) und e) ergibt, und daraus abgeleitet

$$\text{i)}\quad \frac{(\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}{}^r\ \alpha_{i+1} \ldots \alpha_n) - (\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}{}^r\ \alpha_{k+1} \ldots \alpha_n)}{\alpha_k - \alpha_i} = (\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n).$$

Einige weitere, in der Abhandlung nur zu Umformungen angewandte und zum Verständniss des Ganzen nicht wesentliche Identitäten sollen noch hier ohne Beweis zusammengestellt werden. Bezüglich des Beweises muss ich auf das Programm verweisen. Man hat allgemein bei Determinanten $n$ten Grades

$$\text{k)}\qquad \frac{1}{\Delta(\alpha_1 \ldots \alpha_n)} \begin{vmatrix} \alpha_1^m, & \alpha_1^p \ldots \alpha_1^r \\ \alpha_2^m, & \alpha_2^p \ldots \alpha_2^r \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_n^m, & \alpha_n^p \ldots \alpha_n^r \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (\alpha_1^m \ldots \alpha_n), & (\alpha_1^p \ldots \alpha_n) & \ldots (\alpha_1^r \ldots \alpha_n) \\ (\alpha_1^{m-1} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1^{p-1} \ldots \alpha_n) & \ldots (\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (\alpha_1^{m-n+1} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1^{p-n+1} \ldots \alpha_n) & \ldots (\alpha_1^{r-n+1} \ldots \alpha_n) \end{vmatrix}$$

und deshalb auch

$$
\text{l)}\quad
\begin{vmatrix}
(\alpha_1^{m}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{p}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1^{r}\ldots\alpha_n)\\
(\alpha_1^{m-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{p-1}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n)\\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\\
(\alpha_1^{m-n+1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{p-n+1}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1^{r-n+1}\ldots\alpha_n)
\end{vmatrix}
$$

$$
= (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)^{-q}
\begin{vmatrix}
(\alpha_1^{m+q}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{p+q}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1^{r+q}\ldots\alpha_n)\\
(\alpha_1^{m+q-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{p+q-1}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1^{r+q-1}\ldots\alpha_n)\\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\\
(\alpha_1^{m+q-n+1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{p+q-n+1}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1^{r+q-n+1}\ldots\alpha_n)
\end{vmatrix}
$$

Um aber solche Determinanten durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung auszudrücken, dient die Identität

$$
\text{m)}\quad
\begin{vmatrix}
(\alpha_1^{q}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{s}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{t}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1^{u}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{v}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{w}\ldots\alpha_n)\\
(\alpha_1^{q-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{s-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{t-1}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1^{u-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{v-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{w-1}\ldots\alpha_n)\\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\\
(\alpha_1^{q-n+1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{s-n+1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{t-n+1}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1^{u-n+1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{v-n+1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{w-n+1}\ldots\alpha_n)
\end{vmatrix}
$$

$$
= (-1)^{q+s+\ldots v+w-\frac{n.n-1}{2}}\,.\,C_n^{q}
$$

$$
\times
\begin{vmatrix}
C_1, & C_2, \ldots & C_{w-v-1}, & C_{w-v+1}, \ldots & C_{w-u-1}, & C_{w-u+1}, \ldots & C_{w-t-1}, & C_{w-t+1}, \ldots & C_{w-s-1}, & C_{w-s+1}, \ldots & C_{w-q-1}\\
C_0, & C_1, \ldots & C_{w-v-2}, & C_{w-v}, \ldots & C_{w-u-2}, & C_{w-u}, \ldots & C_{w-t-2}, & C_{w-t}, \ldots & C_{w-s-2}, & C_{w-s}, \ldots & C_{w-q-2}\\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot
\end{vmatrix}
$$

Die erste Determinante ist vom $n$ten Grad und die q, s, t ... u, v, w sind steigend geordnet. Die zweite Determinante ist vom $(w-q-n+1)$ten Grad. Die Indices der C nehmen in jeder Colonne von oben nach unten je um 1 ab, und für diejenigen C, deren Indices grösser als n oder negativ werden, ist Null zu setzen. Determinanten von der Form der ersten aber von niedrigerem Grad lassen sich, ohne die Form zu verlieren, durch Ränderung leicht auf den $n$ten Grad bringen.

Endlich lässt sich das Product zweier solcher Determinanten $n$ten Grades in eine einzige solche Determinante, bei der aber auch die Indices in den verschiedenen Zeilen um andere Zahlen als 1 differiren, verwandeln durch die Identität

$$
\text{n)}\quad
\begin{vmatrix}
(\alpha_1{}^{r}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{s}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1{}^{v}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{w}\ldots\alpha_n)\\
(\alpha_1{}^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{s-1}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1{}^{v-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{w-1}\ldots\alpha_n)\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
(\alpha_1{}^{r-n+1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{s-n+1}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1{}^{v-n+1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{w-n+1}\ldots\alpha_n)
\end{vmatrix}
$$

$$
\times
\begin{vmatrix}
(\alpha_1{}^{-h+n-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{-g+n-1}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1{}^{-a+n-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{n-1}\ldots\alpha_n)\\
(\alpha_1{}^{-h+n-2}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{-g+n-2}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1{}^{-a+n-2}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{n-2}\ldots\alpha_n)\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
(\alpha_1{}^{-h}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{-g}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1{}^{-a}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{0}\ldots\alpha_n)
\end{vmatrix}
$$

$$
=
\begin{vmatrix}
(\alpha_1{}^{r}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{s}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1{}^{v}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{w}\ldots\alpha_n)\\
(\alpha_1{}^{r-a}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{s-a}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1{}^{v-a}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{w-a}\ldots\alpha_n)\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
(\alpha_1{}^{r-g}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{s-g}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1{}^{v-g}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{w-g}\ldots\alpha_n)\\
(\alpha_1{}^{r-h}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{s-h}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1{}^{v-h}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{w-h}\ldots\alpha_n)
\end{vmatrix}
$$

Diese Formeln sind sämmtlich Identitäten und bleiben richtig, auch wenn unter den α gleiche Werte vorkommen. Im Folgenden denken wir uns durchaus die α ihrer absoluten Grösse nach geordnet, so dass α_1 die kleinste, α_n die grösste unter den Wurzeln der Gleichung $f_x = 0$ bedeutet. Bei complexen Grössen vertritt der Modul die Stelle des absoluten Wertes.

Zu den Fürstenau'schen Resultaten führt nun einfach die Untersuchung, für welche Werte von r die Entwicklungen a) und d) convergent bleiben. Man findet sofort, dass für wachsende r das Verhältniss $\frac{(\alpha_1{}^{r}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1{}^{r-1}\ldots\alpha_n)}$ sich dem α_n nähert, wenn α_n ein einzelner absolut grösster Wert ist, und ebenso, dass $\frac{(\alpha_1{}^{-r}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1{}^{-r-1}\ldots\alpha_n)}$ sich dem Wert α_1 nähert unter der entsprechenden Bedingung. Sind aber α_{n-1} und α_n absolut gleich, so findet man für jenes Verhältniss andere Ausdrücke, die durch Elimination die übrigen Resultate geben. Ehe wir darauf im nächsten Paragraphen eingehen, sei noch, um später Weitläufigkeiten zu vermeiden, bezüglich der Bezeichnung folgendes festgesetzt. Es ist immer

$$
\begin{aligned}
g_x &= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-1}) = x^{n-1}+G_1x^{n-2}+\ldots G_{n-1},\\
h_x &= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-2}) = x^{n-2}+H_1x^{n-3}+\ldots H_{n-2},\\
i_x &= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-3}) = x^{n-3}+J_1x^{n-4}+\ldots J_{n-3},\\
q_x &= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-4}) = x^{n-4}+Q_1x^{n-5}+\ldots Q_{n-4},\\
k_x &= (x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n) \quad = x^{n-1}+K_1x^{n-2}+\ldots K_{n-1},\\
l_x &= (x-\alpha_3)(x-\alpha_4)\ldots(x-\alpha_n) \quad = x^{n-2}+L_1x^{n-3}+\ldots L_{n-2},\\
m_x &= (x-\alpha_4)(x-\alpha_5)\ldots(x-\alpha_n) \quad = x^{n-3}+M_1x^{n-4}+\ldots M_{n-4}.
\end{aligned}
$$

Die ersten Ableitungen dieser Ausdrücke mögen dann durch einen Accent bezeichnet werden, so dass man z. B. hat

$$f'\alpha_n = (\alpha_n - \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_2)\ldots(\alpha_n - \alpha_{n-1}) = g\alpha_n.$$

§. 2.

Ist α_n ein einzelner absolut grösster Wert, so nähert sich mit wachsendem r $(\alpha_1^r\ldots\alpha_n)$ dem Wert $\frac{\alpha_n^{r+n-1}}{f'\alpha_n}$, denn man hat

$$(\alpha_1^r\ldots\alpha_n) = \frac{1}{\Delta(\alpha_1\ldots\alpha_n)}\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1^0, & \alpha_1^1 & \ldots\, \alpha_1^{n-2}, & \alpha_1^{r+n-1} \\ \alpha_2^0, & \alpha_2^1 & \ldots\, \alpha_2^{n-2}, & \alpha_2^{r+n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n-1}^0, & \alpha_{n-1}^1 & \ldots\, \alpha_{n-1}^{n-2}, & \alpha_{n-1}^{r+n-1} \\ \alpha_n^0, & \alpha_n^1 & \ldots\, \alpha_n^{n-2}, & \alpha_n^{r+n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\alpha_n^{r+n-1}}{\Delta(\alpha_1\ldots\alpha_n)}\cdot\begin{vmatrix} \alpha_1^0, & \alpha_1^1 & \ldots\, \alpha_1^{n-2}, & \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_n}\right)^{r+n-1} \\ \alpha_2^0, & \alpha_2^1 & \ldots\, \alpha_2^{n-2}, & \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_n}\right)^{r+n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n-1}^0, & \alpha_{n-1}^1 & \ldots\, \alpha_{n-1}^{n-2}, & \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right)^{r+n-1} \\ \alpha_n^0, & \alpha_n^1 & \ldots\, \alpha_n^{n-2}, & 1 \end{vmatrix}$$

Hier werden in der letzten Colonne alle Glieder null für $r = \infty$ mit Ausnahme des untersten, die Determinante reducirt sich auf $\Delta(\alpha_1\ldots\alpha_{n-1})$, und man hat

$$(\alpha_1^r\ldots\alpha_n) = \alpha_n^{r+n-1}\cdot\frac{\alpha_n^{r+n-1}}{f'\alpha_n}$$

Hieraus folgt, dass für wachsende r immer näher wird $\frac{(\alpha_1^r\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n)} = \alpha_n$. In der Tat, man hat wegen $(\alpha_1^r\ldots\alpha_n) = \alpha_n(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n) + (\alpha_1^r\ldots\alpha_{n-1})$ für jedes ganze r identisch

1) $$\frac{(\alpha_1^r\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n)} = \alpha_n + \frac{(\alpha_1^r\ldots\alpha_{n-1})}{(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n)}.$$

Wenn also der absolut zweitgrösste Wert α_{n-1} ein einzelner ist, hat man nach demselben Princip mit wachsendem r immer näher

1a) $$\frac{(\alpha_1^r\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n)} = \alpha_n + \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right)^{r+n-2}\frac{f'\alpha_n}{g'\alpha_{n-1}}.$$

Ist zweitens $\alpha_{n-1} = -\alpha_n$, so hat man wieder

$$(\alpha_1^r \dots \alpha_n) = \frac{\alpha_{nr+n-1}}{\Delta(\alpha_1 \dots \alpha_n)} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1^0, & \alpha_1^1 & \dots \alpha_1^{n-2}, & \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_n}\right)^{r+n-1} \\ \alpha_2^0, & \alpha_2^1 & \dots \alpha_2^{n-2}, & \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_n}\right)^{r+n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1}^0, & \alpha_{n-1}^1 & \dots \alpha_{n-1}^{n-2}, & \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right)^{r+n-1} \\ \alpha_n^0, & \alpha_n^1 & \dots \alpha_n^{n-2}, & 1 \end{vmatrix}$$

aber für $r = \infty$ bleiben nun in der letzten Colonne die beiden letzten Glieder endlich. Entwickelt man dann die Determinante nach Partialdeterminanten der beiden letzten Zeilen, so erhält man

wenn $r+n$ gerade:

$$(\alpha_1^r \dots \alpha_n) = \frac{\alpha_n^{r+n-2}}{h_{\alpha_n} \cdot h_{-\alpha_n}} \cdot \{\alpha_n^0 . H_{n-2} + \alpha_n^2 . H_{n-4} + \dots\},$$

wenn $r+n$ ungerade:

$$(\alpha_1^r \dots \alpha_n) = \frac{-\alpha_n^{r+n-2}}{h_{\alpha_n} \cdot h_{-\alpha_n}} \cdot \{\alpha_n^1 . H_{n-3} + \alpha_n^3 . H_{n-5} + \dots\},$$

oder anders geordnet

wenn r gerade:

$$(\alpha_1^r \dots \alpha_n) = \frac{(-1)^n . \alpha_n^{r+n-2}}{h_{\alpha_n} . h_{-\alpha_n}} \cdot \{H_0 . \alpha_n^{n-2} + H_2 . \alpha_n^{n-4} + \dots\}$$
$$= \frac{(-1)^n . \alpha_n^{r+n-2}}{h_{\alpha_n} . h_{-\alpha_n}} \, c_1,$$

wenn r ungerade:

$$(\alpha_1^r \dots \alpha_n) = \frac{(-1)^{n-1} . \alpha_n^{r+n-2}}{h_{\alpha_n} . h_{-\alpha_n}} \cdot \{H_1 . \alpha_n^{n-3} + H_3 . \alpha_n^{n-5} + \dots\}$$
$$= \frac{(-1)^n . \alpha_n^{r+n-2}}{h_{\alpha_n} . h_{-\alpha_n}} \, c_2,$$

wo also c_1 und c_2 von r unabhängig sind.

Die Quotienten zweier aufeinanderfolgender Divisionscoefficienten nähern sich also abwechselnd zwei verschiedenen Grenzen, dagegen wird mit wachsendem r immer genauer $\frac{(\alpha_1^r \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r-2} \dots \alpha_n)} = \alpha_n^2$. In der Tat, aus der Gleichung g) folgt für $i = 2$ und $\alpha_{n-1} = -\alpha_n$ die Identität

$$(\alpha_1^r \dots \alpha_n) = \alpha_n^2 (\alpha_1^{r-2} \dots \alpha_n) + (\alpha_1^r \dots \alpha_{n-2}),$$

demnach hat man identisch

$$2)\qquad \frac{(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r-2} \ldots \alpha_n)} = \alpha_n^2 + \frac{(\alpha_1^r \ldots \alpha_{n-2})}{(\alpha_1^{r-2} \ldots \alpha_n)}.$$

Ist demnach α_{n-3} absolut $< \alpha_{n-2}$, so wird bei wachsendem r immer genauer

$$2^a)\quad \frac{(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r-2} \ldots \alpha_n)} = \alpha_n^2 + (-1)^n \left(\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n}\right)^{r+n-3} \frac{\alpha_n . h_{\alpha_n} . h_{-\alpha_n}}{h'_{\alpha_{n-2}} . c_1} \quad \text{oder}$$

$$= \alpha_n^2 + (-1)^{n-1} \left(\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n}\right)^{r+n-3} \frac{\alpha_n . h_{\alpha_n} . h_{-\alpha_n}}{h'_{\alpha_{n-2}} . c_2},$$

je nachdem r gerade oder ungerade.

Seien nun drittens die beiden grössten Wurzeln conjugirt complex, und zwar $\alpha_n = R(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$, $\alpha_{n-1} = R(\cos\varphi - i.\sin\varphi)$, α_{n-2} aber absol. $< R$, so dividiren wir wieder in der Determinante, welche $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)$ darstellt, die letzte Colonne mit R^{r+n-1}, und multipliciren dafür aussen mit dieser Grösse. Es werden wieder für $r = \infty$ alle Glieder der letzten Colonne mit Ausnahme der beiden untersten verschwinden. Wird sie dann nach Partialdeterminanten der beiden letzten Zeilen entwickelt, so erhält man

$$(\alpha_1^r \ldots \alpha_n) = \frac{R^{r+n-2}}{h_{\alpha_n} h_{\alpha_{n-1}} . \sin\varphi}$$

$$\times \{H_0 R^{n-2}.\sin(r+1)\varphi + H_1 R^{n-3}.\sin(r+2)\varphi + \ldots H_{n-2}.R^0.\sin(r+n-1)\varphi\}$$

Hier ist ersichtlich das Verhältniss zweier Divisionscoefficienten von r abhängig. Nun ist aber, wenn zur Abkürzung

$$H_0 . R^{n-2} \sin r\varphi + H_1 R^{n-3} \sin(r+1)\varphi + \ldots = Ar \quad \text{und}$$
$$H_0 . R^{n-2} \cos r\varphi + H_1 R^{n-3} \cos(r+1)\varphi + \ldots = Br$$

gesetzt wird,

$$(\alpha_1^{r+1} \ldots \alpha_n) = \frac{R^{r+n-1}}{h_{\alpha_n} h_{\alpha_{n-1}} \sin\varphi} (Ar \cos 2\varphi + Br \sin 2\varphi),$$

$$(\alpha_1^r \ldots \alpha_n) = \frac{R^{r+n-2}}{h_{\alpha_n} h_{\alpha_{n-1}} \sin\varphi} (Ar \cos\varphi + Br \sin\varphi),$$

$$(\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n) = \frac{R^{r+n-3}}{h_{\alpha_n} h_{\alpha_{n-1}} \sin\varphi} Ar,$$

$$(\alpha_1^{r-2} \ldots \alpha_n) = \frac{R^{r+n-4}}{h_{\alpha_n} h_{\alpha_{n-1}} \sin\varphi} (Ar \cos\varphi - Br \sin\varphi).$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{(\alpha_1{}^{r+1}\dots\alpha_n)}{(\alpha_1{}^{r-1}\dots\alpha_n)} = R^2\left(\cos 2\varphi + \frac{Br}{Ar}\sin 2\varphi\right).$$

$$\frac{(\alpha_1{}^{r}\dots\alpha_n)}{(\alpha_1{}^{r-1}\dots\alpha_n)}2R\cos\varphi = R\left(\cos\varphi + \frac{Br}{Ar}\sin\varphi\right)2R\cos\varphi$$

$$= R^2 + R^2\left(\cos 2\varphi + \frac{Br}{Ar}\sin 2\varphi\right) = R^2 + \frac{(\alpha_1{}^{r+1}\dots\alpha_n)}{(\alpha_1{}^{r-1}\dots\alpha_n)}.$$

Andrerseits aber ist auch

$$R^2.\frac{(\alpha_1{}^{r-2}\dots\alpha_n)}{(\alpha_1{}^{r-1}\dots\alpha_n)} = R\left(\cos\varphi - \frac{Br}{Ar}\sin\varphi\right),$$

also

$$2R.\cos\varphi = \frac{(\alpha_1{}^{r}\dots\alpha_n)}{(\alpha_1{}^{r-1}\dots\alpha_n)} + R^2\frac{(\alpha_1{}^{r-2}\dots\alpha_n)}{(\alpha_1{}^{r-1}\dots\alpha_n)}$$

und

$$\frac{(\alpha_1{}^{r}\dots\alpha_n)}{(\alpha_1{}^{r-1}\dots\alpha_n)}2R.\cos\varphi = \frac{(\alpha_1{}^{r}\dots\alpha_n)^2}{(\alpha_1{}^{r-1}\dots\alpha_n)^2} + R^2\frac{(\alpha_1{}^{r-2}\dots\alpha_n)(\alpha_1{}^{n}\dots\alpha_n)}{(\alpha_1{}^{r-1}\dots\alpha_n)^2}.$$

Diese Werte gleichgesetzt geben

$$R^2 + \frac{(\alpha_1{}^{r+1}\dots\alpha_n)}{(\alpha_1{}^{r-1}\dots\alpha_n)} = \frac{(\alpha_1{}^{r}\dots\alpha_n)^2}{(\alpha_1{}^{r-1}\dots\alpha_n)^2} + R^2\frac{(\alpha_1{}^{r-2}\dots\alpha_n)(\alpha_1{}^{r}\dots\alpha_n)}{(\alpha_1{}^{r-1}\dots\alpha_n)^2},$$

und hieraus

$$R^2 = \frac{(\alpha_1{}^{r}\dots\alpha_n)^2 - (\alpha_1{}^{r+1}\dots\alpha_n)(\alpha_1{}^{r-1}\dots\alpha_n)}{(\alpha_1{}^{r-1}\dots\alpha_n)^2 - (\alpha_1{}^{r}\dots\alpha_n)(\alpha_1{}^{r-2}\dots\alpha_n)}.$$

und dann sofort auch

$$2R\cos\varphi = \frac{(\alpha_1{}^{r}\dots\alpha_n)(\alpha_1{}^{r-1}\dots\alpha_n) - (\alpha_1{}^{r+1}\dots\alpha_n)(\alpha_1{}^{r-2}\dots\alpha_n)}{(\alpha_1{}^{r-1}\dots\alpha_n)^2 - (\alpha_1{}^{r}\dots\alpha_n)(\alpha_1{}^{r-2}\dots\alpha_n)}.$$

Man hat also gefunden, welche Ausdrücke für ein unendlich wachsendes r sich immer mehr dem R^2 und $2R.\cos\varphi$ nähern. Um auch hier wieder die Näherung controliren zu können, gehe ich zurück auf die Identität, die für jedes r gilt. Man hat aber, in Determinantenform und mit Hülfe der g) die Identitäten

$$3)\quad \frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^r \ldots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \ldots \alpha_n)\\ (\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1^r \ldots \alpha_n)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1^r \ldots \alpha_n)\\ (\alpha_1^{r-2} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n)\end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^r\ldots\alpha_n), & (\alpha_{n-1}+\alpha_n)(\alpha_1^r\ldots\alpha_n) - \alpha_n\alpha_{n-1}(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n) + (\alpha_1^{r+1}\ldots\alpha_{n-2})\\ (\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_{n-1}+\alpha_n)(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n) - \alpha_n\alpha_{n-1}(\alpha_1^{r-2}\ldots\alpha_n) + (\alpha_1^r\ldots\alpha_{n-2})\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^r\ldots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{r-2}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n)\end{vmatrix}}$$

$$= \alpha_n\alpha_{n-1} + \frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^r\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r+1}\ldots\alpha_{n-2})\\ (\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^r\ldots\alpha_{n-2})\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^r\ldots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{r-2}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n)\end{vmatrix}},$$

und

$$4)\quad \frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \ldots \alpha_n)\\ (\alpha_1^{r-2} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1^r \ldots \alpha_n)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1^r \ldots \alpha_n)\\ (\alpha_1^{r-2} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n)\end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_{n-1}+\alpha_n)(\alpha_1^r\ldots\alpha_n) - \alpha_{n-1}\alpha_n(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n) + (\alpha_1^{r+1}\ldots\alpha_{n-2})\\ (\alpha_1^{r-2}\ldots\alpha_n), & (\alpha_{n-1}+\alpha_n)(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n) - \alpha_{n-1}\alpha_n(\alpha_1^{r-2}\ldots\alpha_n) + (\alpha_1^r\ldots\alpha_{n-2})\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^r\ldots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{r-2}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n)\end{vmatrix}}$$

$$= (\alpha_{n-1}+\alpha_n) + \frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r+1}\ldots\alpha_{n-2})\\ (\alpha_1^{r-2}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^r\ldots\alpha_{n-2})\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^r\ldots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{r-2}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n)\end{vmatrix}}.$$

Ist also α_{n-2} absolut $> \alpha_{n-3}$, so wird bei wachsendem r immer genauer

$$3^a)\quad \frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^r\ldots\alpha_n), & (\alpha^{r+1}\ldots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^r\ldots\alpha_n)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^r\ldots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{r-2}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n)\end{vmatrix}}$$

$$= R^2 + \left(\frac{\alpha_{n-2}}{R}\right)^{r+n-3} \frac{h_{\alpha_n} h_{\alpha_{n-1}}}{h'_{\alpha_{n-2}} \sin\varphi} \cdot \frac{R.A_{r+1} - \alpha_{n-2}A_r}{A_r^2 + B_r^2},$$

$$4^a)\quad \frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r+1}\ldots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{r-2}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_{1r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^r\ldots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{r-2}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n)\end{vmatrix}}$$

$$= 2R.\cos\varphi + \left(\frac{\alpha_{n-2}}{R}\right)^{r+n-3} \frac{h_{\alpha_n} h_{\alpha_{n-1}}}{h'_{\alpha_{n-2}} \sin\varphi} \cdot \frac{R.A_r - \alpha_{n-2}.A_{r-1}}{R(A_r^2+B_r^2)}$$

Bei den Ergänzungsgliedern sind die Zähler von r abhängig, die Nenner aber sind constant. Man hat nämlich

$$A_r^2 + B_r^2 = \sum_{k=0}^{k=n-2} \sum_{i=0}^{i=n-2} H_i H_k . R^{2n-4-(k+i)} \cos(k-i)\varphi = c.$$

Da ferner $h_{\alpha_n} h_{\alpha_{n-1}} = A^2_{n-2} + B^2_{n-2}$, hebt sich dann der Nenner ganz weg.

Sind endlich α_n und α_{n-1} rein imaginär, so hat in den vorhergehenden Formeln φ den Wert $\frac{\pi}{2}$. Es wird dann mit wachsendem s immer mehr

$$(\alpha_1^{2s} \dots \alpha_n) = \frac{R^{2s+n-2}}{h_{\alpha_n} h_{\alpha_{n-1}}} (-1)^s \{H_0 R^{n-2} - H_2 R^{n-4} + \dots\}$$
$$= \frac{R^{2s+n-2}}{h_{\alpha_n} h_{\alpha_{n-1}}} . A_{2s+1}$$

und

$$(\alpha_1^{2s+1} \dots \alpha_n) = \frac{R^{2s+n-1}}{h_{\alpha_n} h_{\alpha_{n-1}}} (-1)^{s+1} \{H_1 R^{n-3} - H_3 R^{n-5} + \dots\}$$
$$= \frac{R^{2s+n-1}}{h_{\alpha_n} h_{\alpha_{n-1}}} . A_{2s+2}.$$

Hieraus folgt sofort

$$A_{2s+1} = -A_{2s+3} = +A_{2s+5} = \dots = B_{2s}$$

und

$$A_{2s+2} = -A_{2s+4} = +A_{2s+6} = \dots = B_{2s+1}.$$

Man hat demnach für unendliche r auch

$$\frac{(\alpha_1^r \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r-2} \dots \alpha_n)} = -R^2.$$

Für endliche r aber hat man wie in 2)

5) $$\frac{(\alpha_1^r \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r-2} \dots \alpha_n)} = \alpha_n^2 + \frac{(\alpha_1^r \dots \alpha_{n-2})}{(\alpha_1^{r-2} \dots \alpha_n)},$$

bei wachsendem r also immer näher

5ª) $$\frac{(\alpha_1^r \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r-2} \dots \alpha_n)} = -R^2 + \left(\frac{\alpha_{n-2}}{R}\right)^{r+n-3} \cdot \frac{h_{\alpha_n} h_{\alpha_{n-1}} . R}{h'_{\alpha_{n-2}} . A_{r-1}}.$$

Dass daneben auch die 3) und 4) ihre Gültigkeit behalten, ist selbstverständlich.

Es lässt sich nun auch leicht angeben, welchem Werte in den vier Fällen sich der Rest nähert, wenn dieser nicht von einer einzelnen absolut grössten Wurzel abhängt, sondern von einem Paar gleicher entgegengesetzter reeller Wurzeln, oder einem Paar complexer Wurzeln. Ich will hier nur die wichtigsten Fälle ausführen.

Ist erstens α_n ein einzelner absolut grösster Wert, und dann

$$\alpha_{n-1} = R.(\cos\varphi + i.\sin\varphi), \quad \alpha_{n-2} = R.(\cos\varphi - i.\sin\varphi),$$

und setze ich wieder

$$J_0 R^{n-3} \sin r\varphi + J_1 R^{n-4} \sin(r+1)\varphi + \ldots = A_r,$$
$$J_0 R^{n-3} \cos\varphi + J_1 R^{n-4} \cos(r+1)\varphi + \ldots = B_r,$$

so wird für wachsende r immer näher

$$1^b) \quad \frac{(\alpha_1{}^r \ldots \alpha_n)}{(\alpha_1{}^{r-1} \ldots \alpha_n)} = \alpha_n + \left(\frac{R}{\alpha_n}\right)^{r+n-2} \frac{f'\alpha_n}{i_{\alpha_{n-1}} i_{\alpha_{n-2}} \sin\varphi} \cdot \frac{A_{r-1}}{R}.$$

Ist im dritten Fall

$$\alpha_n = R(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \alpha_{n-1} = R(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$
$$\alpha_{n-2} = R'.(\cos\varphi' + i.\sin\varphi'), \quad \alpha_{n-3} = R'.(\cos\varphi' - i.\sin\varphi'),$$

und setzen wir noch

$$Q_0 R^{n-4} \sin r\varphi' + Q_1 R^{n-5} \sin(r+1)\varphi' + \ldots = A_r',$$
$$Q_0 R^{n-4} \cos r\varphi' + Q_1 R^{n-5} \cos(r+1)\varphi' + \ldots = B_r',$$

so kommt

$$3^b) \quad \frac{\begin{vmatrix} (\alpha_1{}^r \ldots \alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+1} \ldots \alpha_n) \\ (\alpha_1{}^{r-1} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1{}^r \ldots \alpha_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\alpha_1{}^{r-1} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1{}^r \ldots \alpha_n) \\ (\alpha_1{}^{r-2} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1{}^{r-1} \ldots \alpha_n) \end{vmatrix}}$$

$$= R^2 + \left(\frac{R'}{R}\right)^{r+n-3} \frac{1}{q_{\alpha_{n-2}} q_{\alpha_{n-3}} \sin\varphi . \sin\varphi'} \cdot \frac{R.A_{r+1}A'_{r+1} - A_r A'_{r+2} R'}{R'}$$

$$4^b) \quad \frac{\begin{vmatrix} (\alpha_1{}^{r-1} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+1} \ldots \alpha_n) \\ (\alpha_1{}^{r-2} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1{}^{r-1} \ldots \alpha_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\alpha_1{}^{r-1} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1{}^r \ldots \alpha_n) \\ (\alpha_1{}^{r-2} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1{}^{r-1} \ldots \alpha_n) \end{vmatrix}} =$$

$$2R\cos\varphi + \left(\frac{R'}{R}\right)^{r+n-3} \frac{1}{q_{\alpha_{n-2}} q_{\alpha_{n-3}} \sin\varphi . \sin\varphi'} \cdot \frac{R.A_r.A'_{r+1} - R'.A_{r-1}A'_{r+2}}{R.R'}.$$

Die Fälle, wo es 5 oder mehr absolut grösste Wurzeln gibt, sind hier übergangen. Der wichtige Fall, wo eine Gleichung lauter conjugirt complexe Wurzeln mit gleichen Moduln besitzt, wie es z. B. bei den aus binomischen Gleichungen hervorgehenden Gleichungen der Fall ist, wird von Fürstenau durch Veränderung der Variabeln auf die vorhergehenden Fälle zurückgeführt.

§. 3.

Aus den gewonnen Resultaten lassen sich nun zunächst Schlüsse ziehen auf die Vorzeichen der Divisionscoefficienten.

Ist α_n eine einzelne absolut grösste, und zwar positive Wurzel, so folgt aus 1^a) und 1^b), dass, wenn r einmal gross genug ist, dass überhaupt die Näherung beginnt, was im Folgenden immer vorausgesetzt sein soll, dass dann die $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)$ immer das gleiche Zeichen behalten. Dass es aber das $+$ Zeichen ist folgt dann daraus, dass für sehr grosse r $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n) = \dfrac{\alpha_n^{r+n-1}}{f'_{\alpha_n}}$ positiv ist.

Ist aber α_n negativ, so folgt aus denselben Gleichungen, dass die $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)$ abwechselnd positive und negative Zeichen haben, und zwar ist für sehr grosse r

a) wenn $n = 2m$ ist, g_{α_n} negativ, $\alpha_n^{r+n-1} = \{\pm$ je nachdem $r \left\{\begin{matrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{matrix}\right.$, demnach $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n) = \left\{\pm\right.$ je nachdem $r \left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right.$;

b) wenn $n = 2m+1$ ist, g_{α_n} positiv, $\alpha_n^{r+n-1} = \{\pm$ je nachdem $r \left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right.$, demnach $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n) = \left\{\pm\right.$ je nachdem $r \left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right.$

Also ist überhaupt, sobald die Näherung beginnt, $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n) = \{\pm$ je nachdem $r \left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right.$.

Ist $\alpha_{n-1} = -\alpha_n$ so folgt aus 2^a), dass $(\alpha_1^{r+2} \ldots \alpha_n)$ und $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)$ gleiche Zeichen haben. Nun ist a) für gerade r $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n) = \dfrac{(-1)^n \alpha_n^{r+n-2}}{h_{\alpha_n} h_{-\alpha_n}} \left\{ H_0 \alpha_n^{n-2} + H_2 \alpha_n^{n-4} + \ldots \right\}$; der erste Factor ist positiv für $n = 2m$ und $n = 2m+1$, das Zeichen hängt also nur vom zweiten Factor ab. Ebenso ist

b) für ungerade r $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n) = \dfrac{(-1)^{n-1} \alpha_r^{r+n-2}}{h_{\alpha_n} h_{-\alpha_n}} \left\{ H_1 \alpha_n^{n-3} + H_3 \alpha_n^{n-5} + \ldots \right\}$; der erste Factor ist immer negativ, das Zeichen

hängt nur vom zweiten Factor ab. Man kann dann als Regel aussprechen: die $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)$ haben $\left.\begin{matrix}\text{abwechselnde}\\ \text{gleiche}\end{matrix}\right\}$ Zeichen, je nachdem

$$\left.\begin{matrix}H_0\alpha_n^{n-2}+H_2\alpha_n^{n-4}+\ldots \text{ gleiche}\\ H_1\alpha_n^{n-3}+H_3\alpha_n^{n-5}+\ldots \text{ verschiedene}\end{matrix}\right\}\text{ Zeichen haben.}$$

Ist $\alpha_n = R.(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$ und $\alpha_{n-1} = R.(\cos\varphi - i.\sin\varphi)$, so folgt aus 3ª), dass $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)^2 - (\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n)(\alpha_1^{r+1} \ldots \alpha_n)$ und $(\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n)^2 - (\alpha_1^{r-2} \ldots \alpha_n)(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)$ immer gleiche Zeichen haben. Da aber für $r = \infty$ der letzte Ausdruck gleich $\frac{R^{2r+2n-6}}{h^2_{\alpha_n} h^2_{\alpha_{n-1}}}(A_r^2 + B_r^2)$ wird, sieht man, dass diese Ausdrücke immer positiv sind. Für die $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)$ selbst folgt daraus, dass $(\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n)$ und $(\alpha_1^{r+1} \ldots \alpha_n)$ entweder verschiedene Zeichen haben müssen, oder dem absoluten Wert nach $\frac{(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n)} > \frac{(\alpha_1^{r+1} \ldots \alpha_n)}{(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)}$ sein muss.

Aus 4ª) aber lässt sich Folgendes schliessen: Ist $\cos\varphi$ positiv, so muss $(\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n)(\alpha_1^r \ldots \alpha_n) - (\alpha_1^{r-2} \ldots \alpha_n)(\alpha_1^{r+1} \ldots \alpha_n)$ immer positiv sein. Wenn also drei aufeinanderfolgende Divisionscoefficienten zwei Zeichenwechsel enthalten, folgt darauf wieder ein Zeichenwechsel, also kommen von da an nur Zeichenwechsel. Dann wird nach dem Vorhergehenden $\frac{(\alpha_1^{r+1} \ldots \alpha_n)}{(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)}$ absolut immer kleiner, nähert sich also der Null oder einer endlichen Grenze, was nicht sein kann. Demnach können hier nie zwei Zeichenwechsel aufeinander folgen. Zu demselben Resultat gelangt man auch so: Aus der obigen Bedingung folgt, dass, wenn einmal auf eine Zeichenfolge ein Wechsel folgt, dann notwendig wieder eine Folge kommt. Es bilden also in diesem Fall die Coefficienten im Allgemeinen Zeichenfolgen, unterbrochen von einzelnen Zeichenwechseln. Es können aber auch nicht von einem bestimmten Punkt an die Zeichen immer gleich bleiben, da man sonst wieder zu dem Schluss käme, dass das Verhältniss $\frac{(\alpha_1^{r+1} \ldots \alpha_n)}{(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)}$ sich einer bestimmten Grenze nähert. Diese Art des Zeichenwechsels mag eine reihenweise heissen.

Ist aber $\cos\varphi$ negativ, so muss $(\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n)(\alpha_1^r \ldots \alpha_n) - (\alpha_1^{r-2} \ldots \alpha_n)(\alpha_1^{r+1} \ldots \alpha_n)$ immer negativ sein. Daraus folgt: Wenn zwei Zeichenfolgen nacheinander kommen, muss dann wieder eine Folge kommen, also fortan nur Folgen kommen. Dies ist wieder nicht möglich, also können nie zwei Zeichenfolgen nacheinander kommen. Man kann aber auch so schliessen: Wenn nach einem Wechsel eine Zeichenfolge kommt, muss dann wieder ein Wechsel kommen. Im Allge-

meinen bilden also die Zeichen Wechsel, unterbrochen durch einzelne Zeichenfolgen. Es können jedoch nicht nur Zeichenwechsel von einem bestimmten Punkt an kommen, da sonst wieder $\frac{(\alpha_1^{r+1}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^r\ldots\alpha_n)}$ sich einer bestimmten Gränze nähern würde. Diese Art des Zeichenwechsels mag auf- und abspringend heissen.

Sind die beiden grössten Wurzeln rein imaginär, so folgt aus 5[a]), dass $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)$ und $(\alpha_1^{r-2} \ldots \alpha_n)$ immer entgegengesetzte Zeichen haben müssen. Demnach wechseln bei den Zeichen der Divisionscoefficienten immer einzelne Zeichenfolgen und Zeichenwechsel ab. Es bildet dieser Fall den Uebergang zwischen den beiden vorhergehenden Fällen. Dass auch hier wieder $(\alpha_1^r\ldots\alpha_n)^2-(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n)(\alpha_1^{r+1}\ldots\alpha_n)>0$, folgt schon aus dem Gesetz der Vorzeichen. Aus 4) folgt noch, dass mit wachsendem r immer näher $\frac{(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^{r-2}\ldots\alpha_n)} = \frac{(\alpha_1^{r+1}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^r\ldots\alpha_n)}$.

Aus diesem Allen geht hervor, dass sich schon allein aus dem Vorzeichen der aufeinanderfolgenden Divisionscoefficienten entscheiden lässt, wie die absolut grösste Wurzel beschaffen ist. Abgesehen von dem Fall nämlich, wo ein Paar entgegengesetzt gleicher grösster Wurzeln vorhanden sind, hat man

eine grösste positive Wurzel, wenn die Divisionscoefficienten immer positiv sind,

eine grösste negative Wurzel, wenn sie immer abwechselnde Zeichen haben,

ein Paar grösster complexer Wurzeln, deren reeller Teil positiv, wenn die Zeichen reihenweise,

ein Paar grösster complexer Wurzeln, wenn sie auf- und abspringend wechseln,

ein Paar grösster, rein imaginärer Wurzeln, wenn immer abwechselnd zwei Zeichen positiv und zwei Zeichen negativ sind.

Dass dabei unter Umständen eine längere Reihe von Divisionscoefficienten entwickelt werden muss, um den Fall zu entscheiden, ist einleuchtend. Wenn z. B. ein Paar complexer Wurzeln mit positivem reellen Teil vorhanden ist, aber dieser sehr klein ist gegen den imaginären Teil, so kann eine ganze Reihe von Coefficienten nur abwechselnd Zeichenwechsel und -Folgen zeigen bis einmal zwei Folgen nacheinander kommen. Die Betrachtung der Näherungswerte selbst aber zeigt bald, welcher Fall vorliegt.

§. 4.

Die Resultate des vorigen Paragraphen lassen nun auch erkennen, in welcher Art die Annäherung in den einzelnen Fällen vor sich geht. Allgemein ist soviel zu sagen, dass, wenn bei den für die Fehler gefundenen Ausdrücken r nur im Exponenten des echten Bruches vorkommt, dessen allmähliches Verschwinden überhaupt die Ursache der Annäherung ist, dass dann, wenn überhaupt einmal die Näherung begonnen hat, auch jeder spätere Wert dem wahren Wert näher liegt als irgend ein vorhergehender. Wenn aber der Ausdruck des Fehlers auch ausserdem noch r enthält, so geschieht die Annäherung nur im Allgemeinen, und es kann recht wol ein späterer Wert vom wahren mehr differiren als ein früherer.

Ehe wir auf die einzelnen Fälle eingehen, sei noch festgesetzt, dass die durch die Formeln 1), 2), 3), 4), 5) gegebenen Näherungswerte zur Abkürzung resp. mit x_{r-1}, x^2_{r-2}, R^2_{r-1}, $(2R\cos\varphi)_{r-1}$, $-R^2_{r-2}$ bezeichnet werden.

1. Ist α_n ein einzelner absolut grösster positiver Wert und unter den übrigen Wurzeln

a) α_{n-1} ebenfalls ein einzelner absolut grösster positiver Wert, so bleibt x_r immer grösser als α_n; der Fehler wird mit wachsendem r immer kleiner.

b) Ist α_{n-1} ein einzelner absolut grösster negativer Wert, so ist x_r zu gross, wenn r gerade, zu klein, wenn r ungerade; der Fehler wird mit wachsendem r immer kleiner.

c) Sind α_{n-1} und α_{n-2} ein Paar absolut grösster entgegengesetzt reeller Werte so kann x_r immer grösser, oder immer kleiner, oder auch abwechselnd grösser und kleiner sein als α_n. Der Fehler ist bei x_{r+2} kleiner als bei x_r.

d) Sind α_{n-1} und α_{n-2} ein Paar absolut grösster conjugirt complexer Werte und ist der reelle Teil positiv, so geschieht die Annäherung reihenweise; die Fehler werden nur im Allgemeinen immer kleiner.

Ist der reelle Teil negativ, so nähern sich die x_r auf- und abspringend dem α_n, aber auch hier geschieht die Annäherung nur im Allgemeinen.

e) Sind α_{n-1} und α_{n-2} rein imaginär, so sind abwechselnd zwei Näherungswerte zu gross und zwei zu klein. Der Fehler wird für x_{r+2} kleiner als für x_r.

2. Ist α_n ein einzelner absolut grösster negativer Wert, und unter den übrigen Werten

a) α_{n-1} ein einzelner absolut grösster positiver Wert, so ist x_r abwechselnd zu gross und zu klein, und zwar algebraisch zu klein, wenn r ungerade, zu gross wenn r gerade; der Fehler wird mit wachsendem r immer kleiner.

b) Ist α_{n-1} ein einzelner absolut grösster negativer Wert, so ist x_r immer zu klein. Der Fehler nimmt ab wenn r wächst.

c) Sind α_{n-1} und α_{n-2} ein Paar absolut grösster entgegengesetzt reeller Werte, so können die x_r immer zu gross, oder immer zu klein, oder abwechselnd zu gross und zu klein sein. Der Fehler von x_{r+2} ist kleiner als der von x_r.

d) Sind α_{n-1} und α_{n-2} ein Paar absolut grösster conjugirt complexer Werte, und ist der reelle Teil positiv, so nähern sich die x_r auf- und abspringend dem α_n. Ist der reelle Teil negativ, so nähern sie sich reihenweise dem α_n. Der Fehler nimmt nur im Allgemeinen ab mit wachsendem r.

e) Sind α_{n-1} und α_{n-2} ein Paar conjugirter rein imaginärer Werte, so sind abwechselnd zwei Näherungswerte zu gross und zwei zu klein. Der Fehler ist für x_{r+2} kleiner als für x_r.

3. Sind α_n und α_{n-1} ein Paar absolut grösster entgegengesetzt reeller Werte, so betrachten wir zuerst die Reihe der geraden Näherungswerte, d. h. diejenigen, für welche $r = 2s$ ist. Ist in diesem Falle $(\alpha_1^{2s} \dots \alpha_n)$ positiv, so sind für positive wie für negative α_{n-2} die Näherungswerte immer grösser als α_n^2; für $\alpha_{n-3} = -\alpha_{n-2}$ sind sie entweder alle zu gross oder alle zu klein. Sind dagegen die $(\alpha_1^{2s} \dots \alpha_n)$ negativ, so sind für positive wie für negative α_{n-2} die Näherungswerte immer zu klein; für $\alpha_{n-3} = -\alpha_{n-2}$ sind sie entweder alle zu gross oder alle zu klein. Betrachten wir dann die Reihe der ungeraden Näherungswerte, für welche $r = 2s+1$, so sind, wenn $(\alpha_1^{2s+1} \dots \alpha_n)$ positiv ist, die Näherungswerte bei positivem α_{n-2} zu gross, bei negativem zu klein; für $\alpha_{n-3} = -\alpha_{n-2}$ entweder alle zu gross oder alle zu klein. Ist aber $(\alpha_1^{2s+1} \dots \alpha_n)$ negativ, so sind die Näherungswerte bei positivem α_{n-2} zu klein, bei negativem zu gross; wenn $\alpha_{n-3} = -\alpha_{n-2}$, eines von beiden.

In all diesen Fällen erhält man also bei der Reihe der sämmtlichen Näherungswerte abwechselnd zu grosse und zu kleine nur dann immer, wenn entweder $(\alpha_1^r \dots \alpha_n)$ und $(\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n)$ gleiche Zeichen haben und α_{n-2} negativ ist, oder wenn $(\alpha_1^r \dots \alpha_n)$ und $(\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n)$ verschiedene Zeichen haben und α_{n-2} positiv ist. Sind α_{n-2} und α_{n-3}

ein Paar conjugirt complexer oder rein imaginärer Werte, so zeigen die Näherungswerte ein analoges Verhalten wie in den beiden ersten Fällen.

4. Sind α_n und α_{n-1} ein Paar absolut grösster conjugirt complexer Werte, so ergibt sich aus Gleichung 3) sofort, dass, weil der Nenner des Fehlers immer positiv ist,

a) wenn α_{n-2} positiv ist, R_{r-1}^2 zu gross ist, wenn $(\alpha_1^r \dots \alpha_n)$ positiv und $(\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n)$ negativ ist; dass dagegen R^2_{r-1} zu klein ist, wenn $(\alpha_1^r \dots \alpha_n)$ negativ und $(\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n)$ positiv ist. Im Falle also der reelle Teil der complexen Grösse negativ ist, sind auch die Fehler für R^2_{r-1} im Allgemeinen abwechselnd positiv und negativ, es werden aber dazwischen auch zwei zu grosse oder zwei zu kleine Werte aufeinanderfolgen. Drei zu grosse Werte könnten möglicherweise aufeinanderfolgen, wenn die aufeinanderfolgenden Divisionscoefficienten die Zeichen hätten $(\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n) = -$, $(\alpha_1^r \dots \alpha_n) = -$, $(\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n) = +$, $(\alpha_1^{r+2} \dots \alpha_n) = +$. Dass es nicht der Fall sein kann, ist besonders zu beweisen. Nun hat man in diesem Fall nach §. 3.

$$(\alpha_1^r \dots \alpha_n)(\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n) < (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n)(\alpha_1^{r+2} \dots \alpha_n)$$

folglich auch

$$\frac{(\alpha_1^r \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n)} > \frac{(\alpha_1^{r+2} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n)}.$$

Ist nun R^2_{r+1} zu gross, also

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1^{r+2} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+3} \dots \alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+2} \dots \alpha_{n-2}) \end{vmatrix} > 0,$$

d. h.

$$\frac{(\alpha_1^{r+2} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n)} > \alpha_{n-2},$$

so ist um so mehr

$$\frac{(\alpha_1^r \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n)} > \alpha_{n-2},$$

also

$$(\alpha_1^r \dots \alpha_n) < (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n).\alpha_{n-2},$$

oder

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1^r \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^r \dots \alpha_{n-2}) \end{vmatrix} < 0,$$

d. h. R^2_{r-1} zu klein. Ebenso ergibt sich umgekehrt, dass immer, wenn R^2_{r-1} zu gross ist, R^2_{r+1} zu klein ist. R_r^2 ist immer zu gross, also findet immer höchstens eine Zeichenfolge statt. Ebenso erledigt sich der Fall, wo $(\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n) = +$, $(\alpha_1^r \dots \alpha_n) = +$, $(\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n) = -$, $(\alpha_1^{r+2} \dots \alpha_n) = -$, in welchem nie R^2_{r-1}, R_r^2 und R^2_{r+1} zugleich zu klein sein können.

Der Fall, wo der reelle Teil der complexen Wurzeln positiv ist, erfordert eine weitere Untersuchung. Es sei zunächst $(\alpha_1{}^{r-1} \dots \alpha_n)$ negativ, $(\alpha_1{}^r \dots \alpha_n)$ und alle folgenden Divisionscoefficienten bis $(\alpha_1{}^{s-1} \dots \alpha_n)$ incl. positiv, $(\alpha_1{}^s \dots \alpha_n)$ wieder negativ. Wie wir in §. 3. gesehen haben, ist dann

$$\frac{(\alpha_1{}^{r+1} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1{}^r \dots \alpha_n)} > \frac{(\alpha_1{}^{r+2} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1{}^{r+1} \dots \alpha_n)} > \dots \frac{(\alpha_1{}^{s-1} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1{}^{s-2} \dots \alpha_n)}.$$

Da aber $\frac{(\alpha_1{}^{r+1} \dots \alpha_{n-2})}{(\alpha_1{}^r \dots \alpha_{n-2})}$ für jeden Wert von r sich dem α_{n-2} nähert, so ergibt sich, dass, wenn irgend einer der Werte $\begin{vmatrix} (\alpha_1{}^{r+a} \dots \alpha_n), & (\alpha^{r+a+1} \dots \alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1{}^{r+a-1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+a} \dots \alpha_{n-2}) \end{vmatrix}$ positiv ist, alle vorhergehenden bis $\begin{vmatrix} (\alpha_1{}^{r+1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+2} \dots \alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1{}^r \dots \alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+1} \dots \alpha_{n-2}) \end{vmatrix}$ positiv sind; und dass, wenn irgend einer negativ ist, alle folgenden bis $\begin{vmatrix} (\alpha_1{}^{s-1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1{}^s \dots \alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1{}^{s-2} \dots \alpha_n), & (\alpha_1{}^{s-1} \dots \alpha_{n-2}) \end{vmatrix}$ negativ sind. Hat man umgekehrt eine Reihe negativer Divisionscoefficienten vor sich, so dass $(\alpha_1{}^{r-1} \dots \alpha_n)$ positiv, $(\alpha_1{}^r \dots \alpha_n)$ und alle folgenden bis $(\alpha_1{}^{s-1} \dots \alpha_n)$ incl. negativ sind, und $(\alpha_1{}^s \dots \alpha_n)$ wieder positiv ist, so ist nach §. 3. wieder

$$\frac{(\alpha_1{}^{r+1} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1{}^r \dots \alpha_n)} > \frac{(\alpha_1{}^{r+2} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1{}^{r+1} \dots \alpha_n)} > \dots \frac{(\alpha_1{}^{s-1} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1{}^{s-2} \dots \alpha_n)},$$

aber jetzt folgt aus

$$\frac{(\alpha_1{}^{r+a} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1{}^{r+a-1} \dots \alpha_n)} > \alpha_{n-2}$$

umgekehrt, dass $\begin{vmatrix} (\alpha_1{}^{r+a} \dots \alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+a+1} \dots \alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1{}^{r+a-1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+a} \dots \alpha_{n-2}) \end{vmatrix}$ negativ ist. Demnach sind, wenn eine dieser Determinanten negativ ist, auch alle vorhergehenden, soweit sie dieser Reihe angehören, negativ; und wenn eine derselben positiv ist, sind alle folgenden, die dieser Reihe angehören, positiv. Aus Beidem ergibt sich, dass, wenn der reelle Teil der complexen Wurzeln positiv ist, die Fehler bei der Berechnung von $R_r{}^2$ reihenweise positiv und negativ sind. Doch könnte nach dem Bisherigen eine solche Reihe sich auf ein einziges Glied reduciren; dass dies nicht der Fall ist, zeigt die folgende Untersuchung.

Nach §. 3. ist in diesem Fall immer

$$(\alpha_1{}^{r-1} \dots \alpha_n)(\alpha_1{}^r \dots \alpha_n) > (\alpha_1{}^{r-2} \dots \alpha_n)(\alpha_1{}^{r+1} \dots \alpha_n)$$

demnach, wenn $(\alpha_1{}^{r-2} \dots \alpha_n)$ und $(\alpha_1{}^{r-1} \dots \alpha_n)$ negativ, $(\alpha_1{}^r \dots \alpha_n)$ und $(\alpha_1{}^{r+1} \dots \alpha_n)$ positiv sind, ist

$$\frac{(\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r-2} \dots \alpha_n)} < \frac{(\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r} \dots \alpha_n)}.$$

Ist also

$$\frac{(\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r-2} \dots \alpha_n)} > \alpha_{n-2},$$

so ist um so mehr

$$\frac{(\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r} \dots \alpha_n)} > \alpha_{n-2},$$

und wenn

$$\frac{(\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r} \dots \alpha_n)} < \alpha_{n-2},$$

ist um so mehr

$$\frac{(\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r-2} \dots \alpha_n)} < \alpha_{n-2},$$

mit andern Worten: wenn $\begin{vmatrix} (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r} \dots \alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^{r-2} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_{n-2}) \end{vmatrix}$ negativ ist, ist immer $\begin{vmatrix} (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+2} \dots \alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^{r} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_{n-2}) \end{vmatrix}$ positiv, und wenn das letztere negativ ist, ist immer das erstere positiv, es sind also immer wenigstens zwei aufeinanderfolgende Fehler positiv. Ist aber $(\alpha_1^{r-2} \dots \alpha_n)$ und $(\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n)$ positiv, $(\alpha_1^{r} \dots \alpha_n)$ und $(\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n)$ negativ, so ist immer noch

$$\frac{(\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r-2} \dots \alpha_n)} < \frac{(\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r} \dots \alpha_n)};$$

also auch noch, wenn

$$\frac{(\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r-2} \dots \alpha_n)} > \alpha_{n-2},$$

um so mehr

$$\frac{(\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r} \dots \alpha_n)} > \alpha_{n-2},$$

und wenn

$$\frac{(\alpha_1^{r+1} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r} \dots \alpha_n)} < \alpha_{n-2},$$

um so mehr

$$\frac{(\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r-2} \dots \alpha_n)} < \alpha_{n-2}.$$

Dies heisst aber jetzt: wenn $\begin{vmatrix} (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r} \dots \alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^{r-2} \dots \alpha_n), & (\alpha_1^{r-1} \dots \alpha_{n-2}) \end{vmatrix}$ positiv

ist, so ist $\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r+1} \ldots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+2} \ldots \alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^r \ldots \alpha_n), & (\alpha_1^{r+1} \ldots \alpha_{n-2})\end{vmatrix}$ negativ, und wenn das letztere positiv ist, ist das erstere negativ. Es sind also immer wenigstens zwei aufeinanderfolgende Fehler negativ.

Im Ganzen hat sich ergeben, dass, wenn α_{n-2} positiv ist, die Fehler der R_r^2 bezüglich der Zeichen ganz dieselben Gesetze befolgen, wie die $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)$ selbst. Für die Fehler der $(2R\cos\varphi)_r$ gilt das Nämliche, nur spielen hier die $(\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n)$ und $(\alpha_1^{r-2} \ldots \alpha_n)$ die Rolle, welche vorher die $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)$ und $(\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n)$ spielten.

b) Ist α_{n-2} negativ, so sieht man aus 3) sofort, dass der Wert $R^2{}_{r-1}$ zu gross ist, wenn r gerade und $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)$ und $(\alpha^{r-1} \ldots \alpha_n)$ positiv sind, oder wenn r ungerade und $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)$ und $(\alpha^{r-1} \ldots \alpha_n)$ negativ sind; ebenso dass $R^2{}_{r-1}$ zu klein ist, wenn r gerade und $(\alpha^r \ldots \alpha_n)$ und $(\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n)$ negativ sind, oder wenn r ungerade, und $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)$ und $(\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n)$ positiv sind.

Daraus ergibt sich nun, dass, wenn der reelle Teil der complexen Wurzeln positiv ist, die Zeichen der Fehler im Allgemeinen Wechsel enthalten aber unterbrochen durch einzelne Folgen. Die letzteren ergeben sich dort, wo die $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)$ das Zeichen wechseln. Haben nämlich $(\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n)$ verschiedene Zeichen, so ist leicht zu sehen, dass die Fehler von $R^2{}_{r-2}$ und R_r^2 verschiedene Zeichen haben, also eine Zeichenfolge entsteht, das Zeichen des Fehlers von $R^2{}_{r-1}$ mag ausfallen wie es will. Auch hier ist erst nachzuweisen, dass im Falle $(\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n) = -$, $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n) = +$, $(\alpha_1^{r+1} \ldots \alpha_n) = +$, $(\alpha_1^{r+2} \ldots \alpha_n) = -$, $(\alpha_1^{r+3} \ldots \alpha_n) = -$, nicht $R^2{}_{r-1}$ und $R^2{}_{r+1}$ beide zugleich mit R_r^2 zu klein oder zu gross sein können. Der Beweis ist analog wie oben. Ebenso wenn $(\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n) = +$, $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n) = -$, $(\alpha_1^{r+1} \ldots \alpha_n) = -$, $(\alpha_1^{r+2} \ldots \alpha_n) = +$.

Der Fall, wo der reelle Teil negativ ist, erfordert nähere Untersuchung. In §. 3. wurde gefunden, dass, wenn $(\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n)$ und $(\alpha_1^{r+1} \ldots \alpha_n)$ gleiche Zeichen haben, dagegen $(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)$ das entgegengesetzte, dass dann immer

$$\frac{(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)}{(\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n)} < \frac{(\alpha_1^{r+1} \ldots \alpha_n)}{(\alpha_1^r \ldots \alpha_n)}.$$

Sei nun

$$(\alpha_1^{2s-1} \ldots \alpha_n) = +,\quad (\alpha_1^{2s} \ldots \alpha_n) = +,\quad (\alpha_1^{2s+1} \ldots \alpha_n) = -,\quad \ldots$$
$$(\alpha_1^{2t-1} \ldots \alpha_n) = -,\quad (\alpha_1^{2t} \ldots \alpha_n) = -,$$

oder

$$(\alpha_1^{2t-2} \ldots \alpha_n) = +,\quad (\alpha_1^{2t-1} \ldots \alpha_n) = +,$$

eine Reihe von Divisionscoefficienten, bei welchen die ausgelassenen Glieder nur Zeichenwechsel enthalten, so hat man R^2_{2s-1} zu gross, und R^2_{2t-1} resp. R^2_{2t-2} zu klein. Für dazwischen liegende Näherungswerte aber hat man, wenn

$$\frac{(\alpha_1^{2s+a+1}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^{2s+a}\ldots\alpha_n)} < \alpha_{n-2},$$

immer auch

$$\frac{(\alpha_1^{2s+a}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^{2s+a-1}\ldots\alpha_n)} < \alpha_{n-2},$$

d. h. wenn

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1^{2s+a+1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{2s+a+2}\ldots\alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^{2s+a}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{2s+a+1}\ldots\alpha_{n-2}) \end{vmatrix} > 0,$$

ist immer auch

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1^{2s+a}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{2s+a+1}\ldots\alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^{2s+a-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{2s+a}\ldots\alpha_{n-2}) \end{vmatrix} > 0,$$

oder: wenn R^2_{2s+a} zu gross ist, sind auch alle vorhergehenden Näherungswerte, die dieser Reihe angehören, zu gross. Umgekehrt aber ist, wenn

$$\frac{(\alpha_1^{2s+a}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^{2s+a-1}\ldots\alpha_n)} > \alpha_{n-2},$$

immer auch

$$\frac{(\alpha_1^{2s+a+1}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^{2s+a}\ldots\alpha_n)} > \alpha_{n-2},$$

d. h. wenn

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1^{2s+a}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{2s+a+1}\ldots\alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^{2s+a-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{2s+a}\ldots\alpha_{n-2}) \end{vmatrix} < 0,$$

ist immer auch

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1^{2s+a+1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{2s+a+2}\ldots\alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^{2s+a}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{2s+a+1}\ldots\alpha_{n-2}) \end{vmatrix} < 0,$$

oder: wenn R^2_{2s+a-1} zu klein ist, sind auch alle folgenden dieser Reihe angehörigen Näherungswerte zu klein. Das analoge Verhalten ergibt sich auf demselben Wege auch in den drei noch möglichen Fällen, nämlich bei Perioden von Divisionscoefficienten, welche entweder die Zeichen haben:

$$(\alpha_1^{2s-1}\ldots\alpha_n) = -,\quad (\alpha_1^{2s}\ldots\alpha_n) = -,\quad (\alpha_1^{2s+1}\ldots\alpha_n) = +,\quad \ldots$$
$$(\alpha_1^{2t-1}\ldots\alpha_n) = +,\quad (\alpha_1^{2t}\ldots\alpha_n) = +$$

oder

$$(\alpha_1^{2t-2}\ldots\alpha_n) = -,\quad (\alpha_1^{2t-1}\ldots\alpha_n) = -,$$

wo $R^2{}_{2s-1}$ zu klein, $R^2{}_{2t-1}$, resp. $R^2{}_{2t-2}$ zu gross ist oder

$$(\alpha_1^{2s}\ldots\alpha_n) = +,\quad (\alpha_1^{2s+1}\ldots\alpha_n) = +,\quad (\alpha_1^{2s+2}\ldots\alpha_n) = -,\quad \ldots$$
$$(\alpha_1^{2t}\ldots\alpha_n) = -,\quad (\alpha_1^{2t+1}\ldots\alpha_n) = -,$$

oder

$$(\alpha_1^{2t+1}\ldots\alpha_n) = +,\quad (\alpha_1^{2t+2}\ldots\alpha_n) = +,$$

wo $R^2{}_{2s}$ zu klein, $R^2{}_{2t}$ resp. $R^2{}_{2t+1}$ zu gross ist, oder endlich

$$(\alpha_1^{2s}\ldots\alpha_n) = -,\quad (\alpha_1^{2s+1}\ldots\alpha_n) = -,\quad (\alpha_1^{2s+2}\ldots\alpha_n) = +,\quad \ldots$$
$$(\alpha_1^{2t}\ldots\alpha_n) = +,\quad (\alpha_1^{2t+1}\ldots\alpha_n) = +,$$

oder

$$(\alpha_1^{2t+1}\ldots\alpha_n) = -,\quad (\alpha_1^{2t+2}\ldots\alpha_n) = -,$$

wo $R^2{}_{2s}$ zu gross, und $R^2{}_{2t}$ resp. $R^2{}_{2t+1}$ zu klein ist.

Es ist somit bewiesen, dass, wenn α_{n-2} negativ ist, und der reelle Teil der complexen Wurzeln ebenfalls negativ, die Näherungswerte von $R_r{}^2$ reihenweise zu gross oder zu klein sind. Dass aber eine solche Reihe mindestens aus zwei Gliedern besteht, wird auf demselben Wege wie im vorigen Fall gefunden.

Man hat jetzt

$$(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n)(\alpha_1^{r}\ldots\alpha_n) < (\alpha_1^{r-2}\ldots\alpha_n)(\alpha_1^{r+1}\ldots\alpha_n).$$

Ist nun

$$(\alpha_1^{2s-2}\ldots\alpha_n) = -,\quad (\alpha_1^{2s-1}\ldots\alpha_n) = +,\quad (\alpha_1^{2s}\ldots\alpha_n) = +,\quad (\alpha_1^{2s+1}\ldots\alpha_n) = -,$$

also $R^2{}_{2s-1}$ zu gross, so hat man

$$\frac{(\alpha_1^{2s-1}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^{2s-2}\ldots\alpha_n)} > \frac{(\alpha_1^{2s+1}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^{2s}\ldots\alpha_n)}.$$

Ist demnach

$$\frac{(\alpha_1^{2s+1}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^{2s}\ldots\alpha_n)} > \alpha_{n-2},$$

so ist notwendig auch

$$\frac{(\alpha_1^{2s-1}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^{2s-2}\ldots\alpha_n)} > \alpha_{n-2},$$

d. h. wenn

$$\begin{vmatrix}(\alpha_1^{2s+1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{2s+2}\ldots\alpha_{n-2})\\ (\alpha_1^{2s}\ldots\alpha_n) & (\alpha_1^{2s+1}\ldots\alpha_{n-2})\end{vmatrix} < 0,$$

so ist notwendig auch

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1^{2s-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{2s}\ldots\alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^{2s-2}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{2s-1}\ldots\alpha_{n-2}) \end{vmatrix} > 0,$$

wenn also R^2_{2s} zu klein, so ist R^2_{2s-2} zu gross.

Ist aber umgekehrt

$$\frac{(\alpha_1^{2s-1}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^{2s-2}\ldots\alpha_n)} < \alpha_{n-2},$$

so ist auch

$$\frac{(\alpha_1^{2s+1}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^{2s}\ldots\alpha_n)} < \alpha_{n-2},$$

d. h. wenn

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1^{2s-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{2s}\ldots\alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^{2s-2}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{2s-1}\ldots\alpha_{n-2}) \end{vmatrix} < 0,$$

so ist immer

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1^{2s+1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{2s+2}\ldots\alpha_{n-2}) \\ (\alpha_1^{2s}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{2s+1}\ldots\alpha_{n-2}) \end{vmatrix} > 0,$$

oder wenn R^2_{2s-2} zu klein, ist notwendig R^2_{2s} zu gross. Das Entsprechende ergibt sich auf dem nämlichen Wege in den drei übrigen Fällen, nämlich wenn

$$(\alpha_1^{2s-2}\ldots\alpha_n) = +,\ (\alpha_1^{2s-1}\ldots\alpha_n) = -,\ (\alpha_1^{2s}\ldots\alpha_n) = -,\ (\alpha_1^{2s+1}\ldots\alpha_n) = +,$$

wo R^2_{2s-1} zu klein, oder wenn

$$(\alpha_1^{2s-1}\ldots\alpha_n) = -,\ (\alpha_1^{2s}\ldots\alpha_n) = +,\ (\alpha_1^{2s+1}\ldots\alpha_n) = +,\ (\alpha_1^{2s+2}\ldots\alpha_n) = -,$$

wo R^2_{2s} zu klein, oder endlich wenn

$$(\alpha_1^{2s-1}\ldots\alpha_n) = +,\ (\alpha_1^{2s}\ldots\alpha_n) = -,\ (\alpha_1^{2s+1}\ldots\alpha_n) = -,\ (\alpha_1^{2s+2}\ldots\alpha_n) = +,$$

wo R^2_{2s} zu gross ist.

Es nähern sich also die R_r^2, wenn α_{n-2} negativ und der reelle Teil der complexen Wurzeln positiv ist, dem wahren Werte auf- und abspringend, dagegen, wenn der reelle Teil negativ ist, reihenweise. Was die Näherungswerte von $2R\cos\varphi$ betrifft, so befolgen sie das nämliche Gesetz. Man hat insbesondere $(2R\cos\varphi)_{r-1}$ zu gross, wenn r gerade und $(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n)$ und $(\alpha_1^{r-2}\ldots\alpha_n)$ positiv, oder wenn r ungerade, und $(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n)$ und $(\alpha_1^{r-2}\ldots\alpha_n)$ negativ, dagegen $(2R\cos\varphi)_{r-1}$ zu klein, wenn r gerade und $(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n)$ und $(\alpha_1^{r-2}\ldots\alpha_n)$ negativ, oder r ungerade, und $(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n)$ und $(\alpha_1^{r-2}\ldots\alpha_n)$ positiv sind.

c) Ist $\alpha_{n-3} = -\alpha_{n-2}$, so ist nach §. 2.

$$\frac{(\alpha_1^{2r}\ldots\alpha_{n-2})}{(\alpha_1^{2r-1}\ldots\alpha_{n-2})} = -\alpha_{n-2}\cdot\frac{Q_0\,\alpha_{n-2}{}^{n-4} + Q_2\,\alpha_{n-2}{}^{n-6} + \ldots}{Q_1\,\alpha_{n-2}{}^{n-5} + Q_3\,\alpha_{n-2}{}^{n-7} + \ldots}$$



und

$$\frac{(\alpha_1^{2\nu+1}\ldots\alpha_{n-2})}{(\alpha_1^{2\nu}\ldots\alpha_{n-2})} = -\alpha_{n-2}\cdot\frac{Q_1\alpha_{n-2}^{n-5}-Q_3\alpha_{n-2}^{n-7}+\ldots}{Q_0\alpha_{n-2}^{n-4}-Q_2\alpha_{n-2}^{n-6}+\ldots}$$

Je nach dem Zeichen des Bruches werden sich also die Näherungswerte im Allgemeinen verhalten wie im Falle a) oder b). Doch ist ein Unterschied dabei. Wenn nämlich die Annäherung reihenweise geschieht und man weiss, dass $R^2_{2\nu-1}$ zu gross, $R^2_{2\mu-1}$ zu klein ist, so kann man daraus, dass $R^2_{2\nu+2n-1}$ zu gross ist, nicht schliessen, dass alle vorhergehenden Näherungswerte bis $R^2_{2\nu-1}$ zu gross sind, sondern nur, dass die mit ungeraden Indices zu gross sind. Ebenso lässt sich, wenn $R^2_{2\nu+2n-1}$ zu klein ist nur schliessen, dass alle folgenden Näherungswerte mit ungeraden Indices bis $R^2_{2\mu-1}$ zu klein sind, und analog für $R^2_{2\nu+2n}$. Es können also dann zwischen $R^2_{2\nu-1}$ und $R^2_{2\mu-1}$ statt eines Zeichenwechsels mehrere, oder auch nur Zeichenwechsel eintreten. Doch soll hierauf nicht weiter eingegangen werden, und ich wende mich zum Fall

d) wenn α_{n-2} und α_{n-3} ebenfalls ein Paar absolut grösster complexer Wurzeln sind. Es sei dann wieder $\alpha_{n-2} = R'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$, und $\alpha_{n-3} = R'(\cos\varphi' - i\sin\varphi')$. Hier lässt sich ein festes Gesetz nicht aufstellen. Man erkennt wohl, dass, wenn $\cos\varphi = +$ und $\cos\varphi' = -$ ist, die Annäherung im Ganzen abwechslungsweise geschieht, und einzelne Zeichenfolgen eintreten, wenn bei den $(\alpha_1{}^r\ldots\alpha_n)$ ein Zeichenwechsel, oder bei den $(\alpha_1{}^r\ldots\alpha_{n-2})$ eine Zeichenfolge eintritt. Wenn aber ein Zeichenwechsel der $(\alpha_1{}^r\ldots\alpha_n)$ mit einer Zeichenfolge der $(\alpha_1{}^r\ldots\alpha_{n-2})$ zusammentrifft, folgen zwei Zeichenfolgen aufeinander, und der Fall kann sich so compliciren, dass eine ganze Reihe von Fehlern gleiche Zeichen haben und mithin der Charakter der Annäherung ganz verwischt ist. Dasselbe Verhältniss findet statt, wenn $\cos\varphi = -$ und $\cos\varphi' = +$ ist. Haben $\cos\varphi$ und $\cos\varphi'$ gleiche Zeichen, so findet im Ganzen die Annäherung reihenweise statt, es können aber auch ganze Reihen von Zeichenwechseln eintreten.

e) Wenn α_{n-2} und α_{n-3} ein Paar rein imaginäre Werte sind, so findet sich, dass im Ganzen Zeichenwechsel und Zeichenfolgen abwechseln. Wenn jedoch für die Zeichen der $(\alpha_1{}^r\ldots\alpha_n)$ ein Uebergang statt findet, kann eine Reihe von Folgen oder eine Reihe von Wechseln entstehen.

5) Der letzte mögliche Fall ist der, dass α_n und α_{n-1} ein Paar conjugirte rein imaginäre Werte sind. Ich untersuche hier nur die Art der Annäherung, die bei Anwendung der Formel 5) statt findet.

a) Ist α_{n-2} positiv, so sind abwechselnd zwei Näherungswerte zu gross und zwei zu klein.

b) Ist α_{n-2} negativ, so ist dasselbe der Fall. Der Unterschied ist der, dass wenn $(\alpha_1^{r-2} \ldots \alpha_n)$ und $(\alpha_1^{r-1} \ldots \alpha_n)$ gleiche Zeichen haben, ihnen in a) zwei zu grosse Werte entsprechen, in b) dagegen ein zu grosser und ein zu kleiner. In beiden Fällen ist der Fehler für $R^2{}_{r+2}$ kleiner als für $R^2{}_r$.

c) Ist $\alpha_{n-3} = -\alpha_{n-2}$, so verhalten sich die Näherungswerte wie in a) oder b).

d) Ist $\alpha_{n-2} = R'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ und $\alpha_{n-3} = R'(\cos\varphi' - i\sin\varphi')$, so bilden im Allgemeinen die Vorzeichen der Fehler abwechselnd Folgen und Wechsel, bei den Uebergangsstellen der $(\alpha_1^r \ldots \alpha_{n-2})$ aber können drei oder mehr Folgen oder Wechsel aufeinander folgen. Die Annäherung findet nur im Ganzen statt.

e) Sind endlich α_{n-2} und α_{n-3} ebenfalls ein Paar rein imaginäre Werte, so können die Näherungswerte entweder alle zu gross, oder alle zu klein sein, oder sie können auch abwechselnd zu gross oder zu klein sein. Der Fehler bei $R^2{}_{r+2}$ ist kleiner als bei $R^2{}_r$.

§. 5.

Das Resultat des vorigen Paragraphen ist nun das Folgende:

Die Näherungswerte sind immer zu gross im Falle 1) a; und unter Umständen auch in den Fällen 1) c, 2) c, 3) und 5) e.

Die Näherungswerte sind immer zu klein im Falle 2) b, und unter Umständen auch in den Fällen 1) c, 2) c, 3) und 5) e.

Die Näherungswerte sind abwechselnd zu gross und zu klein in den Fällen 1) b und 2) a, und unter Umständen auch in den Fällen 1) c, 2) c, 3) und 5) e.

Von den Näherungswerten sind abwechselnd zwei zu gross und zwei zu klein in den Fällen 1) c, 2) c, 5) a, 5) b, 5) c, unter Umständen auch in 3).

In all diesen Fällen kann man also, wenn einmal genug Näherungswerte berechnet sind, um auch auf die Natur der zweitgrössten Wurzeln schliessen zu können, für jeden späteren Näherungswert a priori mit Sicherheit wissen, ob er zu gross oder zu klein ausfällt.

Wenn sich die Näherungswerte den wahren Werten reihenweise oder auf und abspringend nähern, so kommt es darauf an, ob dies Verhalten von den grössten oder von den zweitgrössten Wurzeln herrührt. Im ersten Fall, also bei 4) a, 4) b, 4) c und 4) e lässt sich für einen Teil der Werte auch a priori bestimmen, ob sie zu gross oder

zu klein ausfallen. Im zweiten Fall dagegen, also bei 1) d, 2) d, 4) d, 5) d, und u. A. bei 3) kann man nur a posteriori schliessen, ob die einzelnen Werte zu gross oder zu klein sind.

Die Annäherung kann rasch, kann aber auch sehr langsam erfolgen, wenn die absolut grössten Wurzeln nicht viel differiren. Eine raschere Annäherung lässt sich erzielen, wenn man Correcturen anbringt, die sich aus der in jedem Fall bekannten Form der Fehler ergeben. Dies soll, wie schon gesagt, Gegenstand einer weiteren Abhandlung sein, und sei hier einstweilen nur soviel bemerkt, dass sich dabei auch in den Fällen, wo die erste Annäherung nur einseitig geschieht, abwechselnd zu grosse und zu kleine Näherungswerte ergeben.

§. 6.

Um die kleinste, resp. die zwei kleinsten Wurzeln zu finden, erhält man die Formeln auf dem nämlichen Wege aus der Entwicklung von $\frac{1}{fx}$ nach steigenden Potenzen von x. Ich stelle sie hier kurz zusammen und immer gleich neben den genauen Wert den Wert, welchem sich der Ausdruck für grosse r nähert. Man hat also:

1[c]) $$\frac{(\alpha_1^{-r}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^{-r-1}\ldots\alpha_n)} = \alpha_1 + \frac{(\alpha_2^{-r}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^{-r-1}\ldots\alpha_n)} = \alpha_1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{-r+n-2} \frac{f'_{\alpha_1}}{k'_{\alpha_2}}.$$

2[c]) $$\frac{(\alpha_1^{-r}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^{-r-2}\ldots\alpha_n)} = \alpha_1^2 + \frac{(\alpha_3^{-r}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^{-r-2}\ldots\alpha_n)} = \alpha_1^2 + (-1)^n \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^{-r+n-3} \frac{\alpha_1 l_{\alpha_1} l_{-\alpha_1}}{l_{\alpha_2} c_1}$$

$$\text{oder} \quad = \alpha_1^2 + (-1)^{n-1} \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)^{-r+n-3} \frac{\alpha_1 l_{\alpha_1} l_{-\alpha_1}}{l_{\alpha_2} c_2},$$

je nachdem r gerade oder ungerade.

3[c]) $$\frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{-r}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{-r+1}\ldots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{-r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{-r}\ldots\alpha_n)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{-r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{-r}\ldots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{-r-2}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{-r-1}\ldots\alpha_n)\end{vmatrix}} = \alpha_1\alpha_2 + \frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{-r}\ldots\alpha_n), & (\alpha_3^{-r+1}\ldots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{-r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_3^{-r}\ldots\alpha_n)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{-r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{-r}\ldots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{-r-2}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{-r-1}\ldots\alpha_n)\end{vmatrix}}$$

$$= R^2 + \left(\frac{\alpha_3}{R}\right)^{-r+n-3} \frac{l_{\alpha_1} l_{\alpha_2}}{l'_{\alpha_2} \sin\varphi} \cdot \frac{R A_{-r+1} - \alpha_3 A_{-r}}{A^2_{-r} + B^2_{-r}},$$

4[c]) $$\frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{-r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{-r+1}\ldots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{-r-2}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{-r}\ldots\alpha_n)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{-r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{-r}\ldots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{-r-2}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{-r-1}\ldots\alpha_n)\end{vmatrix}} = \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{-r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_3^{-r+1}\ldots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{-r-2}\ldots\alpha_n), & (\alpha_3^{-r}\ldots\alpha_n)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{-r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{-r}\ldots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{-r-2}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{-r-1}\ldots\alpha_n)\end{vmatrix}}$$

$$= 2R\cos\varphi + \left(\frac{\alpha_3}{R}\right)^{-r+n-3} \frac{l_{\alpha_1} l_{\alpha_2}}{l'_{\alpha_2} \sin\varphi} \cdot \frac{R A_{-r} - \alpha_3 A_{-r-1}}{R(A^2_{-r} + B^2_{-r})}.$$

5c)
$$\frac{(\alpha_1^{-r}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^{-r-2}\ldots\alpha_n)}=\alpha_1^2+\frac{(\alpha_3^{-r}\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1^{-r-2}\ldots\alpha_n)}=-R^2+\left(\frac{\alpha_3}{R}\right)^{-r+n-3}R\frac{l_{\alpha_1}l_{\alpha_2}}{l'_{\alpha_2}A_{-r-1}}$$

Aus diesen Formeln nun kann man auf die Vorzeichen der $(\alpha_1^{-r}\ldots\alpha_n)$ und auf die Art der Annäherung schliessen wie im vorigen Fall. Man erhält die nämlichen Resultate mit einer einzigen Ausnahme. Es ist nämlich wieder $(\alpha_1^{-r}\ldots\alpha_n)=-\frac{\alpha_1^{-r+n-1}}{f'_{\alpha_1}}$ für $r=\infty$. Diesmal ist aber das Vorzeichen von f'_{α_1} abhängig nicht nur von α_1, sondern auch von den übrigen Wurzeln, und kann sowohl positiv als negativ sein. Deswegen sind, wenn α_1 positiv ist, die $(\alpha_1^{-r}\ldots\alpha_n)$ entweder alle posisiv, oder auch alle negativ. Ebenso sind, wenn α_1 negativ ist, die $(\alpha_1^{-r}\ldots\alpha_n)$ abwechselnd positiv und negativ, man kann aber nicht behaupten, dass sie für gerade r positiv und für ungerade negativ sind, es kann auch umgekehrt der Fall sein. Inwiefern sich hierdurch die Gesetze der Annäherung modificiren, ist leicht zu übersehen.

§. 7.

Auf dem nämlichen Wege erhält man nun auch sehr einfach die Coefficienten der Gleichung, deren Wurzeln die i grössten oder die $n-i$ kleinsten Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, vorausgesetzt, dass die darauf folgenden Wurzeln kleiner, resp. grösser sind. Aus der Gleichung g) nämlich folgt

$$(\alpha_1^{r+i-1}\ldots\alpha_n)=\underset{\alpha_{n-i+1}\ldots\alpha_n}{C^1}(\alpha_1^{r+i-2}\ldots\alpha_n)-\underset{\alpha_{n-i+1}\ldots\alpha_n}{C^2}(\alpha_1^{r+i-2}\ldots\alpha_n)+\ldots$$
$$\ldots(-1)^{i-1}\underset{\alpha_{n-i+1}\ldots\alpha_n}{C^i}(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n)+(\alpha_1^{r+i-1}\ldots\alpha_{n-i}).$$

Mittels dieser Gleichung erhält man wie oben, indem man in der letzten Colonne für jedes Glied den ihm entsprechenden Wert einsetzt,

6)
$$\frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r+1}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1^{r+i-1}\ldots\alpha_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1^{r+i-2}\ldots\alpha_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix}}=$$

$$\underset{\alpha_{n-i+1}\ldots\alpha_n}{C^i}+\frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r+1}\ldots\alpha_n)\ldots & (\alpha_1^{r+i-2}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r+i-1}\ldots\alpha_{n-i})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1^{r+i-2}\ldots\alpha_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix}}$$

$$6^{a})\quad \frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n)\ldots(\alpha_1^{r+k-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{r+k+1}\ldots\alpha_n)\ldots(\alpha_1^{r+i-1}\ldots\alpha_n)\\ \cdots & \cdots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n), (\alpha_1^{r}\ldots\alpha_n) & \ldots\ (\alpha_1^{r+i-2}\ldots\alpha_n)\\ \cdots & \cdots\end{vmatrix}} =$$

$$C^{i-k-1}_{\alpha_{n-i+1}\ldots\alpha_n} +$$

$$\frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1}..\alpha_n)\ldots(\alpha_1^{r+k-1}..\alpha_n), (\alpha_1^{r+k+1}..\alpha_n)\ldots(\alpha_1^{r+i-2}..\alpha_n), (\alpha_1^{r+i-1}..\alpha_{n-i})\\ \cdots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1}..\alpha_n), (\alpha_1^{r}..\alpha_n)\ \ldots\ (\alpha_1^{r+i-2}..\alpha_n)\\ \cdots\end{vmatrix}}$$

zuletzt für $k = i-2$

$$6^{b})\quad \frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n), (\alpha_1^{r}\ldots\alpha_n)\ldots(\alpha_1^{r+i-3}\ldots\alpha_n), (\alpha_1^{r+i-1}\ldots\alpha_n)\\ \cdots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n), (\alpha_1^{r}\ldots\alpha_n)\ldots(\alpha_1^{r+i-2}\ldots\alpha_n)\\ \cdots\end{vmatrix}} =$$

$$C^{1}_{\alpha_{n-i+1}\ldots\alpha_n} + \frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n), (\alpha_1^{r}\ldots\alpha_n)\ldots(\alpha_1^{r+i-3}\ldots\alpha_n), (\alpha_1^{r+i-1}\ldots\alpha_{n-i})\\ \cdots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_n), (\alpha_1^{r}\ldots\alpha_n)\ldots(\alpha_1^{r+i-2}\ldots\alpha_n)\\ \cdots\end{vmatrix}}$$

Ebenso erhält man mit Hülfe der Gleichung g)

$$(\alpha_1^{-r+n-i-1}..\alpha_n) = C^{1}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-i}}(\alpha_1^{-r+n-i-2}..\alpha_n) - C^{2}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-i}}(\alpha_1^{-r+n-i-3}..\alpha_n) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-i-1} C^{n-i}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-i}}(\alpha_1^{-r-1}..\alpha_n) + (\alpha_{n-i+1}^{-r+n-i-1}..\alpha_n).$$

$$7)\quad \frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{-r}\ldots\alpha_n), (\alpha_1^{-r+1}\ldots\alpha_n)\ldots(\alpha_1^{-r+n-i-1}\ldots\alpha_n)\\ \cdots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{-r-1}\ldots\alpha_n), (\alpha_1^{-r}\ldots\alpha_n)\ldots(\alpha_1^{-r+n-i-2}\ldots\alpha_n)\\ \cdots\end{vmatrix}} = C^{n-i}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-i}} +$$

$$\frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{-r}..\alpha_n), (\alpha_1^{-r+1}..\alpha_n)\ldots(\alpha_1^{-r+n-i-2}..\alpha_n), (\alpha_{n-i+1}^{-r+n-i-1}..\alpha_n)\\ \cdots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{-r-1}..\alpha_n), (\alpha_1^{-r}..\alpha_n)\ldots(\alpha_1^{-r+n-i-2}..\alpha_n)\\ \cdots\end{vmatrix}}$$

$$7^{a})\quad \frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{-r-1}..\alpha_n)\ldots(\alpha_1^{-r+k-1}..\alpha_n), & (\alpha_1^{-r+k+1}..\alpha_n)\ldots(\alpha_1^{-r+n-i-1}..\alpha_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{-r-1}..\alpha_n), (\alpha_1^{-r}..\alpha_n)\ \ldots & (\alpha_1^{-r+n-i-2}..\alpha_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\end{vmatrix}} =$$

$$C^{n-i-k-1}_{\alpha_1\cdots\alpha_{n-i}} + \frac{\begin{vmatrix}\overset{-r-1}{(\alpha_1\ldots\alpha_n)}\ldots\overset{-r+k-1}{(\alpha_1\ldots\alpha_n)}, & \overset{-r+k+1}{(\alpha_1\ldots\alpha_n)}\ldots\overset{-r+n-i-2}{(\alpha_1\ldots\alpha_n)}, & \overset{-r+n-i-1}{(\alpha_{n-i+1}\ldots\alpha_n)}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\overset{-r-1}{(\alpha_1\ldots\alpha_n)}, \overset{-r}{(\alpha_1\ldots\alpha_n)}\ \ldots & \overset{-r+n-i-2}{(\alpha_1\ldots\alpha_n)}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\end{vmatrix}}$$

zuletzt für $k = n - i - 2$

$$7^{b})\quad \frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{-r-1}\ldots\alpha_n)\ldots(\alpha_1^{-r+n-i-3}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1^{-r+n-i-1}\ldots\alpha_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{-r-1}\ldots\alpha_n), (\alpha_1^{-r}\ldots\alpha_n)\ \ldots & (\alpha_1^{-r+n-i-2}\ldots\alpha_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\end{vmatrix}} =$$

$$C^{1}_{\alpha_1\cdots\alpha_{n-i}} + \frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{-r-1}\ldots\alpha_n)\ldots(\alpha_1^{-r+n-i-3}\ldots\alpha_n), & (\alpha_{n-i+1}^{-r+n-i-1}\ldots\alpha_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{-r-1}\ldots\alpha_n), (\alpha_1^{-r}\ldots\alpha_n)\ \ldots & (\alpha_1^{-r+n-i-2}\ldots\alpha_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\end{vmatrix}}$$

Bei all diesen Formeln wird der Fehler im Allgemeinen kleiner mit wachsendem r, und verschwindet ganz für unendlich grosse r, wenn dem absoluten Wert nach $\alpha_{n-i} < \alpha_{n-i+1}$. Dies lässt sich allerdings aus der Form, in welcher die Fehler hier erscheinen, nicht ohne Weiteres erkennen, allein es lassen sich die Ausdrücke so umformen, dass das Gesetz zu Tage tritt. Ein ähnliches Verfahren als das, welches zur Gleichung k) führt, gibt nämlich identisch für den Fehler in der Gleichung 6ª)

$$\frac{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1}..\alpha_n)\ldots(\alpha_1^{r+k-1}..\alpha_n), & (\alpha_1^{r+k+1}..\alpha_n)\ldots(\alpha_1^{r+i-2}..\alpha_n), & (\alpha_1^{r+i-1}..\alpha_{n-i})\\ (\alpha_1^{r-2}..\alpha_n)\ldots(\alpha_1^{r+k-2}..\alpha_n), & (\alpha_1^{r+k}..\alpha_n)\ \ldots(\alpha_1^{r+i-3}..\alpha_n), & (\alpha_1^{r+i-2}..\alpha_{n-i})\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1}..\alpha_n), & (\alpha_1^{r}..\alpha_n)\ \ldots & (\alpha_1^{r+i-2}..\alpha_n)\\ (\alpha_1^{r-2}..\alpha_n), & (\alpha_1^{r-1}..\alpha_n)\ \ldots & (\alpha_1^{r+i-3}..\alpha_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\end{vmatrix}} =$$

$$\left|\begin{array}{llll}
(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_{n-i}\,\alpha_{n-i+1})\ldots & (\alpha_1^{r+k-1}\ldots\alpha_{n-i}\,\alpha_{n-i+1}), & (\alpha_1^{r+k+1}\ldots\alpha_{n-i}\,\alpha_{n-i+1}) & \ldots \\
(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_{n-i}\,\alpha_{n-i+2})\ldots & (\alpha_1^{r+k-1}\ldots\alpha_{n-i}\,\alpha_{n-i+2}), & (\alpha_1^{r+k+1}\ldots\alpha_{n-i}\,\alpha_{n-i+2}) & \ldots \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\
(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_{n-i}\,\alpha_n)\ldots & (\alpha_1^{r+k-1}\ldots\alpha_{n-i}\,\alpha_n), & (\alpha_1^{r+k+1}\ldots\alpha_{n-i}\,\alpha_n) & \ldots \\
\hline
(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_{n-i}\,\alpha_{n-i+1}), & (\alpha_1^{r}\ldots\alpha_{n-i}\,\alpha_{n-i+1}) & \quad\cdot\;\cdot\;\cdot & \\
(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_{n-i}\,\alpha_{n-i+2}), & (\alpha_1^{r}\ldots\alpha_{n-i}\,\alpha_{n-i+2}) & \quad\cdot\;\cdot\;\cdot & \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\
(\alpha_1^{r-1}\ldots\alpha_{n-i}\,\alpha_n), & (\alpha_1^{r}\ldots\alpha_{n-i}\,\alpha_n) & \quad\cdot\;\cdot\;\cdot &
\end{array}\right.$$

wobei die Ausdrücke in der letzten Colonne des Zählers dieselbe Bedeutung haben wie in der Abhandlung über die Bernoulli'schen Zahlen, Jahrgang 19. der Zeitschrift für Math. u. Phys. p. 220, nämlich

$$(\alpha_1^{r+i-1}\ldots\alpha_{n-i}:\alpha_{n-i+2}\ldots\alpha_n)=(\alpha_1^{r+i-1}\ldots\alpha_{n-i})-\underset{\alpha_{n-i+2}\ldots\alpha_n}{C^1}(\alpha_1^{r+i-2}\ldots\alpha_{n-i})+$$

$$\underset{\alpha_{n-i+2}\ldots\alpha_n}{C^2}(\alpha_1^{r+i-3}\ldots\alpha_{n-i})+\ldots+(-1)^{i-1}\underset{\alpha_{n-i+2}\ldots\alpha_n}{C^{i-1}}(\alpha_1^{r}\ldots\alpha_{n-i})$$

u. s. w.

Hieraus erhält man dann z. B., wenn unter den Werten $\alpha_1\ldots\alpha_{n-i}$ der letzte ein einzelner absolut grösster ist, und sie alle absolut kleiner als die Werte $\alpha_{n-i+1}\ldots\alpha_n$ sind, wenn ferner r so gross ist, dass man statt der Divisionscoefficienten die Ausdrücke setzen kann, denen sie sich nähern, und wenn endlich zur Abkürzung $(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{n-i})=t_x$ und $(x-\alpha_{n-i+1})\ldots(x-\alpha_n)=s_x$ gesetzt wird, für den Ausdruck des Fehlers

$$\frac{s_{\alpha_{n-i}}}{t'_{\alpha_{n-i}}}\left\{\left(\frac{\alpha_{n-i}}{\alpha_{n-i+1}}\right)^{r+n-i-1}\frac{t_{\alpha_{n-i+1}}}{s'_{\alpha_{n-i+1}}}\cdot\frac{1}{\alpha_{n-i}-\alpha_{n-i+1}}\cdot\underset{\alpha_{n-i+2}\ldots\alpha_n}{C^{i-k-2}}\right.$$

$$+\left(\frac{\alpha_{n-i}}{\alpha_{n-i+2}}\right)^{r+n-i-1}\frac{t_{\alpha_{n-i+2}}}{s'_{\alpha_{n-i+2}}}\cdot\frac{1}{\alpha_{n-i}-\alpha_{n-i+2}}\cdot\underset{\alpha_{n-i+1}\alpha_{n-i+3}\ldots\alpha_n}{C^{i-k-2}}$$

$$\left.+\ldots+\left(\frac{\alpha_{n-i}}{\alpha_n}\right)^{r+n-i-1}\frac{t_{\alpha_n}}{s'_{\alpha_n}}\cdot\frac{1}{\alpha_{n-i}-\alpha_n}\cdot\underset{\alpha_{n-i+1}\ldots\alpha_{n-1}}{C^{i-k-2}}\right\}.$$

Für $i=1$, $k=-1$ giebt dies wieder die 1^a); für $i=2$, $k=-1$ und $\alpha_n=R(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $\alpha_{n-1}=R(\cos\varphi-i\sin\varphi)$ gibt es die 3^a). Es reducirt sich nämlich der Fehler auf

$$\left(\frac{\alpha_{n-2}}{R}\right)^{r+n-3}\frac{1}{h'_{\alpha_{n-2}}\sin\varphi}\{B_{n-2}[R\sin(r+n-1)\varphi-\alpha_{n-2}\sin(r+n-2)\varphi]$$

$$-A_{n-2}[R\cos(r+n-1)\varphi-\alpha_{n-2}\cos(r+n-2)\varphi]\}.$$

$$\frac{\begin{array}{ll|} \ldots(\alpha_1^{r+i-2}\ldots\alpha_{n-i}\alpha_{n+i-1}), & (\alpha_1^{r+i-1}\ldots\alpha_{n-i}:\alpha_{n-i+2}\ldots\alpha_n) \\ \ldots(\alpha_1^{r+i-2}\ldots\alpha_{n-i}\alpha_{n-i+2}), & (\alpha_1^{r+i-1}\ldots\alpha_{n-i}:\alpha_{n-i+1}\alpha_{n-i+3}\ldots\alpha_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots(\alpha_1^{r+i-2}\ldots\alpha_{n-i}\alpha_n), & (\alpha_1^{r+i-1}\ldots\alpha_{n-i}:\alpha_{n-i+1}\ldots\alpha_{n-1}) \end{array}}{\begin{array}{ll|} \ldots & (\alpha_1^{r+i-2}\ldots\alpha_{n-i}\alpha_{n-i+1}) \\ \ldots & (\alpha_1^{r+i-2}\ldots\alpha_{n-i}\alpha_{n-i+2}) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots & (\alpha_1^{r+i-2}\ldots\alpha_{n-i}\alpha_n) \end{array}}$$

In analoger Weise lassen sich die übrigen Ausdrücke der Fehler umformen, welche in diesem Paragraphen enthalten sind.

Noch sei bemerkt, dass es nicht nötig ist, besonders zu untersuchen, ob $\alpha_{n-i} < \alpha_{n-i+1}$. Es ergibt sich dies von selbst daraus, dass die Verhältnisse sich bestimmten Grenzen nähern oder nicht. Ferner, dass die Identitäten ungestört bleiben, wenn auch unter den übrigen Wurzeln gleiche vorhanden sind. Endlich, dass sich, wie Fürstenau bemerkt hat, die Determinanten $i$ten Grades zurückführen lassen auf Determinanten 2ten Grades, deren Elemente selbst Determinanten vom $i-1$ten Grad sind, indem man die Sätze von Determinanten adjungirter Systeme anwendet.

§. 8.

Es ist nicht notwendig, dass man beide Reihen der Divisionscoefficienten entwickelt, denn jede der obigen Determinanten, welche die eine Art der Coefficienten enthält, lässt sich auch darstellen als eine Determinante, welche die andere Art enthält. Es lässt sich nämlich jede durch Rändern so auf den $n$ten Grad bringen, dass sie den gemeinsamen Charakter nicht verliert und nur aussen durch eine Potenz von $(\alpha_1^0\ldots\alpha_n)$ oder $(\alpha_1^{-n}\ldots\alpha_n)$ multiplicirt ist. Die Gleichung 1) liefert dann die gesuchte Transformation.

Es sollen hier nur die wichtigen Fälle, wo $n-i=2$, und wo $i=2$ ist, durchgeführt werden. Da sich im Folgenden die Divisionscoefficienten immer auf die sämmtlichen α beziehen, mag zur Abkürzung statt $(\alpha_1^r\ldots\alpha_n)$ (r) geschrieben werden. Es ist

$$\begin{vmatrix} (-r), & (-r+1) \\ (-r-1), & (-r) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(-n)^{n-2}} \begin{vmatrix} (-r), & (-r+1), & (-n+2), & (-n+3) & \ldots & (-1) \\ (-r-1), & (-r), & (-n+1), & (-n+2) & \ldots & (-2) \\ (-r-2), & (-r-1), & (-n), & (-n+1) & \ldots & (-3) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (-r-n+1), & (-r-n+2), & (-2n+3), & (-2n+4) & \ldots & (-n) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(\alpha_1 \dots \alpha_n)^{-r}}{(-n)^{n-2}} \begin{vmatrix} (0), & (1), & (r-n+2), & (r-n+3) & \dots & (r-1) \\ (-1), & (0), & (r-n+1), & (r-n+2) & \dots & (r-2) \\ (-2), & (-1), & (r-n), & (r-n+1) & \dots & (r-3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-n+1), & (-n+2), & (r-2n+3), & (r-2n+4) & \dots & (r-n) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(\alpha_1 \dots \alpha_n)^{-r}}{(-n)^{n-2}} \begin{vmatrix} (r-n), & (r-n+1) & \dots & (r-3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (r-2n+3), & (r-2n+4) & \dots & (r-n) \end{vmatrix}$$

Ganz ebenso ergibt sich auch

$$\begin{vmatrix} (-r-1), & (-r) \\ (-r-2), & (-r-1) \end{vmatrix} = \frac{(\alpha_1 \dots \alpha_n)^{-r-1}}{(-n)^{n-2}} \begin{vmatrix} (r-n+1), & (r-n+2) & \dots & (r-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (r-2n+4), & (r-2n+5) & \dots & (r-n+1) \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} (-r-1), & (-r+1) \\ (-r-2), & (-r) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(\alpha_1 \dots \alpha_n)^{-r-1}}{(-n)^{n-2}} \begin{vmatrix} (1), & (r-n+2), & (r-n+3) & \dots & (r-1) \\ (0), & (r-n+1), & (r-n+2) & \dots & (r-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-n+3), & (r-2n+4), & (r-2n+5) & \dots & (r-n+1) \end{vmatrix}$$

Sonach ist

8)
$$\frac{\begin{vmatrix} (-r), & (-r+1) \\ (-r-1), & (-r) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (-r-1), & (-r) \\ (-r-2), & (-r-1) \end{vmatrix}} = (-1)^n C_n \frac{\begin{vmatrix} (r-n), & (r-n+1) & \dots & (r-3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (r-2n+3), & (r-2n+4) & \dots & (r-n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (r-n+1), & (r-n+2) & \dots & (r-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (r-2n+4), & (r-2n+5) & \dots & (r-n+1) \end{vmatrix}}$$

und

8ᵃ)
$$\frac{\begin{vmatrix} (-r-1), & (-r+1) \\ (-r-2), & (-r) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (-r-1), & (-r) \\ (-r-2), & (-r-1) \end{vmatrix}} = (1) - \frac{\begin{vmatrix} (r-n+1) & \dots & (r-3), & (r-1) \\ (r-n) & \dots & (r-4), & (r-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (r-2n+4) & \dots & (r-n), & (r-n+2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (r-n+1) & \dots & (r-3), & (r-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (r-2n+4) & \dots & (r-n), & (r-n+1) \end{vmatrix}}$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, dass die Näherungswerte für $\alpha_1 \alpha_2$, welche die 7) ergibt, der Reihe nach die nämlichen sind als die, welche ich erhalte, wenn ich das Product der Wurzeln durch die Reihe der Näherungswerte für $\alpha_3 \dots \alpha_n$ dividire, welche die 6) ergibt; und dass die Näherungswerte für $\alpha_1 + \alpha_2$, welche die 7ᵇ) ergibt, der Reihe nach die nämlichen sind als die, welche ich erhalte, wenn

ich von der Summe der Wurzeln die Reihe der Näherungswerte für $\alpha_3 + \alpha_4 \ldots + \alpha_n$ abziehe, welche die 6[b]) ergibt. Zusammengehörend aber sind nicht zwei Werte, die demselben r entsprechen, sondern zwei Werte, die zwei aufeinanderfolgenden r entsprechen.

Ganz ähnlich ist nun weiter für $i = 2$

$$\begin{vmatrix} (r), & (r+1) \\ (r-1), & (r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (0), & (1) & \ldots (n-3), & (r+n-2), & (r+n-1) \\ (-1), & (0) & \ldots (n-4), & (r+n-3), & (r+n-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-n+2), & (-n+3) & \ldots (-2), & (r-1), & (r) \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_1 \ldots \alpha_n)^{r+n} (-n)^2 \begin{vmatrix} (-r-n), & (-r-n+1) & \ldots & (-r-3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-r-2n+3), & (-r-2n+4) & \ldots & (-r-n) \end{vmatrix}$$

Ebenso

$$\begin{vmatrix} (r-1), & (r) \\ (r-2), & (r-1) \end{vmatrix}$$
$$= (\alpha_1 \ldots \alpha_n)^{r-1+n} (-n)^2 \begin{vmatrix} (-r-n+1), & (-r-n+2) & \ldots & (-r-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-r-2n+4), & (-r-2n+5) & \ldots & (-r-n+1) \end{vmatrix}$$

und bei Versetzung der letzten Colonne an den Anfang

$$\begin{vmatrix} (r-1), & (r+1) \\ (r-2), & (r) \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} (\alpha_1 \ldots \alpha_n)^{r+n-2} (-n) \times$$

$$\begin{vmatrix} (1), & (-r-n+2), & (-r-n+3) & \ldots & (-r-1) \\ (0), & (-r-n+1), & (-r-n+2) & \ldots & (-r-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-n+3), & (-r-2n+4), & (-r-2n+5) & \ldots & (-r-n+1) \end{vmatrix}$$

Demnach ist

$$9)\quad \frac{\begin{vmatrix} (r), & (r+1) \\ (r-1), & (r) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (r-1), & (r) \\ (r-2), & (r-1) \end{vmatrix}} = (-1)^n C_n \frac{\begin{vmatrix} (-r-n), & (-r-n+1) & \ldots & (-r-3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (-r-n+1), & (-r-n+2) & \ldots & (-r-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}$$

und

$$9^a)\quad \frac{\begin{vmatrix} (r-1), & (r+1) \\ (r-2), & (r) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (r-1), & (r) \\ (r-2), & (r-1) \end{vmatrix}} = (1) - \frac{\begin{vmatrix} (-r-n+1) & \ldots (-r-3), & (-r-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (-r-n+1) & \ldots (-r-3), & (-r-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich analoge Schlüsse ziehen wie aus 8) und 8[a]).

§. 9.

Die Resultate des §. 7. erlauben nun auch, wie Fürstenau in seiner ersten Abhandlung gezeigt hat, Ausdrücke aufzustellen, die gegen einen der mittleren Wurzelwerte convergiren, oder gegen Summe und Product von einem Paar solcher Wurzelwerte, vorausgesetzt, dass alle übrigen absolut grösser oder kleiner sind. Von praktischem Wert dürfte nur der erste Fall sein, und für diesen will ich nur die Formeln hier aufstellen.

Es sei also absolut genommen $\alpha_{n-i-1} < \alpha_{n-i} < \alpha_{n-i+1}$, so gibt die 6[b])

$$10)\quad \frac{\begin{vmatrix} (\alpha_1{}^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1{}^{r+i-2}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+i}\ldots\alpha_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\alpha_1{}^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1{}^{r+i-1}\ldots\alpha_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} (\alpha_1{}^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1{}^{r+i-3}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+i-1}\ldots\alpha_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\alpha_1{}^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1{}^{r+i-2}\ldots\alpha_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}} = \alpha_{n-i} + \text{Rest},$$

wo der Rest mit wachsendem r immer kleiner wird. Ebenso gibt aber die 6)

$$10^{a})\quad \frac{\begin{vmatrix} (\alpha_1{}^{r}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+1}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1{}^{r+i}\ldots\alpha_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\alpha_1{}^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1{}^{r+i-1}\ldots\alpha_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}} \times \frac{\begin{vmatrix} (\alpha_1{}^{r-1}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1{}^{r+i-2}\ldots\alpha_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\alpha_1{}^{r}\ldots\alpha_n), & (\alpha_1{}^{r+1}\ldots\alpha_n) & \ldots & (\alpha_1{}^{r+i-1}\ldots\alpha_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}} = \alpha_{n-i} + \text{Rest}.$$

Die linke Seite der 10[a]) lässt sich mittels der Gleichungen n) und l) auch noch verwandeln in das Verhältniss zweier Determinanten vom $n$ten Grad mit Divisionscoefficienten als Elementen. Eine Erleichterung der Rechnung gewährt dies nicht, ist aber immerhin interessant genug, um auch diese Formel noch anzugeben. Man findet

10[b])

$$\frac{\begin{vmatrix} (-1), & (0) & .. (n-i-3), & (r+n-i-2) & .. (r+n-2) \\ (-2), & (-1) & .. (n-i-4), & (r+n-i-3) & .. (r+n-3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-i), & (-i+1) & .. (n-2i-2), & (r+n-2i-1) & .. (r+n-i-1) \\ (-r-i), & (-r-i+1) & .. (-r+n-2i-2), & (n-2i-1) & .. (n-i-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-r-n+1), & (-r-n+2) & .. (-r-i-1), & (-i) & .. (0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0), & (1) & .. (n-i-2), & (r+n-i-2) & .. (r+n-2) \\ (-1), & (0) & .. (n-i-3), & (r+n-i-3) & .. (r+n-3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-i+1), & (-i+2) & .. (n-2i-1), & (r+n-2i-1) & .. (r+n-i-1) \\ (-r-i), & (-r-i+1) & .. (-r+n-2i-2), & (n-2i-2) & .. (n-i-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-r-n+1), & (-r-n+2) & .. (-r-i-1), & (-i-1) & .. (-1) \end{vmatrix}}$$

$$= a_{n-i} + \text{Rest.}$$

Man hat also z. B. für die dritte Wurzel einer Gleichung 5ten Grades

$$\begin{vmatrix} (-1), & (0), & (r+1), & (r+2), & (r+3) \\ (-2), & (-1), & (r), & (r+1), & (r+2) \\ (-r-2), & (-r-1), & (0), & (1), & (2) \\ (-r-3), & (-r-2), & (-1), & (0), & (1) \\ (-r-4), & (-r-3), & (-2), & (-1), & (0) \end{vmatrix} :$$

$$\begin{vmatrix} (0), & (1), & (r+1), & (r+2), & (r+3) \\ (-1), & (0), & (r), & (r+1), & (r+2) \\ (-r-2), & (-r-1), & (-1), & (0), & (1) \\ (-r-3), & (-r-2), & (-2), & (-1), & (0) \\ (-r-4), & (-r-3), & (-3), & (-2), & (-1) \end{vmatrix} = a_3 + \text{Rest},$$

wobei noch die Gleichung l) erlaubt, alle Exponenten der Divisionscoefficienten um gleich viel zu erhöhen oder zu erniedrigen, oder auch im Zähler und Nenner um verschiedene Grössen, wenn mit der entsprechenden Potenz von C_n multiplicirt wird.

§. 10.

Um die gefundenen Ausdrücke auf die Form zu bringen, von welcher Fürstenau ausgegangen ist, wende ich die Gleichung m) an. Ich erhalte aus ihr für $q=0$, $s=1$, $t=2, \ldots$ $v=n-2$, $w=r+n-1$

$$(a_1{}^r \ldots a_n) = (-1)^r \begin{vmatrix} C_1, & C_2 & \ldots & C_r \\ C_0, & C_1 & \ldots & C_{r-1} \\ 0, & C_0 & \ldots & C_{r-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0 & \ldots & C_1 \end{vmatrix}$$

für $q=0,\ s=1,\ t=2,\dots\ u=n-3,\ v=r+n-2,\ w=r+n-1$

$$\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r}\dots\alpha_n), & (\alpha_1^{r+1}\dots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{r-1}\dots\alpha_n), & (\alpha_1^{r}\dots\alpha_n)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C_2, & C_3 & \dots & C_{r+1}\\ C_1, & C_2 & \dots & C_r\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0, & 0 & \dots & C_2\end{vmatrix}$$

für $q=0,\ s=1,\ t=2,\dots\ u=n-3,\ v=r+n-3,\ w=r+n-1$

$$\begin{vmatrix}(\alpha_1^{r-1}\dots\alpha_n), & (\alpha_1^{r+1}\dots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{r-2}\dots\alpha_n), & (\alpha_1^{r}\dots\alpha_n)\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}C_1, & C_3, & C_4 & \dots & C_{r+1}\\ C_0, & C_2, & C_3 & \dots & C_r\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0, & 0, & 0 & \dots & C_2\end{vmatrix}$$

für $q=-r,\ s=-n+1,\ t=-n+2,\dots\ u=-3,\ v=-2,\ w=-1$

wegen $(\alpha_1^{-n}\dots\alpha_n)=\dfrac{-1}{C_n}$

$$(\alpha_1^{-r}\dots\alpha_n)=(-C_n)^{-r+n-1}\begin{vmatrix}C_{n-1}, & C_n & \dots & C_{r-2}\\ C_{n-2}, & C_{n-1} & \dots & C_{r-3}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0, & 0 & \dots & C_{n-1}\end{vmatrix}$$

für $q=-r,\ s=-r+1,\ t=-n+2,\dots\ u=-3,\ v=-2,\ w=-1$

$$\begin{vmatrix}(\alpha_1^{-r}\dots\alpha_n), & (\alpha_1^{-r+1}\dots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{-r-1}\dots\alpha_n), & (\alpha_1^{-r}\dots\alpha_n)\end{vmatrix}=C_n^{-r+n-2}\begin{vmatrix}C_{n-2}, & C_{n-1} & \dots & C_{r-3}\\ C_{n-3}, & C_{n-2} & \dots & C_{r-4}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0, & 0 & \dots & C_{n-2}\end{vmatrix}$$

für $q=-r-1,\ s=-r+1,\ t=-n+2,\dots\ u=-3,\ v=-2,\ w=-1$

$$\begin{vmatrix}(\alpha_1^{-r-1}\dots\alpha_n), & (\alpha_1^{-r+1}\dots\alpha_n)\\ (\alpha_1^{-r-2}\dots\alpha_n), & (\alpha_1^{-r}\dots\alpha_n)\end{vmatrix}=-C_n^{-r+n-3}\begin{vmatrix}C_{n-2}, & C_{n-1} & \dots & C_{r-3}, & C_{r-1}\\ C_{n-3}, & C_{n-2} & \dots & C_{r-4}, & C_{r-2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0, & 0 & \dots & C_{n-2}, & C_n\\ 0, & 0 & \dots & C_{n-3}, & C_{n-1}\end{vmatrix}$$

Diese die C enthaltenden Determinanten geben, abgesehen von Vertauschungen in den Zeilen und Reihen, in die Gleichungen 1) bis 5) eingesetzt, die von Fürstenau zuerst gegebenen Formeln.

§. 11.

Es mögen nun noch an wenigen Beispielen die Resultate des §. 4. gezeigt werden, und zwar sollen solche gewählt werden, bei welchen sich das Gesetz der Annäherung bald erkennen lässt. Wie man bei langsamer Annäherung durch Vertauschung der Variabeln eine raschere

Convergenz erzielen kann, ist von Fürstenau selbst gezeigt worden. Die Berechnung der Divisionscoefficienten geschieht entweder durch einfache Division, oder bequemer mittels der Gleichung f).

1tes Beispiel: $x^3 - 7x + 7 = 0$.

$(0) = 1$	$(-3) = -7^{-1}$
$(1) = 0$	$(-4) = 7.(-3).7^{-1} = -7^{-1}$
$(2) = 7.(0) = 7.1$	$(-5) = 7.(-4).7^{-1} = -7^{-1}$
$(3) = 7.((1)-(0)) = -7.1$	$(-6) = (7.(-5)-(-3)).7^{-1} = -6.7^{-2}$
$(4) = 7.((2)-(1)) = 7^2.1$	$(-7) = (7.(-6)-(-4)).7^{-1} = -5.7^{-2}$
$(5) = 7.((3)-(2)) = -7^2.2$	$(-8) = (7.(-7)-(-5)).7^{-1} = -4.7^{-2}$
$(6) = 7^2.8$	$(-9) = -22.7^{-3}$
$(7) = -7^3.3$	$(-10) = -17.7^{-3}$
$(8) = 7^3.10$	$(-11) = -13.7^{-3}$
$(9) = -7^3.29$	$(-12) = -69.7^{-4}$
$(10) = 7^4.13$	$(-13) = -52.7^{-4}$
$(11) = -7^4.39$	$(-14) = -39.7^{-4}$
$(12) = 7^4.120$	$(-15) = -204.7^{-5}$
$(13) = -7^5.52$	$(-16) = -152.7^{-5}$
$(14) = 7^5.159$	$(-17) = -113.7^{-5}$
$(15) = -7^5.484$	$(-18) = -587.7^{-6}$
$(16) = 7^6.211$	$(-19) = -435.7^{-6}$
$(17) = -7^6.643$	$(-20) = -322.7^{-6}$
$(18) = 7^6.1961$	$(-21) = -1667.7^{-7}$
$(19) = -7^7.854$	$(-22) = -1232.7^{-7}$
$(20) = 7^7.2604$	$(-23) = -910.7^{-7}$

Aus der ersten Reihe sieht man, dass α_3 negativ ist, aus der zweiten dass α_1 positiv ist. Man bildet nun die Reihe der Näherungswerte für α_3 und erhält:

$\frac{(3)}{(2)} = -1$	$(+)$	$\frac{(7)}{(6)} = -\frac{21}{8} = -2{,}625$	$(+)$
$\frac{(4)}{(3)} = -7$	$(-)$	$\frac{(8)}{(7)} = -\frac{10}{3} = -3{,}333\ldots$	$(-)$
$\frac{(5)}{(4)} = -2$	$(+)$	$\frac{(9)}{(8)} = -\frac{29}{10} = -2{,}9$	$(+)$
$\frac{(6)}{(5)} = -4$	$(-)$	$\frac{(10)}{(9)} = -\frac{91}{29} = -3{,}137\ldots$	$(-)$

$$\frac{(11)}{(10)} = -\frac{39}{13} = -3 \quad (+) \qquad \frac{(16)}{(15)} = -\frac{1477}{484} = -3{,}051 \ldots \quad (-)$$

$$\frac{(12)}{(11)} = -\frac{120}{39} = -3{,}076 \ldots (-) \qquad \frac{(17)}{(16)} = -\frac{643}{211} = -3{,}0473 \ldots (+)$$

$$\frac{(13)}{(12)} = -\frac{364}{120} = -3{,}033 \ldots (+) \qquad \frac{(18)}{(17)} = -\frac{1961}{643} = -3{,}0497 \ldots (-)$$

$$\frac{(14)}{(13)} = -\frac{159}{52} = -3{,}057 \ldots (-) \qquad \frac{(19)}{(18)} = -\frac{5978}{1961} = -3{,}04844 \ldots (+)$$

$$\frac{(15)}{(14)} = -\frac{484}{159} = -3{,}044 \ldots (+) \qquad \frac{(20)}{(19)} = -\frac{2604}{854} = -3{,}04918 \ldots (-)$$

Die Werte nähern sich dem wahren Wert abwechselnd von oben und unten, wie die daneben geschriebenen Vorzeichen der Fehler erkennen lassen. Der wahre Wert liegt also zwischen den beiden letzten. Zugleich erkennt man, das α_2 positiv sein muss. Es wäre freilich noch immer möglich, dass es auch einen imaginären Teil besässe, der aber jedenfals so klein ist, dass er bei dieser Annäherung noch keinen Einfluss übt.

Bilden wir nun ebenso die Näherungswerte für α_2. Es ergibt sich

$$\frac{(-3)}{(-4)} = 1 \qquad \frac{(-13)}{(-14)} = \frac{52}{39} = 1{,}333 \ldots$$

$$\frac{(-4)}{(-5)} = 1 \qquad \frac{(-14)}{(-15)} = \frac{273}{204} = 1{,}338 \ldots$$

$$\frac{(-5)}{(-6)} = \frac{7}{6} = 1{,}166 \ldots \qquad \frac{(-15)}{(-16)} = \frac{204}{152} = 1{,}342 \ldots$$

$$\frac{(-6)}{(-7)} = \frac{6}{5} = 1{,}2 \qquad \frac{(-16)}{(-17)} = \frac{152}{113} = 1{,}346 \ldots$$

$$\frac{(-7)}{(-8)} = \frac{5}{4} = 1{,}25 \qquad \frac{(-17)}{(-18)} = \frac{791}{587} = 1{,}347 \ldots$$

$$\frac{(-8)}{(-9)} = \frac{28}{22} = 1{,}27 \ldots \qquad \frac{(-18)}{(-19)} = \frac{587}{435} = 1{,}349 \ldots$$

$$\frac{(-9)}{(-10)} = \frac{22}{17} = 1{,}29 \ldots \qquad \frac{(-19)}{(-20)} = \frac{435}{322} = 1{,}3509 \ldots$$

$$\frac{(-10)}{(-11)} = \frac{17}{13} = 1{,}30 \ldots \qquad \frac{(-20)}{(-21)} = \frac{2254}{1667} = 1{,}3521 \ldots$$

$$\frac{(-11)}{(-12)} = \frac{91}{69} = 1{,}31 \ldots \qquad \frac{(-21)}{(-22)} = \frac{1667}{1232} = 1{,}3530 \ldots$$

$$\frac{(-12)}{(-13)} = \frac{69}{52} = 1{,}32 \ldots \qquad \frac{(-22)}{(-23)} = \frac{1232}{910} = 1{,}3538 \ldots$$

Hier erkennt man sofort, dass sich die Werte einseitig nähern,

dass also auch der letzte Wert zu klein ist. Daraus ergibt sich wieder, dass α_2 positiv ist. Was diesen Wert selbst betrifft, so hat man nach §. 7 und §. 8

$$\frac{\begin{vmatrix}(18), & (19)\\ (17), & (18)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(17), & (18)\\ (16), & (17)\end{vmatrix}} = -7\cdot\frac{(-21)}{(-20)} = -\frac{1667}{322} = -5{,}177 \ldots = \alpha_2\alpha_3,$$

$$\frac{\begin{vmatrix}(19), & (20)\\ (18), & (19)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(18), & (19)\\ (17), & (18)\end{vmatrix}} = -7\cdot\frac{(-22)}{(-21)} = -\frac{1232.7}{1667} = -5{,}173 \ldots = \alpha_2\alpha_3.$$

Beide Werte sind algebraisch zu klein. Man würde daraus finden

$$\frac{\begin{vmatrix}(18), & (19)\\ (17), & (18)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(17), & (18)\\ (16), & (17)\end{vmatrix}}\cdot\frac{(17)}{(18)} = \frac{1667\,.\,643}{322\,.\,1961} = 1{,}6975 \ldots = \alpha_2$$

und

$$\frac{\begin{vmatrix}(19), & (20)\\ (18), & (19)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(18), & (19)\\ (17), & (18)\end{vmatrix}}\cdot\frac{(18)}{(19)} = \frac{1232\,.\,7\,.\,1961}{1667\,.\,5978} = 1{,}69705 \ldots = \alpha_2$$

Von diesen Werten ist der zweite, also auch der erste zu gross. Man findet auch keinen zu kleinen Wert, wenn man von dem Product $\alpha_1\alpha_2$ ausgeht. Man hat zwar

$$\frac{\begin{vmatrix}(-20), & (-19)\\ (-21), & (-20)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(-21), & (-20)\\ (-22), & (-21)\end{vmatrix}} = -7\cdot\frac{(17)}{(18)} = \frac{643\,.\,7}{1961} = 2{,}2952 \ldots = \alpha_1\alpha_2 \text{ zu klein,}$$

und

$$\frac{\begin{vmatrix}(-21), & (-20)\\ (-22), & (-21)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(-22), & (-21)\\ (-23), & (-22)\end{vmatrix}} = -7\cdot\frac{(18)}{(19)} = \frac{1961}{854} = 2{,}2964 \ldots = \alpha_1\alpha_2 \text{ zu gross,}$$

aber die Werte von α_2 werden die nämlichen wie oben.

2tes Beispiel: $x^3+2x^2+3x-1=0$.

$(0)=1$

$(1)=-2(0)=-2$

$(2)=-2(1)-3(0)=1$

$(3)=-2(2)-3(1)+1(0)=5$

$(4)=-2(3)-3(2)+1(1)=-15$

$(5)=-2(4)-3(3)+1(2)=16$

$(6)=\quad 18$

$(7)=-99$

$(8)=\quad 160$

$(9)=-5$

$(10)=-569$

$(11)=\quad 1313$

$(12)=-924$

$(-3)=1$

$(-4)=3(-3)=3$

$(-5)=3(-4)+2(-3)=11$

$(-6)=3(-5)+2(-4)+1(-3)=40$

$(-7)=3(-6)+2(-5)+1(-4)=145$

$(-8)=3(-7)+2(-6)+1(-5)=526$

$(-9)=1908$

$(-10)=6921$

$(-11)=25105$

$(-12)=91065$

$(-13)=330326$

$(-14)=1198213$

Hier zeigt sich sofort, dass α_2 und α_3 ein Paar complexe Wurzeln sind, deren reeller Teil negativ ist, desgleichen dass α_1 positiv ist. Berechne ich das letzte zuerst, so kommt

$$\frac{(-3)}{(-4)}=\frac{1}{3}=0,33\ \dots\qquad(+)$$

$$\frac{(-4)}{(-5)}=\frac{3}{11}=0,2727\ \dots\qquad(-)$$

$$\frac{(-5)}{(-6)}=\frac{11}{40}=0,275\ \dots\qquad(-)$$

$$\frac{(-6)}{(-7)}=\frac{40}{145}=0,27586\ \dots\qquad(+)$$

$$\frac{(-7)}{(-8)}=\frac{145}{526}=0,275665\ \dots\qquad(-)$$

$$\frac{(-8)}{(-9)}=\frac{526}{1908}=0,2756813\ \dots\qquad(-)$$

$$\frac{(-9)}{(-10)}=\frac{1908}{6921}=0,2756827\ \dots\qquad(+)$$

$$\frac{(-10)}{(-11)}=\frac{6921}{25105}=0,27568213\ \dots\qquad(-)$$

$$\frac{(-11)}{(-12)}=\frac{25105}{19065}=0,275682205\ \dots\qquad(+)$$

$$\frac{(-12)}{(-13)}=\frac{91065}{330326}=0,2756822049\ \dots$$

$$\frac{(-13)}{(-14)}=\frac{330326}{1198213}=0,2756822034\ \dots\qquad(-)$$

Die Vorzeichen der Fehler lassen wieder erkennen, dass die beiden andern Wurzeln complex mit negativem reellen Teil sind. Der letzte Näherungswert ist gewiss zu klein, der vorletzte könnte zu klein oder zu gross sein. Für die beiden Wurzeln α_2 und α_3 lässt sich nach §. 8 mit Hülfe der gefundnen Werte von α_1 sofort ein zu grosser und ein zu kleiner Wert von R^2 und $2R\cos\varphi$ angeben. Da es mir aber hier wesentlich um den Wechsel in den Vorzeichen der Fehler zu tun ist, will ich die ganze Reihe hersetzen, und nur vorher noch bemerken, dass wegen $C_n = -1$ hier einfach nach §. 8

$$\begin{vmatrix} (r)(r+1) \\ (r-1)(r) \end{vmatrix} = (-r-3)$$

und

$$\frac{\begin{vmatrix} (r-1), & (r+1) \\ (r-2), & (r) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (r-1), & (r) \\ (r-2), & (r-1) \end{vmatrix}} = (1) - \frac{(-r-1)}{(-r-2)} \text{ ist.}$$

Man hat für R^2			und für $2R\cos\varphi$		
$\frac{11}{3}$	$= 3{,}666\ldots$	$(+)$	$-\frac{7}{3}$	$= -2{,}333\ldots$	$(-)$
$\frac{40}{11}$	$= 3{,}636\ldots$	$(+)$	$-\frac{25}{11}$	$= -2{,}2727\ldots$	$(+)$
$\frac{145}{40}$	$= 3{,}625$	$(-)$	$-\frac{91}{40}$	$= -2{,}275$	$(+)$
$\frac{526}{145}$	$= 3{,}6275\ldots$	$(+)$	$-\frac{330}{145}$	$= -2{,}27586\ldots$	$(-)$
$\frac{1908}{526}$	$= 3{,}62737\ldots$	$(+)$	$-\frac{1197}{526}$	$= -2{,}275665\ldots$	$(+)$
$\frac{6921}{1908}$	$= 3{,}627358\ldots$	$(-)$	$-\frac{4342}{1908}$	$= -2{,}2756813\ldots$	$(+)$
$\frac{25105}{6921}$	$= 3{,}6273659\ldots$	$(+)$	$-\frac{15750}{6921}$	$= -2{,}2756827\ldots$	$(-)$
$\frac{91065}{25105}$	$= 3{,}62736506\ldots$	$(-)$	$-\frac{57131}{25105}$	$= -2{,}27568213\ldots$	$(+)$
$\frac{330326}{91065}$	$= 3{,}62736506\ldots$	$(-)$	$-\frac{207235}{91065}$	$= -2{,}275682205\ldots$	$(-)$
$\frac{1198213}{330326}$	$= 3{,}62736508\ldots$	$(+)$	$-\frac{751717}{330326}$	$= -2{,}2756822049\ldots$	$(-)$

3tes Beispiel: $x^5 - 6x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 5x - 2 = 0.$

$(0) = 1$

$(1) = 6$

(2)=6(1)—3(0)=33

(3)=6(2)—3(1)+8(0)=188

(4)=6(3)—3(2)+8(1)+5(0)=1082

(5)=6(4)—3(3)+8(2)+5(1)+2(0)=6224

(6)=6(5)—3(4)+8(3)+5(2)+2(1)=35779

(7)=205664

(8)=1182225

(9)=6795874

(10)=39065224

(11)=224561400

$(-5)=1.2^{-1}$

$(-6)=2^{-1}.(-5(-5))=-5.2^{-2}$

$(-7)=2^{-1}.(-5(-6)-8(-5))=9.2^{-3}$

$(-8)=2^{-1}.(-5(-7)-8(-6)+3(-5))=47.2^{-4}$

$(-9)=2^{-1}.(-5(-8)-8(-7)+3(-6)-6(-5))=-487.2^{-5}$

$(-10)=2^{-1}.(-5(-9)-8(-8)+3(-7)-6(-6)+(-5))=2047.2^{-6}$

$(-11)=2^{-1}.(-5(-10)-8(-9)+3(-8)-6(-7)+(-6))=-2391.2^{-7}$

$(-12)=-28753.2^{-8}$

$(-13)=230713.2^{-9}$

$(-14)=-828257.2^{-10}$

$(-15)=252361.2^{-11}$

$(-16)=16100751.2^{-12}$

Es ist sonach α_5 positiv, α_1 und α_2 sind complex mit negativem reellen Teil. Als Näherungswerte der α_5 erhalte ich nacheinander

$$\frac{6}{1} = 6 \quad (+)$$

$$\frac{33}{6} = 5{,}5 \quad (-)$$

$$\frac{188}{33} = 5{,}69 \ldots \quad (-)$$

$$\frac{1082}{188} = 5{,}755 \ldots \quad (+)$$

$$\frac{6224}{1082} = 5{,}752 \ldots \quad (+)$$

$$\frac{35779}{6224} = 5{,}7485 \ldots \quad (+)$$

$$\frac{205664}{35779} = 5{,}7481\ \ldots \qquad (-)$$

$$\frac{1182225}{205664} = 5{,}74833\ \ldots \qquad (-)$$

$$\frac{6795874}{1182225} = 5{,}748376\ \ldots \qquad (+)$$

$$\frac{39065224}{6795874} = 5{,}7483737\ \ldots \qquad (+)$$

$$\frac{224561400}{39065224} = 5{,}7483709\ \ldots$$

Aus den Vorzeichen ersieht man, dass α_n und α_3 ein Paar complexer Wurzeln sind mit positivem reellen Teil. Vom letzten Wert ist nicht sicher, dass er zu klein ist.

Um α_1 und α_2 zu berechnen habe ich

$$\begin{vmatrix} (-6), & (-5) \\ (-7), & (-6) \end{vmatrix} = \frac{16}{2^4} = \frac{8}{2^3}$$

$$\begin{vmatrix} (-7), & (-6) \\ (-8), & (-7) \end{vmatrix} = \frac{316}{2^6} = \frac{79}{2^4}$$

$$\begin{vmatrix} (-8), & (-7) \\ (-9), & (-8) \end{vmatrix} = \frac{6592}{2^8} = \frac{824}{2^5}$$

$$\begin{vmatrix} (-9), & (-8) \\ (-10), & (-9) \end{vmatrix} = \frac{140960}{2^{10}} = \frac{8810}{2^6}$$

$$\begin{vmatrix} (-10), & (-9) \\ (-11), & (-10) \end{vmatrix} = \frac{3025792}{2^{12}} = \frac{94556}{2^7}$$

$$\begin{vmatrix} (-11), & (-10) \\ (-12), & (-11) \end{vmatrix} = \frac{64574272}{2^{14}} = \frac{1008973}{2^8}$$

$$\begin{vmatrix} (-12), & (-11) \\ (-13), & (-12) \end{vmatrix} = \frac{1378369792}{2^{16}} = \frac{10768514}{2^9}$$

$$\begin{vmatrix} (-13), & (-12) \\ (-14), & (-13) \end{vmatrix} = \frac{29413614848}{2^{18}} = \frac{114896933}{2^{10}}$$

$$\begin{vmatrix} (-14), & (-13) \\ (-15), & (-14) \end{vmatrix} = \frac{627786694656}{2^{20}} = \frac{1226145888}{2^{11}}$$

$$\begin{vmatrix} (-15), & (-14) \\ (-16), & (-15) \end{vmatrix} = \frac{13399245795328}{2^{22}} = \frac{13085200972}{2^{12}}$$

Man hat demnach als Näherungswerte für R^2

$$\frac{2.8}{79} = 0{,}202 \ldots \quad (+) \qquad \frac{2.1008973}{10768514} = 0{,}18739 \ldots \quad (-)$$

$$\frac{2.79}{824} = 0{,}191 \ldots \quad (+) \qquad \frac{2.10768514}{114896933} = 0{,}18744 \ldots \quad (-)$$

$$\frac{2.824}{8810} = 0{,}1870 \ldots \quad (-) \qquad \frac{2.114896933}{1226145888} = 0{,}187411 \ldots$$

$$\frac{2.8810}{94556} = 0{,}1863 \ldots \quad (-) \qquad \frac{2.1226145888}{13085200972} = 0{,}187409 \ldots$$

$$\frac{2.94556}{1008973} = 0{,}18743 \ldots \quad (+)$$

Hier lässt sich aus den Vorzeichen der Fehler auf die vorhergehenden Wurzeln mit Sicherheit nicht schliessen. Es könnte α_3 positiv sein, es könnten aber auch α_3 und α_4 ein Paar complexer Wurzeln sein. Dass in diesem Fall der reelle Teil positiv ist, ist nur wahrscheinlich, nicht gewiss. Ebenso ist von den beiden letzten Werten nicht mit Sicherheit zu sagen, ob sie zu gross oder zu klein sind.

Für $2R\cos\varphi$ werden die beiden letzten Näherungswerte

$$\frac{\begin{vmatrix}(-14), & (-12)\\ (-15), & (-13)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(-14), & (-13)\\ (-15), & (-14)\end{vmatrix}} = -0{,}5856559 \ldots \qquad \frac{\begin{vmatrix}(-15), & (-13)\\ (-16), & (-14)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(-15), & (-14)\\ (-16), & (-15)\end{vmatrix}} = -0{,}5856556 \ldots$$

Für α_3 und α_4 endlich findet man aus den letzten Werten

$$R'^2 = 1{,}85649 \ldots, \quad 2R'\cos\varphi' = 0{,}83727 \ldots .$$

XV.

Beitrag zur Kenntniss von der Bewegung eines schweren Punktes auf Rotationsflächen mit verticaler Axe.

Von

Theodor Bertram,
Gymnasiallehrer in Bielefeld.

Die folgenden Entwicklungen sollen einen Beitrag liefern zur Kenntniss von der Bewegung eines materiellen Punktes, der gezwungen ist, sich unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer Rotationsfläche zu bewegen, deren Axe vertical steht. Zunächst werden die Bewegungsgleichungen, soweit es möglich ist, allgemein für Rotationsflächen mit verticaler Axe integrirt werden, um dann an der Hand der so gewonnenen Resultate die Bewegung auf dem Rotations-Paraboloid und -Kegel einer eingehenderen Untersuchung zu unterwerfen.

§. 1. Bewegung auf der allgemeinen Rotationsfläche $x^2+y^2-f(z)^2=0$.

Die Gleichung $x^2+y^2-f(z)^2=0$, oder kürzer $F(x,y,z)=0$, stellt eine auf rechtwinklige Coordinaten bezogene Rotationsfläche dar, deren Rotationsaxe zugleich Axe der z ist. Die Meridiancurve hat die Gleichung $r=f(z)$, wenn r die Abscisse in dem Coordinatensysteme eines Meridianschnittes bezeichnet. Die Allgemeinheit der Entwicklung wird nicht beeinträchtigt, wenn wir die Masse des beweglichen Punktes gleich der Einheit setzen; nehmen wir ausserdem die Richtung der Schwerkraft derjenigen der positiven z entgegengesetzt, so sind die allgemeinen Bewegungsgleichungen unseres Punktes bekanntlich gegeben durch folgende Gleichungen:

II. 1) $\frac{d^2x}{dt^2}=N.V.\frac{\partial F}{\partial x}$; 2) $\frac{d^2y}{dt^2}=N.V.\frac{\partial F}{\partial y}$; 3) $\frac{d^2z}{dt^2}=N.V.\frac{\partial F}{\partial z}-g$;

worin N den noch unbekannten Normalwiderstand der Fläche bedeutet und der Kürze halber $V = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$ gesetzt ist.

Da die resultirende beschleunigende Kraft sich in jedem Moment aus der parallel der Axe der z gerichteten Schwerkraft und dem Normalwiderstande der Fläche zusammensetzt, welche für den Fall unserer Rotationsflächen in ihrer Richtung immer diese Axe schneidet, so wird die Resultirende mit der Axe der z immer in einer Ebene liegen. Für die Projection der Bewegung auf die Ebene der xy können wir somit von dem Flächenprincip Gebrauch machen. Dasselbe ergiebt

III. $$xdy - ydx = C.dt; \quad \text{oder} \quad r^2.d\omega = C.dt,$$

wenn C eine noch zu bestimmende Constante, und $[r, \omega]$ die Polarcoordinaten für die Projection der Bahn auf die Ebene der xy bezeichnet.

Da ferner die von dem Normalwiderstande der Fläche geleistete Arbeit in jedem Momente gleich Null ist (sie steht ja senkrecht auf der Bahn des Punktes), so liefert uns das Princip der lebendigen Kraft ein anderes erstes Integral unserer Gleichungen II,

IV. $$v^2 \equiv \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -2gz + C',$$

wenn v die Geschwindigkeit des Punktes und C' eine zweite willkürliche Constante bezeichnet.

Zur Bestimmung der Constanten C und C' genügt die Kenntniss des Bewegungszustandes an einem bestimmten Punkte. Der Punkt $A[x_0, y_0, z_0]$ auf der Fläche $F = 0$ habe die Coordinaten

$$z_0 = h; \quad y_0 = 0; \quad x_0 = f(h);$$

und dort möge der bewegliche Punkt [M möge kurz ihn bezeichnen] eine Geschwindigkeit v_0, in der Richtung der Tangente an den durch A laufenden Parallelkreis, besitzen, so dass, wenn auch die Zeit von dem Momente an gerechnet wird, wo M sich in A befindet, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = v_0$ ist. Dann folgt aus III. $x_0\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} - y_0\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = C = f(h).v_0$; und aus IV. $v_0^2 = -2gz_0 + C'$ oder $C' = 2gh + v_0^2$.

Wir erhalten somit folgende zwei Differentialgleichungen erster Ordnung:

III^a. $$xdy - ydx [\equiv r^2 d\omega] = v_0 . f(h) . dt;$$

IV^a. $$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 [\equiv v^2] = 2g(h-z) + v_0^2.$$

Diese verbinden wir mit der Gleichung der Fläche

$$x^2 + y^2 = f(z)^2,$$

und ihrem ersten Differential

V. $$xdx + ydy = f(z) . f'(z) . dz.$$

$[V]^2 + [III^a]$ giebt

$$(x^2+y^2)[dx^2+dy^2] = f(z)^2 f'(z)^2 . dz^2 + v_0^2 . f(h)^2 . dt^2;$$

oder

$$f(z)^2 \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = f(z)^2 . f'(z)^2 . \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + v_0^2 . f(h)^2;$$

woraus, mit Rücksicht auf IV^a, leicht abgeleitet wird:

VI. $$dt = \mp \sqrt{\frac{1+f'(z)^2}{f(z)^2[2g(h-z)+v_0^2] - v_0^2 f(h)^2}} . f(z)\, dz.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in III^a. findet man dann

VII. $$d\omega = \mp \sqrt{\frac{1+f'(z)^2}{f(z)^2[2g(h-z)+v_0^2] - v_0^2 f(h)^2}} \cdot \frac{v_0 . f(h)}{f(z)} . dz.$$

Für das Bogendifferential der Bahn folgt aus IV^a. und VI. mit Rücksicht auf $v = \frac{ds}{dt}$,

VIII. $$ds = \mp \sqrt{\frac{[1+f'(z)^2][2g(h-z)+v_0^2]}{f(z)^2[2g(h-z)+v_0^2] - v_0^2 . f(h)^2}} . f(z)\, dz.$$

Auch der Winkel, den die Tangente an einem Punkte der Bahn mit der Tangente des zugehörigen Parallelkreises bildet, lässt sich leicht bestimmen. In dem Elementardreieck RPQ, sei PR ein Element der Bahncurve ds; PQ sei der durch P laufende Parallelkreis, und QR der durch R bestimmte Meridian irgend einer Rotationsfläche. Da in Q die Parallelkreise und Meridiane sich senkrecht schneiden, so ist

$$\cos QPR = \frac{QP}{PR}, \quad \text{d. h.} \quad \cos\tau = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\frac{d\sigma}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$$

wenn $d\sigma$ das Bogendifferential des Parallelkreises bezeichnet. Nun ist

$$\frac{d\sigma}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt}; \quad \text{und} \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(h-z)+v_0^2};$$

aus III^a. folgt aber

$$r \cdot \frac{d\omega}{dt} = \frac{v_0 \cdot f(h)}{r} = \frac{v_0 \cdot f(h)}{f(z)};$$

also

IX. $$\cos\tau = \frac{v_0 \cdot f(h)}{f(z)\sqrt{2g(h-z)+v_0^2}}.$$

Durch die bisher gefundenen Ausdrücke ist es möglich, alle wesentlichen Elemente der Bahn durch einfache Quadraturen zu finden, sobald die Function $f(z)$ specialisirt ist. Ist $f(z)$ aber eine transcendente Function, so bieten sich der Integration zu grosse Hindernisse; ja schon bei algebraischer Form von $f(z)$ werden die Integrale als Argument eine Quadratwurzel aus einem Polynom 5ten und höheren Grades der Variabelen enthalten, wenn $f(z)^2$ ein Binom nur vom 2ten Grade mit zwei verschiedenen Parametern ist.

Die einzige Fläche, welche ein algebraisches Integral ergiebt, ist die Cylinderfläche

$$x^2+y^2 = a^2;$$

man findet aus VI. und VII. leicht durch Einführung der Werte $f(z) = a$; $f'(z) = 0$:

$$[a.\omega]^2 = 2.\frac{v_0^2}{g}(h-z),$$

woraus ersichtlich, dass die durchlaufene Bahn bei der Abwicklung des Cylinders auf einer Ebene eine Parabel darstellt.

Die Kugel

$$x^2+y^2 = a^2-z^2$$

hat wegen ihrer praktischen Bedeutung für das Pendel schon ausreichende Untersuchungen gefunden. Aber schon für diese Fläche werden jene Quadraturen elliptische Integrale. Letzteres gilt auch von dem Rotations-Paraboloide und -Kugel, wie wir im folgenden sehen werden. Die übrigen Rotationsflächen 2ten Grades führen schon zu höheren Transcendenten.

§. 2. Bewegung auf dem Rotations-Paraboloid.

Die Gleichung eines Rotations-Paraboloides dessen Rotationsaxe zur Axe der z, und dessen Scheitel zum Coordinaten-Anfang genommen wird, ist

$$x^2+y^2 = 2az;$$

so dass die Function $f(z)$ in den Formeln des §. 1. zu ersetzen ist durch $\sqrt{2az}$; also $f'(z) = \sqrt{\frac{a}{2z}}$. Es ergiebt sich daraus für die Componente der Geschwindigkeit des beweglichen Punktes genommen nach der Axe der z der Ausdruck:

$$\text{I.} \qquad \frac{dz}{dt} = \mp\sqrt{2g}\sqrt{\frac{(h-z)\left(z-\frac{v_0^2}{2g}\right)}{z+\frac{a}{2}}}.$$

Das doppelte Vorzeichen weist schon darauf hin, dass die Bewegung eine auf- und absteigende sein wird, und veranlasst die Bestimmung der Höhe und Tiefe, zwischen denen das Steigen und Fallen stattfindet.

Die Geschwindigkeitscomponente $\frac{dz}{dt}$ wird Null für die beiden Werte

$$z = h, \quad \text{und} \quad z = \frac{v_0^2}{2g};$$

sehen wir also zu, welche Richtung die Beschleunigungscomponente $\frac{d^2z}{dt^2}$ für diese beiden Werte erhält. Es ist aber

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \mp\sqrt{2g}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{z+\frac{a}{2}}{(h-z)\left(z-\frac{v_0^2}{2g}\right)}}$$

$$\times\frac{\left(z+\frac{a}{2}\right)\left(h-z+\frac{v_0^2}{2g}-z\right)-(h-z)\left(z-\frac{v_0^2}{2g}\right)}{\left(z+\frac{a}{2}\right)^2}\cdot\frac{dz}{dt},$$

$$= +g\left\{\frac{\frac{v_0^2}{2g}-z}{z+\frac{a}{2}}+\frac{h-z}{\left(z+\frac{a}{2}\right)^2}\left(\frac{a}{2}+\frac{v_0^2}{2g}\right)\right\};$$

woraus unmittelbar folgt, dass

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_{z=h} = g\cdot\frac{\frac{v_0^2}{2g}-h}{h+\frac{a}{2}} \gtrless 0, \quad \text{je nachdem} \quad v_0 \gtrless \sqrt{2gh},$$

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_{z=\frac{v_0^2}{2g}} = g \cdot \frac{\left(h - \frac{v_0^2}{2g}\right)}{\frac{v_0^2}{2g} + \frac{a}{2}} \lesseqgtr 0, \text{ je nachdem } v_0 \gtrless \sqrt{2gh}.$$

Da die Geschwindigkeitcomponente $\frac{dz}{dt}$ aber für keinen anderen Wert von z zu Null wird, so ersieht man aus diesen Resultaten, dass der bewegliche Punkt, wenn $v_0 > \sqrt{2gh}$, von dem tiefsten Punkte $z = h$ bis zum höchsten $z = \frac{v_0^2}{2g}$ steigen, dann eine fallende Bewegung annehmen wird, bis er wieder zum tiefsten Punkte gelangt ist, um von da die Bewegung in derselben Weise zu wiederholen. Ist dagegen $v_0 < \sqrt{2gh}$, so beginnt die Bewegung in $z = h$ aus dem höchsten Punkte, fällt bis zum tiefsten Punkte $z = \frac{v_0^2}{2g}$, und steigt dann wieder bis $z = h$.

Der bewegliche Punkt oscillirt bei seiner Bewegung zwischen den beiden horizontalen Ebenen $z = h$ und $z = \frac{v_0^2}{2g}$. Da die Geschwindigkeit

$$v^2 = 2g(h - z) + v_0^2$$

für keinen Wert von z zwischen den Grenzen $\Big|_h^{\frac{v_0^2}{2g}}$ zu Null wird, so wird die Bewegung nie aufhören können.

Der Fall $v_0 = \sqrt{2gh}$ erledigt sich nach dem Vorhergehenden von selbst; denn er sagt aus, dass die beiden Grenzebenen $\left[h = \frac{v_0^2}{2g}\right]$ zusammenfallen; d. h. der bewegliche Punkt muss sich immer in derselben Horizontalebene bewegen, er beschreibt den durch $z = h = \frac{v_0^2}{2g}$ bestimmten Parallelkreis. Die Geschwindigkeit $v^2 = 2g(h - z) + v_0^2$ bleibt in diesem Falle constant v_0. Die Dauer eines Umlaufes findet sich also zu

$$T = \frac{2\pi . \sqrt{2ah}}{v_0} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Es verschwindet die Höhe (h) ganz aus diesem Ausdruck, und wir haben das merkwürdige Resultat, dass die Umlaufszeit (T) auf dem Rotations-Paraboloide für alle Höhen (h) dieselbe bleibt. Es ist diese Fläche aber auch die einzige, welche diese Eigenschaft besitzt; wie man leicht durch folgende Betrachtung einsieht. Es ist

$$T = \frac{\text{Parallelkreis}}{v_0} = \frac{2\pi . x}{\sqrt{2g.z}};$$

es ist aber dieser Ausdruck constant nur für $x^2 = z$ Const., d. h. die Meridiancurve muss eine Parabel sein.

Noch eine Bemerkung über das Vorzeichen der Constanten a in der Gleichung $x^2+y^2 = 2az$ möge hier Platz greifen. Dasselbe ist stillschweigend als positiv angenommen, d. h. das Paraboloid mit seiner concaven Seite nach oben gerichtet, also ganz auf der positiven Seite der z vorausgesetzt. Sollte $a < 0$ sein, so würden nicht alle bis jetzt gemachten Schlüsse stichhaltig sein; es würde h auch negativ sein müssen. Eine einfache Zerlegung der wirkenden Kräfte (die Beschleunigung und Centrifugalkraft) in ihre Componenten längs Flächennormale und in der Tangentialebene zeigt aber schon für für diesen Fall, dass der bewegliche Punkt beständig f a l l e n muss. Die Bahn würde somit sich nach unten in's Unendliche ersrecken; da besondere Eigentümlichkeiten ihr fehlen würden, so mag dieser Fall von der weiteren Untersuchung ausgeschlossen bleiben.

Zur Vereinfachung wollen wir die beiden die Grenzebenen bestimmenden Werte von z so bezeichnen, dass $z = \gamma$ immer die obere, $z = \beta$ die untere Ebene bestimmt; so dass also

$$z = \frac{v_0^2}{2g} = \begin{cases} \gamma \text{ wenn } v_0 > \sqrt{2gh} \\ \beta \quad \text{,,} \quad v < \sqrt{2gh} \end{cases}, \quad z = h = \begin{cases} \beta \text{ wenn } v_0 > \sqrt{2gh} \\ \gamma \quad \text{,,} \quad v_0 < \sqrt{2gh} \end{cases};$$

Setzen wir ausserdem $-\frac{a}{2} = \alpha$, so erscheint die Formel I. in folgender Gestalt:

$$\text{II.} \quad dt = \pm \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{(z-\alpha)\,dz}{\sqrt{-(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}}; \quad [\alpha < \beta < \gamma]$$

Die Zeit t ist hierdurch als ein elliptisches Integral der Variabelen z gegeben, deren Grenzen $z\Big|_\beta^\gamma$ sind.

Führen wir folgende Substitution ein:

$$z = \frac{\beta - \alpha . k^2 \sin^2\varphi}{1 - k^2 \sin^2\varphi}, \quad \text{worin } k^2 = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}$$

so erhalten wir, wenn $1 - k^2 \sin^2\varphi = \varDelta^2\varphi$ gesetzt wird:

$$\text{III.} \qquad dt = \mp \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{2(\beta - \alpha)}{\sqrt{\gamma - \alpha}} \cdot \frac{d\varphi}{\varDelta^3\varphi}.$$

Hierin entsprechen sihh die Grenzen der verschiedenen Variabelen in folgender Weise:

$$z\Big|_{\beta}^{\gamma} \ldots \sin^2\varphi\Big|_{0}^{1} \ldots \varphi\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

Führt man die bekannte Bezeichnungsweise ein:

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad \varphi = am u, \quad E(u) = \int_0^{\varphi} \Delta\varphi . d\varphi, \quad k'^2 = 1 - k^2,$$

so gilt folgende Relation *):

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta^3\varphi} = \frac{1}{k'^2} \left\{ E(u) - k^2 . \frac{\sin am u . \cos am u}{\Delta am u} \right\}.$$

Integriren wir also III. von $z = \beta$ bis $z = z_1$, so erhalten wir die Zeit t_1, welche vom Beginn der aufsteigenden Bewegung von der unteren Grenzebene aus, bis dahin verflossen ist, wo der bewegliche Punkt bis zur Höhe $z = z_1$ gestiegen ist, in der Formel:

IV. $$t_1 = 2\sqrt{\frac{\gamma - \alpha}{2g}} . \left\{ E(u_1) - k^2 . \frac{\sin am u_1 \cos am u_1}{\Delta am u_1} \right\}.$$

Es ist hierbei nur das positive Vorzeichen zu berücksichtigen, weil $\frac{dz}{dt}$ für die aufsteigende Bewegung positiv ist. Die Grenzen der Variabelen entsprechen sich in folgender Weise

$$z\Big|_{\beta}^{z_1} \ldots \varphi\Big|_{0}^{\varphi_1} \ldots u\Big|_{0}^{u_1}.$$

Eine zweite Substitution:

$$z = \gamma - (\gamma - \beta)\sin^2\psi,$$

für welche ebenfalls $k^2 = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}$ sein möge, transformirt II. in

V. $$dt = \mp \frac{1}{\sqrt{2g}} \left\{ -2\sqrt{\gamma - \alpha} . \Delta\psi . d\psi \right\};$$

die entsprechenden Grenzen sind

*) Durège: Theorie der elliptischen Functionen § 22.

$$z\Big|_{\gamma}^{\beta} \ldots \sin^2\psi\Big|_{0}^{1} \ldots \psi\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

es wächst also ψ bei abnehmenden z. Integriren wir nun von $z=\gamma$ bis $z=z_2$, so erhalten wir die Zeit t_2 von Beginn der fallenden Bewegung von der oberen Grenzebene aus, bis zu dem Moment, wo der bewegliche Punkt bis zur Tiefe $z=z_2$ gefallen ist, in der Formel:

$$\text{VI.} \qquad t_2 = 2\sqrt{\frac{\gamma-\alpha}{2g}}\,.\,E(u_2).$$

Hier war das negative Vorzeichen zu berücksichtigen, weil $\frac{dz}{dt}$ für die fallende Bewegung negativ ist. Die entsprechenden Grenzen sind

$$z\Big|_{\gamma}^{z_2} \ldots \psi\Big|_{0}^{\psi_2} \ldots u\Big|_{0}^{u_2}.$$

Aus den beiden Gleichungen IV. und VI. lassen sich für die Bewegung des Punktes wichtige Resultate herleiten.

Zunächst geben beide für die Zeit, welche der bewegliche Punkt gebraucht, einmal um von der unteren zur oberen Grenzebene zu steigen, das andere mal um von der oberen zur unteren zu fallen, denselben Wert. Denn es entsprechen diesen Fällen folgende Integrationsgrenzen

$$\text{für IV. } z\Big|_{\beta}^{\gamma} \ldots \varphi\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ldots u\Big|_{0}^{K}, \quad \text{für V. } z\Big|_{\gamma}^{\beta} \ldots \varphi\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ldots u\Big|_{0}^{K},$$

wo $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$; und weil $\cos am K = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, so folgt aus IV., wie aus VI. unmittelbar (wenn $E(K)$ kurz durch E bezeichnet wird)

$$\text{VII.} \qquad T = 2\sqrt{\frac{\gamma-\alpha}{2g}}\,.\,E.$$

Wenn ferner der bewegliche Punkt von irgend einer Höhe ausgehend, nachdem er einmal die obere und einmal die untere Grenzebene passirt, wieder zu derselben Höhe gelangt ist, d. h. wenn z alle Werte von β bis γ einmal aufsteigend und einmal fallend durchlaufen, so wird das Argument u um $2K$ wachsen. Führen wir dies ein, und berücksichtigen die Relationen:

$$\sin am(u+2K) = -\sin amu; \quad \cos am(u+2K) = -\cos amu;$$
$$\varDelta am(u+2K) = \varDelta amu, \quad E(u+2K) = E(u)+2E;$$

so erhalten wir für die Zeit t', welche der bewegliche Punkt gebraucht, um von der zur Zeit t inne gehabten Höhe z_1 aus, nach einem vollständigen Auf- und Absteigen wieder zur selben Höhe z_1 zu gelangen, aus beiden Eormeln IV. und VI.:

$$t' = t+2T;$$

d. h. das Steigen und Fallen des beweglichen Punktes geht periodisch vor sich; die Dauer einer solchen Periode ist $2T$.

Untersuchen wir noch die Zeiten, welche der bewegliche Punkt gebraucht, einmal um von der unteren Grenzebene bis zur Höhe $z = z_1$ zu steigen, das andere mal um von der oberen bis zur gleichen Tiefe $z = z_1$ zu fallen.

Für das nämliche z geben die beiden angewandten Substitutionsformeln:

$$z = \frac{\beta - \alpha k^2 \sin^2\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi} = \gamma - (\gamma-\beta)\sin^2\psi;$$

hieraus folgt nach einigen Reductionen

$$\cos^2\psi = \sin^2\varphi[1-k^2\sin^2\psi], \quad \text{oder} \quad \sin\varphi = \frac{\cos\psi}{\varDelta\psi};$$

durch Differentiation folgt

$$\cos\varphi\, d\varphi = -k'^2 \frac{\sin\psi}{\varDelta^3\psi} d\psi,$$

und da

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = k' \frac{\sin\psi}{\varDelta\psi}, \quad \text{und} \quad \varDelta\varphi = \frac{k'}{\varDelta\psi};$$

so folgt:

$$\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} = -\frac{d\psi}{\varDelta\psi}.$$

Da die entsprechenden Grenzen $\varphi\Big|_0^{\varphi_1} \ldots \psi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\psi_1}$ sind, so ist

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\psi_1} \frac{d\psi}{\varDelta\psi} = \int_{\psi_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\varDelta\psi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\varDelta\psi} - \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi}{\varDelta\psi},$$

d. h. $u_1 = K - u_2$ für $z = z_1 = z_2$. Setzen wir daher in VI. für u_2 das Argument $K - u_1$ ein, so erhalten wir den Wert von t_2, welcher der Höhe $z = z_1$ entspricht. Nun ist aber

$$E(K-u) = E - E(u) + k^2 . \frac{\sin amu . \cos amu}{\Delta amu},$$

folglich

$$t_2 = T - t_1;$$

d. h. der bewegliche Punkt braucht dieselbe Zeit, ob er nun von der $\left\{\begin{matrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{matrix}\right\}$ Grenzebene $\left\{\begin{matrix}\text{fällt}\\ \text{steigt}\end{matrix}\right\}$ bis zur Höhe $z = z_1$, oder ob er von der Höhe $z = z_1$ bis zur $\left\{\begin{matrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{matrix}\right\}$ Grenzebene $\left\{\begin{matrix}\text{steigt}\\ \text{fällt}\end{matrix}\right\}$. Das Steigen und Fallen geht symmetrisch in Bezug auf jede Grenzebene vor sich.

Gehen wir nun zur Untersuchung des Winkels ω über. Aus $r^2 d\omega = v_0\sqrt{2ah}.dt$ und $r^2 = 2az$, folgt unmittelbar mit Rücksicht auf den Wert von dt in II.:

$$d\omega = \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{v_0^2 . h}{a . g}} . \frac{z-\alpha}{z} . \frac{dz}{\sqrt{-(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}}.$$

Berücksichtigen wir, dass

$$\frac{v_0^2 . h}{a . g} = \frac{v_0^2}{2g} h . \frac{1}{\frac{a}{2}} = \frac{\beta . \gamma}{-\alpha},$$

so ergeben sich uns durch Anwendung der beiden oben schon eingeführten Substitutionen:

VIII. $$d\omega = \mp \sqrt{\frac{\beta . \gamma}{-\alpha}} . \frac{\beta - \alpha}{\beta\sqrt{\gamma - \alpha}} . \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\beta} k^2 \sin^2\varphi} . \frac{d\varphi}{\Delta\varphi};$$

IX. $$d\omega = \mp \sqrt{\frac{\beta . \gamma}{-\alpha}} . \frac{-\sqrt{\gamma - \alpha}}{\gamma} . \frac{\Delta\psi . d\psi}{1 - \frac{\gamma - \beta}{\gamma} \sin^2\psi};$$

Integriren wir die Gleichung VIII. von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi_1$, so entspricht dies einer steigenden Bewegung des Punktes von $z = \beta$ bis $z = z_1$, wir haben somit das positive Zeichen zu nehmen. Bei der Gleichung IX. würde dagegen das negative Zeichen zu wählen sein, wenn wir integriren wollten zwischen den Grenzen $\psi \Big|_0^{\psi_2}$, da diesen

die fallende Bewegung des Punktes von $z=\gamma$ bis $z=z_2$ entsprechen würde. Der Winkel w wird selbstverständlich immer vom Ausgangspunkt der Bewegung an gerechnet.

Bezeichnen wird kurz $-\frac{\alpha}{\beta}k^2$ und $-\frac{\gamma-\beta}{\gamma}$ beziehungsweise mit m und n, so ist die nächste Aufgabe, die beiden Integrale

$$\int_0^{\varphi_1}\frac{1}{1+m\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},\quad\text{und}\quad\int_0^{\psi_2}\frac{\Delta\psi\,.\,d\psi}{1+n\sin^2\psi}$$

auf die Normalform zu reduciren.

Das erste verwandelt sich durch die Identität $\frac{1}{1+m\sin^2\varphi}=1-\frac{m\sin^2\varphi}{1+m\sin^2\varphi}$,

$$\int_0^{\varphi_1}\frac{1}{1+m\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}-\int_0^{\varphi_1}\frac{m\sin^2\varphi}{1+m\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Setzen wir $m=-k^2\sin amA$, so wird durch Einführung von $\varphi_1=amu_1$

$$\int_0^{\varphi_1}\frac{1}{1+m\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=u_1+\int_0^{u_1}\frac{k^2.\sin^2amA.\sin^2amu_1}{1-k^2\sin^2amA.\sin^2amu_1}\cdot du_1$$

$$=u_1+\frac{\operatorname{tang}amA}{\Delta amA}\cdot\int_0^{u_1}\frac{k^2.\sin amA.\cos amA.\,\Delta amA.\sin^2amu_1}{1-k^2\sin^2amA.\sin^2amu_1}.du_1;$$

oder nach Jacobi's Bezeichnung

$$\int_0^{\varphi_1}\frac{1}{1+m\sin^2\varphi}=u_1+\frac{\operatorname{tang}amA}{\Delta amA}.\Pi(u_1,A).$$

Das zweite Integral wird durch folgende Identitäten reducirt:

$$\frac{\Delta\psi.d\psi}{1+n\sin^2\psi}=\frac{1+n\sin^2\psi-(n+k^2)\sin^2\psi}{1+n\sin^2\psi}\cdot\frac{d\psi}{\Delta\psi}$$

$$=\frac{d\psi}{\Delta\psi}-\frac{n+k^2}{n}\cdot\frac{n\sin^2\psi}{1+n\sin^2\psi}\cdot\frac{d\psi}{\Delta\psi}$$

Setzen wir $n=-k^2\sin^2amB$, und führen $\psi_2=amu_2$ ein, so wird

$$\int_0^{\psi_2}\frac{\Delta\psi\,d\psi}{1+n\sin^2\psi}=u_2+\frac{n+k^2}{n}\cdot\frac{\operatorname{tang}amB}{\Delta amB}.\Pi(u_2,B).$$

Nun ist

$$m = -\frac{\alpha}{\beta}k^2 = -k^2 \sin^2 am A$$

also

$$\operatorname{tang}^2 am A = \frac{\alpha}{\beta-\alpha};$$

$$\Delta^2 am A = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha},$$

und ebenso

$$n = -\frac{\gamma-\beta}{\gamma} = -k^2 \sin^2 am B$$

also

$$\operatorname{tang}^2 am B = \frac{\gamma-\alpha}{\alpha}$$

$$\Delta^2 am B = \frac{\beta}{\gamma}; \quad \frac{n+k^2}{n} = \frac{-\alpha}{\gamma-\alpha}.$$

Es lassen sich also die Integrale von VIII. und IX. folgendermassen ausdrücken (da $\frac{1}{i} = -i$):

VIII′. $$\omega_1 = \sqrt{\frac{\beta.\gamma}{-\alpha}} \frac{\beta-\alpha}{\beta\sqrt{\gamma-\alpha}} . u_1 + i . \Pi(u_1, A);$$

IX′. $$\omega_2 = \sqrt{\frac{\beta.\gamma}{-\alpha}} . \frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{\gamma} . u_2 - i . \Pi(u_2, B).$$

Noch sind die Parameter A und B zu discutiren. Aus den Substitutionen

$$-\frac{\gamma-\beta}{\gamma} = -k^2 \sin^2 am B, \quad -\frac{\alpha}{\beta}k^2 = -k^2 \sin^2 am A$$

geht hervor, dass A und B nicht reell sein können, weil weder $-\frac{\gamma-\beta}{\gamma}$ noch $-\frac{\alpha}{\beta}k^2$ zwischen den Grenzen 0 und $-k^2$ liegt. Es ist $-\frac{\alpha}{\beta}k^2$ stets positiv, und $-\frac{\gamma-\beta}{\gamma}$ zwar negativ aber dem absoluten Werte nach grösser als k^2. Wir müssen demnach setzen

$$A = iA, \quad \text{und} \quad B = K + iB.$$

Es ist aber leicht zu zeigen, dass $B = -A$ sein muss. Denn $-\frac{\alpha}{\beta}k^2$ und $-\frac{\gamma-\beta}{\gamma}$ sind die negativen reciproken Werte von $\sin^2\varphi$ und $\sin^2\psi$ die demselben Werte von z, nämlich $z = 0$, entsprechen; wie unmittelbar an den Substitutionsformeln ersichtlich. Für solche Werte haben wir aber oben nachgewiesen, dass die Argumente die Relation

$$u_2 = K - u_1$$

erfüllen müssen. Das ist für iA und $K + iB$ nur dann möglich, wenn $B = -A$. Bezeichnen wir die constanten Coefficienten kurz, wie folgt:

$$C = \sqrt{\frac{\beta\gamma}{-\alpha}} \cdot \frac{\beta - \alpha}{\beta\sqrt{\gamma - \alpha}} \quad \text{und} \quad C' = \sqrt{\frac{\beta\gamma}{-\alpha}} \cdot \frac{\sqrt{\gamma - \alpha}}{\gamma},$$

so haben wir

$$\left.\begin{array}{ll} \text{X.} & \omega_1 = Cu_1 + i\,\Pi(u_1, iA) \\ \text{XI.} & \omega_2 = C'u_2 - i\,\Pi(u_2, K - iA) \end{array}\right\} \quad \text{worin } \sin^2 am\, iA = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Zur weiteren Untersuchung führen wir die beiden Functionen $Z(u)$ und $\Theta(u)$ ein, welche mit dem Integrale Π durch folgende Relation verbunden sind:

$$\Pi(u, a) = uZ(a) + \tfrac{1}{2}\lg\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)},$$

und ausserdem noch die Eigenschaften besitzen, dass

$$\Theta(u) = \Theta(-u); \quad \Theta(u+K) = \Theta(u-K);$$
$$\Theta(u-2K) = \Theta(u) = \Theta(u+2K);$$
$$Z(-u) = -Z(u); \quad Z(0) = Z(K) = 0; \quad Z(u) = Z(u+2K);$$
$$Z(K+u) = -Z(K-u).$$

Die Gleichungen X. und XI. werden dadurch zu

$$\omega_1 = [C + iZ(iA)]\,u_1 + \tfrac{1}{2}i\lg\frac{\Theta(u_1 - iA)}{\Theta(u_1 + iA)};$$

$$\omega_2 = [C' - iZ(K - iA)]\,u_2 - \tfrac{1}{2}i\lg\frac{\Theta(u_2 - K + iA)}{\Theta(u_2 + K - iA)}.$$

Für die Coefficienten von u_1 und u_2 erhält man Umformungen durch die Relationen

$$iZ(iA) = -\operatorname{tang} am(A, k').\Delta am(A, k') + \frac{\pi A}{2K.K'} + Z(A, k');$$

$$iZ(K - iA) = +k'^2\frac{\sin am(A, k').\cos am(A, k')}{\Delta am(A, k')} - \frac{\pi A}{2K.K'} - Z(A, k').$$

Es ist nämlich

$$\operatorname{tang} am(A, k').\Delta am(A, k') = \sqrt{\frac{-\alpha\gamma}{\beta(\gamma - \alpha)}}$$

und

$$k'^2\frac{\sin am(A, k').\cos am(A, k')}{\Delta am(A, k')} = \sqrt{\frac{-\alpha\beta}{\gamma(\gamma - \alpha)}},$$

wie leicht aus $\sin^2 am(K - iA) = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma}$ gefunden wird.

Mit Rücksicht hierauf wird

$$C+iZ(iA)=\sqrt{\frac{\beta\gamma}{-\alpha}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma-\alpha}}+\frac{\pi A}{2K.K'}+Z(A,k')=C'-iZ(K-iA).$$

Bezeichnen wir diesen Wert kurz durch P, so werden unsere Gleichungen X. und XI. folgende Gestalt annehmen:

X'. $$\omega_1=P.u_1+\tfrac{1}{2}i\lg\frac{\Theta(u_1-iA)}{\Theta(u_1+iA)};$$

XI'. $$\omega_2=P.u_2-\tfrac{1}{2}i\lg\frac{\Theta(u_2-K+iA)}{\Theta(u_2+K-iA)}.$$

In dieser Form lassen sie unmittelbar mehrere Eigentümlichkeiten der Bahn unseres beweglichen Punktes erkennen.

Erstens nämlich ist der vom Radiusvector beschriebene Winkel Ω, wenn der bewegliche Punkt von der unteren zur oberen Grenzebene steigt, derselbe als wenn er von der oberen zur unteren fällt. Denn beide Gleichungen geben für das Argument $u=K$ den Wert

XII. $$\Omega=P.K.$$

Lassen wir ferner das Argument um $2K$ wachsen, so erhalten wir mit Rücksicht auf die oben angeführten Relationen der Θ-Functionen:

$$\omega'=\omega+2\Omega;$$

d. h. der Winkel ω wächst in Perioden, und zwar entspricht der früher schon gefundenen Periode $2T$ der Winkel 2Ω.

Um den Winkel zu finden, den der Radiusvector beschreibt, einmal wenn der bewegliche Punkt von der $\left\{\begin{matrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{matrix}\right\}$ Grenzebene $\left\{\begin{matrix}\text{fällt}\\ \text{steigt}\end{matrix}\right\}$ bis zur Höhe $z=z_1$, das andere mal wenn er von dieser Höhe $z=z_1$ zur $\left\{\begin{matrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{matrix}\right\}$ Grenzebene $\left\{\begin{matrix}\text{steigt}\\ \text{fällt}\end{matrix}\right\}$, bedienen wir uns der oben gefundenen Relation $u_1=K-u_2$. Dieselbe in X'. eingesetzt ergiebt

$$\omega_1=\Omega-\omega_2;$$

dies Resultat sagt aus, dass das Wachsen des Winkels ω symmetrisch zu jeder Grenzebene vor sich geht; der Radiusvector beschreibt in beiden eben gesuchten Fällen denselben Winkel.

Eine zur Beurteilung der Abhängigkeit des Winkels w von der

Zeit t sehr vorteilhafte Umformung von X'. und XI'. lässt sich leicht mit Hülfe der Relation

$$u = \frac{K}{E}[E(u) - Z(u)]$$

vornehmen; es wird dadurch

$$\omega_1 = \frac{PK}{E}\left[E(u_1) - k^2 \frac{\sin am\, u_1 . \cos am\, u_1}{\varDelta am\, u_1}\right]$$

$$+ \left[\tfrac{1}{2} i \lg \frac{\Theta(u_1 - iA)}{\Theta(u_1 + iA)} + \frac{PK}{E}\left\{k^2 \frac{\sin am\, u_1 . \cos am\, u_1}{\varDelta am\, u_1} - Z(u_1)\right\}\right],$$

$$\omega_2 = \frac{PK}{E} E(u_2) - \left[\tfrac{1}{4} i \lg \frac{\Theta(u_2 - K + iA)}{\Theta(u_2 + K - iA)} + \frac{PK}{E} Z(u_2)\right]$$

oder mit Rücksicht auf IV., VI., VII., XII.

$$\omega_1 = \frac{\Omega}{T} t + \left[\tfrac{1}{2} i \lg \frac{\Theta(u_1 - iA)}{\Theta(u_1 + iA)} + \frac{PK}{E}\left\{k^2 \frac{\sin am\, u_1 . \cos am\, u_1}{\varDelta am\, u_1} - Z(u_1)\right\}\right],$$

$$\omega_2 = \frac{\Omega}{T} t - \left[\tfrac{1}{2} i \lg \frac{\Theta(u_2 - K + iA)}{\Theta(u_2 + K - iA)} + \frac{PK}{E} Z(u_2)\right].$$

In beiden Gleichungen haben wir dasselbe Glied $\frac{\Omega}{T} t$, welches der Zeit t proportional ist; dazu kommt noch ein periodisch wachsendes und abnehmendes Glied. Für $u = 0, K, 2K, \ldots$ verschwindet das periodische Glied. Denken wir uns nun die Meridianebene des z. B. in der unteren Grenzebene liegenden Ausgangspunktes der Bewegung gleichzeitig mit dem beweglichen Punkte, nach derselben Richtung hin, mit der constanten Geschwindigkeit $\frac{\Omega}{T}$, in Bewegung gesetzt, so wird der bewegliche Punkt anfangs der Ebene vorauseilen, seine Geschwindigkeit wird sich aber immer mehr verringern, so dass er bei seiner Ankunft in der oberen Grenzebene von der Meridianebene wieder eingeholt wird. Von da aus wiederholt sich symmetrisch das Umgekehrte, der Punkt bleibt anfangs zurück, mit wachsender Geschwindigkeit jedoch eilt er der Ebene nach, um sie in der unteren Grenzebene wieder zu erreichen. Das periodische Glied giebt immer den Winkel $\varDelta\omega$ an, um welchen der Radiusvector von der beweglichen Meridianebene absteht. Auch von diesem Winkel lässt sich unmittelbar durch Vergrösserung des Argumentes um $2K$ und durch Anwendung der Relation $u_2 = K - u_1$ nachweisen, dass diese Differenzen $\varDelta\omega$ periodisch nach $2T$ sich wiederholen, und ihrer Grösse nach symmetrisch gegen die beiden Grenzebenen verteilt sind. Letzteres wird sofort ersichtlich durch Anwendung der Gleichung

$$Z(K-u) = k^2 \frac{\sin am u . \cos am u}{\Delta am u} - Z(u).$$

Der Winkel τ zwischen der Bahn- und Parallelkreistangente ergiebt sich aus IX. §. 1. unmittelbar durch Einsetzen der Werte $f(z) = \sqrt{2az}$ und $f(h) = \sqrt{2ah}$, nämlich

$$\cos\tau = \sqrt{\frac{\frac{v_0^2}{2g} h}{z\left(h+\frac{v_0^2}{2g}-z\right)}} = \sqrt{\frac{\beta\gamma}{z(\beta+\gamma-z)}}.$$

Es wird $\tau = 0$ für $z = \beta$ und $z = \gamma$, d. h. die Bahn berührt die beiden den Grenzebenen entsprechenden Parallelkreise. Weiter ergiebt sich leicht durch Differentiation, dass

τ für $z = \frac{\beta+\gamma}{2}$ das Maximum seiner absoluten Grösse erreicht.

Der Winkel τ ändert sich also in folgender Weise: in der unteren Grenzebene ist er Null, beim Steigen des Punktes wächst er bis zu $z = \frac{\beta+\gamma}{2}$, wo er den Wert $\sin\tau = \frac{\gamma-\beta}{\gamma+\beta}$ annimmt; von da bis zur oberen Grenzebene nimmt er wieder bis Null ab. Während τ bis jetzt oberhalb des Parallelkreises lag, befindet er sich beim Fallen des Punktes immer unterhalb desselben, erreicht wieder in der Mittelebene $\frac{\beta+\gamma}{2} = z$ sein Maximum und nimmt von da wieder ab, bis er in der unteren Grenzebene wieder zu Null wird. Immer aber hat τ in demselben Parallelkreise denselben Wert, nur liegt er abwechselnd ober- und unterhalb des Parallelkreises.

Aus dem Maximalwert $\sin\tau = \frac{\gamma-\beta}{\gamma+\beta}$ ersieht man, dass für $\gamma = \beta$ $\tau = 0$ ist; wie auch natürlich, da der Punkt in diesem Falle einen Parallelkreis beschreibt. Den Wert $\frac{\pi}{2}$ kann τ nur annehmen, wenn $\beta = 0$ ist; dies ist aber nur möglich, wenn $v_0 = 0$ oder $h = 0$; ersteres würde die Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit sein, wo der Punkt auf einem Meridian sich bewegen müsste; das zweite würde ebenfalls eine Bewegung auf einem Meridian bedingen, da im Scheitelpunkt des Paraboloids eine jede Richtung der Anfangsgeschwindigkeit mit der Tangente eines Meridians zusammenfällt, der Punkt also auch immer in der verticalen Ebene desselben verbleiben muss. In beiden Fällen ist aber offenbar der Winkel $\tau = \frac{\pi}{2}$.

Da auch die **Geschwindigkeit** des beweglichen Punktes für jedes z den gleichen Wert hat, wie Gleichung

$$v^2 = 2g(h - z) + v_0^2$$

zeigt, so können wir die sämmtlichen bis hierher erhaltenen Resultate kurz in die folgende Tabelle zusammenfassen, aus welcher die Eigentümlichkeiten der Bahn und der Bewegung des Punktes klar ersichtlich werden.

für	$z =$	β	z_1	γ	z_1	β	z_1	γ	z_1	β
ist	$u =$	0	u_1	K	$2K - u_1$	$2K$	$2K + u_1$	$3K$	$4K - u_1$	$4K$
	$t =$	0	t_1	T	$2T - t_1$	$2T$	$2T + t_1$	$3T$	$4T - t_1$	$4T$
	$\omega =$	0	ω_1	Ω	$2\Omega - \omega_1$	2Ω	$2\Omega + \omega_1$	3Ω	$4\Omega - \omega_1$	4Ω
	$\Delta\omega =$	0	$+\Delta\omega_1$	0	$-\Delta\omega_1$	0	$+\Delta\omega_1$	0	$-\Delta\omega_1$	0
	$\tau =$	0	τ_1	0	$-\tau_1$	0	$+\tau_1$	0	$-\tau_1$	0
	$v =$	v_β	v_1	v_γ	v_1	v_β	v_1	v_γ	v_1	v_β

Man liest aus dieser Tabelle sofort ab, dass die **Bahn**, welche der bewegliche Punkt beschreibt, **periodisch aus congruenten Stücken besteht**, die sich in der Weise zu einem Ganzen verbinden, dass eine in einer Grenzebene beginnende Periode durch den Berührungspunkt mit der anderen Grenzebene in zwei **symmetrische Hälften** geteilt wird.

Der **Winkel** Ω lässt eine einfache Grenzbestimmung desselben zu mit Hülfe des sogenannten Maximum-Minimum-Theorems. Zu dem Ende gehen wir zurück auf Formel IX., welche zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ integrirt Ω giebt.

$$\Omega = \sqrt{\frac{\beta \cdot \gamma}{-\alpha}} \cdot \frac{\sqrt{\gamma - \alpha}}{\gamma} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta\psi \, d\psi}{1 - \frac{\gamma - \beta}{\gamma} \sin^2 \psi}.$$

Nun ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta\psi \, d\psi}{1 - \frac{\gamma - \beta}{\gamma} \sin^2 \psi} = R \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{1 - \frac{\gamma - \beta}{\gamma} \sin^2 \psi},$$

wenn R ein Wert von $\Delta\psi$ ist, der zwischen dem grössten und kleinsten Werte von $\Delta\psi$ liegt, welche diese Function innerhalb des Intervalls $\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$ annimmt; dies sind aber

$$1 > R > \sqrt{1 - k^2}.$$

Das Integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{1-\frac{\gamma-\beta}{\gamma}\sin^2\psi}$ geht durch die Substitution $\sin\psi = \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}$ über in

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{d\eta}{1+\frac{\beta}{\gamma}\eta^2} = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\left\{\operatorname{arctang}\eta\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\right\}_0^{\infty} = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\cdot\frac{\pi}{2},$$

so dass wir für Ω folgende Grenzbestimmung erhalten:

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{\gamma}{-\alpha}} > \Omega > \frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{\beta}{-\alpha}}.$$

Da α eine negative Grösse ist, so folgt hieraus, dass der Winkel einer Periode (2Ω) immer grösser ist als 180^0. Es werden demnach die höchsten und tiefsten Punkte der Bahn auf den zugehörigen Parallelkreisen (nach Art des Foucault'schen Pendelversuches) ein Vorrücken im Sinne der Bewegung erleiden. Der bewegliche Punkt kann nur dann wieder zu seinem Ausgangspunkte zurückkehren, wenn Ω in einem rationalen Verhältnisse zu π steht.

§. 3. Bewegung auf dem Rotationskegel.

Legen wir das Coordinatensystem so, dass die Rotationsaxe zur Axe der z und die Spitze des Kegels zum Anfangspunkt der Coordinaten wird, so ist

$$x^2+y^2 = z^2.\operatorname{tang}^2\delta$$

die Gleichung des Kegels; δ ist der Winkel zwischen Generatrix und Axe.

Zunächst sei wieder die Einschränkung auf die obere nach oben offene Hälfte des Kegels gemacht; da für die untere dieselben Bemerkungen gelten, wie für das Paraboloid auf der Seite der negativen z.

Setzen wir in die betreffenden Gleichungen des §. 1.

$$f(z) = z.\operatorname{tang}\delta,\quad f'(z) = \operatorname{tang}\delta,\quad f(h) = h.\operatorname{tang}\delta$$

ein, so erhalten wir

I. $$\frac{dz}{dt} = \mp \cos\delta \,.\, \sqrt{2g} \,.\, \frac{\sqrt{(h-z)\left(z^2 - z\frac{v_0^2}{2g} - h\frac{v_0^2}{2g}\right)}}{z}.$$

Das Trinom 2ten Grades $z^2 - z\frac{v_0^2}{2g} - h\frac{v_0^2}{2g}$ ist gleich $(z-z_1)(z-z_2)$ wenn

$$z_1 = \frac{v_0}{4g}[\sqrt{v_0^2} + \sqrt{v_0^2 + 8hg}], \quad z_2 = \frac{v_0}{4g}[\sqrt{v_0^2} - \sqrt{v_0^2 + 8hg}];$$

und zwar ist $z_1 \gtrless h$, jenachdem $v_0 \gtrless \sqrt{hg}$.

Bezeichnen wir also wieder

z_1 mit γ, h mit β, wenn $v_0 > \sqrt{hg}$,
z_1 „ β, h „ γ, „ $v_0 < \sqrt{hg}$,

in beiden Fällen aber z_2 mit α, [z_2 ist negativ, da $h > 0$ sein muss], so haben wir nun

II. $$\frac{dz}{dt} = \mp \cos\delta \sqrt{2g} \,.\, \frac{1}{z}\sqrt{-(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}; \quad [\alpha < 0 < \beta < \gamma]$$

Da z nicht negativ werden kann (mit Rücksicht auf die gemachte Einschränkung), so wird $\frac{dz}{dt} = 0$ nur für $z = \beta$ und $z = \gamma$. Bildet man die Beschleunigungscomponente $\frac{d^2z}{dt^2}$ und setzt diese Werte ein, so findet man:

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_{z=\beta} > 0; \quad \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_{z=\gamma} < 0,$$

d. h. $z = \gamma$ ist ein Maximum, $z = \beta$ ein Minimum für z. Der bewegliche Punkt oscillirt auch hier wieder zwischen zwei Grenzebenen, $z = \beta$ der unteren, $z = \gamma$ der oberen. Für den Fall $v_0 = \sqrt{hg}$ fallen beide Ebenen zusammen, d. h. der Punkt beschreibt einen Parallelkreis; die Umlaufszeit wird in diesem Falle $T = 2\pi . \tang\delta . \sqrt{\frac{h}{g}}$. ist also von der Höhe abhängig.

Zur Bestimmung der Zeit t bilden wir aus II

III. $$dt = \mp \frac{1}{\cos\delta \,.\, \sqrt{2g}} \,.\, \frac{z\,.\,dz}{\sqrt{-(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}},$$

und transformiren dies durch dieselben Substitutionsformeln wie in §. 2.

$$z = \frac{\beta - \alpha k^2 \sin^2\varphi}{1 - k^2 \sin^2\varphi}, \quad k^2 = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha} \quad \text{giebt}$$

IV. $$dt = \frac{2}{\cos\delta . \sqrt{2g(\gamma - \alpha)}} \frac{\beta - \alpha k^2 \sin^2\varphi}{\Delta^3\varphi} d\varphi,$$

$$z = \gamma - (\gamma - \beta)\sin^2\psi, \quad k^2 = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha} \quad \text{giebt}$$

V. $$dt = \frac{2}{\cos\delta . \sqrt{2g(\gamma - \alpha)}} . \frac{\gamma - (\gamma - \beta)\sin^2\psi}{\Delta\psi} d\psi.$$

Hierin ist wieder das Vorzeichen entsprechend einer steigenden oder fallenden Bewegung gewählt; es sind nämlich die entsprechenden Grenzen der Variabeln $z\Big|_{\beta}^{\gamma} \dots \varphi\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}, \quad z\Big|_{\gamma}^{\beta} \dots \psi\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}.$

Nach einigen Umformungen, analog denen in §. 2., ergiebt sich:

IV'. $$dt = \frac{2}{\cos\delta . \sqrt{2g(\gamma - \alpha)}} \left\{ \alpha \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + (\beta - \alpha) \frac{d\varphi}{\Delta^3\varphi} \right\}$$

V'. $$dt = \frac{2}{\cos\delta . \sqrt{2g(\gamma - \alpha)}} \left\{ \alpha \frac{d\psi}{\Delta\psi} + (\gamma - \alpha) \Delta\psi d\psi \right\}.$$

Integriren wir nun IV'. für eine steigende Bewegung, V'. für eine fallende, und erinnern uns des in §. 2. benutzten Ausdruckes für $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta^3\varphi}$, so wird

VI.
$$t_1 = \frac{2}{\cos\delta . \sqrt{2g(\gamma - \alpha)}} \left\{ \alpha . u_1 + (\gamma - \alpha) \left[E(u_1) - k^2 \frac{\sin am\, u_1 \cos am\, u_1}{\Delta\, am\, u_1} \right] \right\}$$

VII. $$t_2 = \frac{2}{\cos\delta . \sqrt{2g(\gamma - \alpha)}} \{ \alpha . u_2 + (\gamma - \alpha) E(u_2) \}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt zunächst der gleiche Wert von T, welchen der Punkt braucht, einmal um von der unteren Grenzebene zur oberen zu steigen, das andremal um von der oberen zur unteren zu fallen, nämlich

VIII. $$T = \frac{2}{\cos\delta . \sqrt{2g(\gamma - \alpha)}} \{ \alpha . K + (\gamma - \alpha) E \}.$$

Ferner ergiebt das Wachsen des Argumentes u um $2K$ folgende Relation:

$$t' = t + 2T,$$

d. h. das Steigen und Fallen ist periodisch nach $2T$.

Ebenso folgt die Symmetrie in Bezug auf die Grenzebenen ganz analog §. 2. durch Anwendung der Relation $u_2 = K - u_1$. Die Entwicklungen dieser Resultate mögen hier übergangen werden, da sie genau so wie in §. 2. erfolgen.

Der Winkel ω bestimmt sich aus den Gleichungen $r = z . \operatorname{tang}\delta$, $r^2 d\omega = v_0 . \operatorname{tang}\delta . h . dt$, mit Rücksicht auf III,

$$\text{IX.} \qquad d\omega = \mp \frac{v_0 . h}{\sin\delta . \sqrt{2g}} \cdot \frac{dz}{z\sqrt{-(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)}}.$$

Dieser Ausdruck formt sich durch die beiden Substitutionen

$$z = \frac{\beta - \alpha k^2 \sin^2\varphi}{1 - k^2 \sin^2\varphi} \text{ zu } d\omega_1 = \frac{2 . v_0 . h}{\sin\delta . \sqrt{2g(\gamma-\alpha)}} \cdot \frac{\Delta\varphi\, d\varphi}{\beta - \alpha k^2 \sin^2\varphi}.$$

$$z = \gamma - (\gamma - \beta)\sin^2\psi \text{ zu } d\omega_2 = \frac{2 . v_0 . h}{\sin\delta . \sqrt{2g(\gamma-\alpha)}} \cdot \frac{d\psi}{[\gamma - (\gamma-\beta)\sin^2\psi]\Delta\psi}.$$

Der constante Coefficient transformirt sich leicht, mit Rücksicht auf $z_1 . z_2 = -\frac{v_0^2}{2g} h$; es wird

$$\frac{2 . v_0 . h}{\sin\delta . \sqrt{2g(\gamma-\alpha)}} = \frac{2}{\sin\delta . \sqrt{\gamma-\alpha}} \sqrt{-\alpha\beta\gamma}.$$

Nach einigen Umformungen erhalten wir somit

$$d\omega_1 = \frac{2\sqrt{-\alpha\gamma}}{\sin\delta . \sqrt{(\gamma-\alpha)\beta}} \cdot \frac{1}{\alpha} \left\{ \beta \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - (\beta - \alpha) \frac{d\varphi}{\left(1 - \frac{\alpha}{\beta} k^2 \sin^2\varphi\right)\Delta\varphi} \right\},$$

$$d\omega_2 = \frac{2\sqrt{-\alpha\beta}}{\sin\delta . \sqrt{(\gamma-\alpha)\gamma}} \cdot \frac{d\psi}{\left[1 - \frac{\gamma-\beta}{\gamma}\sin^2\psi\right]\Delta\psi}.$$

Integriren wir die erste Gleichung für eine steigende, die zweite für eine fallende Bewegung, so erhalten wir mit Rücksicht auf die in §. 2. gegebene Relation für das Integral $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+m\sin^2\varphi)\Delta\varphi}$, wenn

$-\frac{\alpha}{\beta}k^2 = -k^2\sin^2 amA$ und $-\frac{\gamma-\beta}{\gamma} = -k^2 \sin^2 amB$ gesetzt wird:

$$\omega_1 = \frac{2}{\sin\delta}\sqrt{\frac{-\alpha\gamma}{\beta(\gamma-\alpha)}}\left\{u_1 + \frac{(\beta-\alpha)}{-\alpha}\cdot\frac{\operatorname{tang} am A}{\Delta am A}\,\Pi(u_1, A)\right\},$$

$$\omega_2 = \frac{2}{\sin\delta}\sqrt{\frac{-\alpha\beta}{\gamma(\gamma-\alpha)}}\left\{u_2 + \frac{\operatorname{tang} am B}{\Delta am B}\,\Pi(u_2, B)\right\}.$$

Nun ist, wie in §. 2. schon gefunden,

$$\frac{\operatorname{tang} am A}{\Delta am A} = \sqrt{\frac{\alpha\beta(\gamma-\alpha)}{\gamma}}\cdot\frac{1}{\beta-\alpha}, \quad \text{und}$$

$$\frac{\operatorname{tang} am B}{\Delta am B} = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\gamma(\gamma-\alpha)}{-\alpha\beta}} = -i\sqrt{\frac{\gamma(\gamma-\alpha)}{-\alpha\beta}};$$

somit erhalten wir:

$$\omega_1 = \frac{2}{\sin\delta}\left\{\sqrt{\frac{-\alpha\gamma}{\beta(\gamma-\alpha)}}\,.\,u_1 + i\Pi(u_1, A)\right\},$$

$$\omega_2 = \frac{2}{\sin\delta}\left\{\sqrt{\frac{-\alpha\beta}{\gamma(\gamma-\alpha)}}\,.\,u_1 - i\Pi(u_2, B)\right\}.$$

Die Parameter A und B haben wieder dieselben Werte wie in §. 2., es ist also: $A = iA$, $B = K - iA$; demnach

$$i\Pi(u_1, A) = u_1\,.\,iZ(iA) + \tfrac{1}{2}i\,.\lg\frac{\Theta(u_1 - iA)}{\Theta(u_1 + iA)},$$

$$i\Pi(u_2, B) = u_2\,.\,iZ(K - iA) + \tfrac{1}{2}i\,.\lg\frac{\Theta(u_2 - K + iA)}{\Theta(u_2 + K - iA)}.$$

Hiermit die Ausdrücke für $iZ(iA)$ und $iZ(K - iA)$ aus §. 2. verbunden und das Ganze in die Gleichungen für ω eingeführt ergiebt:

$$\text{X.} \qquad \omega_1 = \frac{2}{\sin\delta}\left\{\left[\frac{\pi A}{2KK'} + Z(A, k')\right]u_1 + \tfrac{1}{2}i\,.\lg\frac{\Theta(u_1 - iA)}{\Theta(u_1 + iA)}\right\},$$

$$\text{XI.} \qquad \omega_2 = \frac{2}{\sin\delta}\left\{\left[\frac{\pi A}{2KK'} + Z(A, k')\right]u_2 - \tfrac{1}{2}i\,.\lg\frac{\Theta(u_2 - K + iA)}{\Theta(u_2 + K - iA)}\right\}.$$

Beide Gleichungen ergeben sofort für den Winkel Ω, welchen der Radiusvector bei der Bewegung des Punktes einmal von der unteren Grenzebene zur oberen, das andremal von der oberen zur unteren, beschreibt, denselben Wert

$$\text{XII.} \qquad \Omega = \frac{2}{\sin\delta}PK; \qquad \left[P = \frac{\pi A}{2KK'} + Z(A, k')\right]$$

Ganz analog den Entwicklungen in §. 2. folgt dann durch Vermehrung des Argumentes u um $2K$ die Periodicität des Winkels ω,

indem der Periode $2T$ eine ebensolche des Winkels 2Ω entspricht. Auch das Gesetz der Symmetrie für den Winkel ω in Bezug auf die beiden Grenzebenen folgt auf die frühere Weise.

Der Winkel τ zwischen Bahn- und Parallelkreistangente bestimmt sich leicht zu

$$\cos\tau = \frac{v_0 h}{z\sqrt{2g(h-z)+v_0^2}} = \frac{1}{z}\sqrt{\frac{-\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma-z}}.$$

Die Bewegung wird nach den bis jetzt erhaltenen Resultaten, in ihrer allgemeinen Gestalt hinlänglich bestimmt sein; es gelten für dieselbe ebenfalls die am Ende des §. 2. entworfene Tabelle und daraus gezogenen Resultate.

Zum Schluss möge noch auf die Abhängigkeit der Zeit t und des Winkels ω von dem Winkel δ hingewiesen werden. Die Zeit ist unter sonst gleichen Umständen umgekehrt proportional dem $\cos\delta$ d. h. sie wächst mit δ; der Winkel ω dagegen umgekehrt proportional dem $\sin\delta$ d. h. nimmt ab bei wachsendem δ. Für dasselbe β und γ ergiebt sich, dass die Bahn des beweglichen Punktes auf dem Kegel für ein grösseres δ ein immer breiteres Ringstück mit immer grösserem Radius ausfüllt; woraus jene Abhängigkeit leicht erklärlich wird.

XVI.

Miscellen.

1.

Ueber kubische Gleichungen.

Bekanntlich hat eine kubische Gleichung eine oder drei reelle Wurzeln, je nachdem die Cardanische Formel in reeller oder imaginärer Gestalt erscheint. Folgender Beweis dieses Satzes, der gewöhnlich auf geometrischem Wege dargetan wird, dürfte sich durch Einfachheit empfehlen.

Die Gleichung $x^3+ax+b=0$ hat wenigstens eine reelle Wurzel p und ist daher mit $(x-p)(x^2+px+q)$ äquivalent.

Setzen wir die Grösse, welche in der Card. Formel erscheint, $27b^2+4a^3=N$ und den Ausdruck $4q-p^2$, welcher bei Auflösung der Gleichung $x^2+px+q=0$ sich ergiebt, $=n$, so handelt es sich hier nur um den Beweis, dass N und n gleiche Zeichen haben. Je nachdem N und n gleichzeitig positiv oder negativ sind, werden dann die beiden noch übrigen Wurzeln imaginär oder reell sein. Aus

$$x^3+ax+b=(x-p)(x^2+px+q)$$

folgt

$$a=q-p^2, \quad b=-pq$$
$$N=27p^2q^2+4(q-p^2)^3$$

oder wegen $n=4q-p^2$

$$N=27q^2(4q-n)+4(n-3q)^3=108q^3-27q^2n+4n^3-36n^2q$$
$$+108q^2n-108q^3=4n^3-36n^2q+81nq^2=n(4n^2-36nq+81q^2)$$

oder $N=n(2n-9q)^2=n(2p^2+q)^2$, woraus die behauptete Zeichengleichheit von N und n sich ergiebt.

Dr. Eduard Liebrecht.

2.

Ueber einige bestimmte Integrale.

A.

Im Folgenden wenden wir die bekannten Relationen an:

1. $$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=-\frac{1}{2a^2}+\frac{\pi}{2a}\frac{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}{c^{a\pi}-e^{-a\pi}}$$

2. $$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(2n-1)^2+a^2}=\frac{e^{\frac{a\pi}{2}}-e^{-\frac{a\pi}{2}}}{e^{\frac{a\pi}{2}}+e^{-\frac{a\pi}{2}}}$$

3. $$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+a^2}=\frac{1}{2a^2}-\frac{\pi}{a}\cdot\frac{1}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}$$

4. $$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{(2n-1)^2+a^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{e^{\frac{a\pi}{2}}+e^{-\frac{a\pi}{2}}}$$

5. $$\sum_{1}^{n}\cos n\vartheta=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\vartheta}{\sin\frac{1}{2}\vartheta}$$

6. $$\int_0^\infty\frac{\cos ax\,dx}{b^2+x^2}=\frac{\pi}{2b}e^{-ab}\ (a>0;\quad b>0)$$

Die Relationen von 1—4 kann man unter Anderem dadurch finden, dass man in den unendlichen Producten für sinus, cosinus, tangens und cotang. das Argument imaginär nimmt, dann logarithmisch differentiirt u. s. w. Nr. 6. rührt von Laplace her.

Setzt man nun in 6. successive $b=1, 2, 3\ldots$ in infin. und addirt alle Resultate, so kommt

$$\int_0^\infty\cos ax\,dx\left(\frac{1}{1^2+x^2}+\frac{1}{2^2+x^2}+\frac{1}{3^2+x^2}+\ldots\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{e^{-a}}{1}+\frac{e^{-2a}}{2}+\frac{e^{-3a}}{3}+\ldots\right)$$

oder

$$\int_0^\infty\cos ax\,dx\left(-\frac{1}{2x^2}+\frac{\pi}{2x}\frac{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\right)=\frac{\pi}{2}\log\frac{1-e^{-a}}{1}.$$

Durch Vertauschung von x und a mit resp. $\frac{nx}{\pi}$ und $\frac{a\pi}{n}$ erhält man

$$\int_0^\infty \cos ax\, dx \left(+\frac{1}{x^2} - \frac{n}{x}\frac{e^{nx}+e^{-nx}}{e^{nx}-e^{-nx}}\right) = n \log\left(1-e^{-\frac{a\pi}{n}}\right)$$

$$n > 0, \quad a > 0$$

und durch Differentiation nach a

$$\int_0^\infty \sin ax\, dx \left(-\frac{1}{x} + n \cdot \frac{e^{nx}+e^{-nx}}{e^{nx}-e^{-nx}}\right) = \frac{\pi}{e^{\frac{a\pi}{n}}-1},$$

oder mit Rücksicht auf $\int_0^\infty \frac{\sin ax\, dx}{x} = \frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^\infty \sin ax \frac{e^{nx}+e^{-nx}}{e^{nx}-e^{-nx}}\, dx = \frac{\pi}{2n}\frac{e^{\frac{a\pi}{n}}+1}{e^{\frac{a\pi}{n}}-1}.$$

Genau nach derselben Methode ergeben sich bei Anwendung der Formeln 2—4 noch folgende bestimmte Integrale:

$$\int_0^\infty \cos ax \cdot \frac{e^{nx}-e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}\, dx = \frac{\pi}{2n}\log\frac{e^{\frac{a\pi}{2n}}+1}{e^{\frac{a\pi}{2n}}-1}$$

$$\int_0^\infty \cos ax\, dx \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\cdot\frac{2n}{e^{nx}-e^{-nx}}\right) = n \log\left(1-e^{-\frac{a\pi}{n}}\right)$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax\, dx}{e^{nx}+e^{-nx}} = \frac{\pi}{2n}\frac{e^{\frac{a\pi}{2n}}}{e^{\frac{a\pi}{2n}}+1}$$

und durch Differentiation noch 3 andere.

B.

Wir setzen in Formel 6. $a = 1, 2, \ldots n$ und addiren alle Resultate, so kommt

$$\int_0^\infty \frac{dx}{b^2+x^2}(\cos x + \cos 2x + \ldots \cos nx) = \frac{\pi}{2b}(e^{-b}+e^{-2b}+\ldots e^{-nb})$$

oder mit Berücksichtigung von 5.:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{b^2+x^2}\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)=\frac{\pi}{2}\,\frac{1-e^{-nb}}{e^b-1}$$

und nach einigen leichten Reductionen, wenn man noch $2b$ statt b und $2x$ statt x setzt:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{b^2+x^2}\,\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}=\frac{\pi}{2b}\,\frac{e^{2b}+1-2e^{-2nb}}{e^{2b}-1}$$

Lässt man n ins Unendliche wachsen, so ist auch

$$\lim_{n=\infty}\int_0^\infty \frac{dx}{b^2+x^2}\,\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}=\frac{\pi}{2b}\,\frac{e^{2b}+1}{e^{2b}-1}.$$

Diese Formel lässt sich direct auf folgende Weise verificiren.

Nach Dirichlet (vgl. auch Schloemilch's Compend. d. höh. Analys. II 138) ist für $n=\infty$

$$\lim\int_0^\infty \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}f(x)\,dx=\pi\{\tfrac{1}{2}f(0)+f(\pi)+f(2\pi)+\ldots\}$$

unter der Voraussetzung, dass für $h=\infty$ $\lim f(h\pi)=0$. Diese Voraussetzung trifft für unsern Fall $f(x)=\frac{1}{b^2+x^2}$ zu, und es ist daher

$$\lim\int_0^\infty \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,\frac{dx}{b^2+x^2}=\pi\left(\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{b^2+\pi^2}+\frac{1}{b^2+4\pi^2}+\frac{1}{b^2+9\pi^2}+\ldots\right)$$

oder mit Rücksicht auf 1.

$$\lim\int_0^\infty \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,\frac{dx}{b^2+x^2}=\frac{\pi}{2b}\,\frac{e^{2b}+1}{e^{2b}-1}\quad\text{wie oben.}$$

C.

Schon bei Abel, später bei Lionville findet sich als specieller Fall eines sehr allgemeinen Integrals der Wert von

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{a-1}\varphi\sin a\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi=\frac{\pi}{2}$$

Wir geben hier 2 directe Entwickelungen dieses Integrals, die erste nur unter Voraussetzung eines ganzzahligen a, und setzen

1) $$f(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{a-1}\varphi \sin a\varphi\, d\varphi}{\sin\varphi}$$

mithin

$$f(a+1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^a\varphi \sin(a+1)\varphi\, d\varphi}{\sin\varphi}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^a\varphi\, d\varphi}{\sin\varphi} (\sin a\varphi \cos\varphi + \cos a\varphi \sin\varphi)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{a+1}\varphi \sin a\varphi\, d\varphi}{\sin\varphi} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a\varphi \cos a\varphi\, d\varphi.$$

Letzteres Integral lässt sich mittels partieller Integration ersetzen durch $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-1}\varphi \sin a\varphi \sin\varphi\, d\varphi$ und es ist daher

$$f(a+1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{a-1}\varphi \sin a\varphi\, d\varphi}{\sin\varphi} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = f(a)$$

also (für ein ganzes a) $f(a) = \text{Const}$ und es bedarf zur Ermittelung von Const nur eines speciellen Wertes von a z. B. $= 1$. Da nun

$$f(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

so ist überhaupt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{a-1}\varphi \sin a\varphi\, d\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\pi}{2}.$$

2. Ein anderer Weg zur Auswertung dieses Integrals, ist folgender:

Für positive (auch gebrochene) a gilt die Definitionsgleichung

$$\Gamma a = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx$$

und wenn $x = (1+\sqrt{-1}\,\text{tang}\,\varphi)y$ gesetzt wird,

$$\Gamma a = \int_0^\infty \frac{e^{(a-1)i\varphi} x^{a-1}\, e^{-(1+i\,\text{tang}\varphi)x}\, e^{i\varphi}\, dx}{\cos^a\varphi}$$

oder

$$\Gamma a = \int_0^\infty x^{a-1}\, dx \frac{(\cos a\varphi + i \sin a\varphi)}{\cos^a\varphi} e^{-x}(\cos(x\,\text{tg}\,\varphi) - i\sin(x\,\text{tg}\,\varphi)),$$

und durch Trennung der Reellen und Imaginären

1) $$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \cos(x\,\text{tg}\,\varphi)\, dx = \cos^a\varphi \cos a\varphi\, \Gamma a$$

2) $$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \sin(x\,\text{tg}\,\varphi)\, dx = \cos^a\varphi \sin a\varphi\, \Gamma a$$

Multiplicirt man (2) mit $\frac{d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi}$, so kommt

3) $$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x\,\text{tang}\,\varphi)\, d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \Gamma a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi \cos^{a-1}\varphi \sin a\varphi}{\sin\varphi}.$$

Setzt man links $x\,\text{tang}\,\varphi = z$, so erhält man durch Umkehrung der Integrationsordnung

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi \cos^{a-1}\varphi \sin a\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\Gamma a} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx \int_0^\infty \frac{\sin z\,.\,x\,dz\,(\sqrt{x^2+z^2})^2}{(x^2+z^2)\,xz}$$

oder

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi\cos^{a-1}\varphi\sin a\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\Gamma a} \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx. \int_0^\infty \frac{\sin z\, dz}{z} = \frac{1}{\Gamma a}.\,\Gamma a\,.\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

wie oben aber mit Ausdehnung der Giltigkeit auch auf gebrochene positive Werte von a.

D.

Raabe giebt in Crelle's Journal XXVIII S. 112 folgende Relation:

$$\int_0^1 \log \Gamma(x+k)\, dx = k \log k - k + \tfrac{1}{2}\log(2\pi)$$

Dieselbe Gleichheit beweist Stern in seiner Schrift: Zur Theorie der Euler'schen Integrale, und reproducirend G. f. Meyer in seinem Werke über bestimmte Integrale S. 157 und 158. Ich habe nun versucht, den Beweis auf folgende Weise zu führen.

Nach dem bekannten Gauss'schen Fundamentalgesetze über die Gammafunctionen besteht die Gleichung:

$$\prod_{k=0}^{k=n-1} \Gamma\left(a+\frac{k}{n}\right) = \Gamma na \,.\, n^{-na+\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

die ausserdem auch durch Dirichlet, Schloemilch u. A. bewiesen ist.

Nehmen wir beiderseits die Logarithmen, so kommt

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \log \Gamma\left(a+\frac{k}{n}\right) = \log \Gamma na - (na - \tfrac{1}{2}) \log n + \frac{n-1}{2} \log(2\pi).$$

Setzen wir nun $\frac{k}{n} = x$ und lassen n unendlich wachsen, so ist, nachdem mit $\frac{1}{n} = dx$ multiplicirt worden, gemäss dem Begriffe bestimmter Integrale:

$$\int_a^{a+1} \log \Gamma x \, dx = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\left(\log \Gamma na - (na - \tfrac{1}{2}) \log n + \frac{n-1}{2} \log(2\pi)\right)$$

$$= \lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{n} \log \Gamma na - a \log n\right) + \tfrac{1}{2} \log(2\pi);$$

die übrigen Glieder $\frac{1}{2n}\log n - \frac{1}{2n}\log(2\pi)$ verschwinden für $n=\infty$.

Es kommt nunmehr darauf an $\lim\limits_{n=\infty}\left(\frac{1}{n}\log\Gamma na - a\log n\right)$ zu finden. Zu diesem Zwecke substituiren wir $\frac{z}{a}$ statt n, $z=\infty$, und erhalten $\lim\limits_{z=\infty}\left(\frac{a\log\Gamma z}{z} - a\log z\right) + a\log a$, so dass jenes Integral

$$= \tfrac{1}{2}\log(2\pi) + a\log a + a \,.\, \lim_{z=\infty}\left(\frac{\log\Gamma z - z\log z}{z}\right)$$

Setzen wir

$$u = \frac{\log\Gamma z - z\log z}{z\,(z=\infty)},$$

so erscheint u unter der Form $\frac{\infty}{\infty}$, darf also nach der bekannten Cauchy'schen Regel so behandelt werden wie $\frac{0}{0}$. Hiernach ergiebt sich durch Differentiiren $u = -1 - \log z + \frac{d\,\Gamma z}{\Gamma z\, dz}$. Unter den viel-

fachen Darstellungen für $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma z}$ (vergl. G. f. Meyer best. Integrale) giebt es eine die hier am kürzesten zum Ziele führt nämlich

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma z} = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{\log\frac{1}{x}} - \frac{x^{z-1}}{1-x}\right] \quad \text{(Gauss.)},$$

subtrahirt man hiervon

$$\log z = \int_0^1 \frac{dx}{\log\frac{1}{x}}(1-x^{z-1}), \quad \text{so folgt}$$

$$u = -1 + \int_0^1 dx \left(\frac{1}{\log\frac{1}{x}} - \frac{x^{z-1}}{1-x} - \frac{1}{\log\frac{1}{x}} + \frac{x^{z-1}}{\log\frac{1}{x}}\right)$$

$$= -1 + \int_0^1 dx \frac{x^z}{(1-x)} \frac{1}{\log\frac{1}{x}} = -1$$

weil wegen $x<1$ und $z=\infty$ das Integral verschwindet. Hiernach ist endlich $\int_a^{a+1} \log\Gamma x\,dx = \frac{1}{2}\log(2\pi) + a\log a - a$ oder

$$\int_0^1 \log\Gamma(x+a)\,dx = \tfrac{1}{2}\log(2\pi) + a\log a - a.$$

Setzt man die Stirling'sche Reihe für $\log\Gamma a$ als bekannt voraus, so kann man unmittelbar $u = \frac{\log\Gamma z - z\log z}{z(=\infty)}$ finden. Es ist nämlich

$$\log\Gamma a = \tfrac{1}{2}\log(2a\pi) + (a-1)\log a - a + \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{a} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{a^3} + \cdots$$

wo die B die Bernoullischen Zahlen sind, mithin

$$\frac{\log\Gamma a - a\log a}{a(=\infty)} = \frac{\log(2a\pi)}{2a} + \frac{\log a}{a} - 1 + \Sigma\frac{A}{a^k} = -1$$

wie oben.

Liebrecht.

Litterarischer Bericht
CCXXXIV.

Geometrie.

Ueber gleicheckige und gleichkantige Polygone. Von Dr. Edmund Hess, Privatdocent an der Universität Marburg. (Aus den Schriften d. Gesellsch. z. Beförd. d. gesammten Naturwiss. zu Marburg. Bd. 10, 12. Abhdl.). Cassel 1874. Theodor Kay. 133 S.

Ueber zwei Erweiterungen des Begriffs der regelmässigen Körper. Von Dr. Edmund Hess, Privatdocent an der Universität Marburg. 20 S.

Unter dem Namen „gleicheckige, gleichkantige Polygone" werden solche Polygone gerader Seitenzahl eingeführt, deren Winkel, bzhw. Seiten sämmtlich, deren Seiten, bzhw. Winkel alternirend gleich sind, wie Rechteck und Rhombus. Der Betrachtung solcher Polygone gehen einige allgemeine Anordnungen und Sätze, ebene Vielecke überhaupt betreffend voraus. Die folgenden Capitel handeln von den verschiedenen Arten und Varietäten der gleicheckigen Figuren, den vollständigen durch die $(n+n)$ Kanten eines gleicheckigen $2n$ecks gebildeten Figuren, einer anderen Art der Entstehung gleicheckiger $2n$ecke, den verschiedenen Arten und Varietäten der gleichkantigen Figuren und deren wichtigsten Eigenschaften. Wir müssen es denjenigen, denen es Vergnügen macht, sich an dergleichen Excursen zu beteiligen, überlassen davon Kenntniss zu nehmen.

Bot die erste Schrift noch zu geringen Anlass, gewisse Mängel in Angaben und Begriffsbestimmungen zu erwähnen, so können dieselben um der zweiten willen, in der sie stark vermehrt auftreten,

nicht unbesprochen bleiben. Die Beschlagnahme allgemeiner Termini (Art, Figur, regelmässig, u. s. w.) für specielle Begriffe mag in den Grenzen einer Abhandlung bei consequenter Beschränkung gestattet sein; nur muss der Autor sich des Doppelsinns bewusst bleiben, den eine fernere Anwendung seiner Ausdrücke herbeiführt, und sich selbst für jede daraus entspringende Undeutlichkeit verantwortlich machen. Bei Vorkommen eines einzelnen doppelsinnigen Wortes pflegt der Leser bereitwillig die Entscheidung durch nachfolgende Aeusserungen abzuwarten. Folgen aber bald nach einander 5 doppelsinnige Ausdrücke, so ist es gewiss keinem Leser zuzumuten, die entsprechenden 32 Deutungen durchzuprobiren. In ähnlichem Masse häufen sich in der Tat hier die unvollständigen Angaben und halb erklärten Benennungen. Kante soll beim Polygon etwas anderes sein als Seite; Kante ist erklärt, Seite nicht. Ob unter Polygon der Linienzug oder das Flächenstück zu verstehen sei, bleibt in der ersten Schrift unentschieden; die zweite hebt den Zweifel nicht, sondern vervielfältigt die Ungewissheit noch sehr durch Uebertragung auf räumliche Gebilde. Der Gebrauch des Wortes Oberfläche stimmt nicht mit dem gewöhnlichen; doch fehlt hier jede Definition. Alles vermisste aufzuführen würde nicht lohnen, auf den ferneren Inhalt der Schrift können wir aus dem genannten Grunde nicht wol eingehen. Nur über die Aufstellung des Themas der Betrachtung sei bemerkt, dass dieselbe in viele überflüssige und zum Teil nicht zutreffende Worte eingehüllt ist. Regelmässig heisst offenbar nichts weiter als durch Regel bestimmt; durch welche Regel, sagt das Wort nicht. Seine anfängliche Usurpation für die 5 regelmässigen Polyeder hatte sich keines Widerspruchs zu versehen, weil keine Anwendung des Wortes im allgemeinen Sinne denkbar war. Eine gleiche Benennung für Polyeder unter erweiterten Bedingungen ist dann keine Erweiterung des Begriffs d e r r e g e l m ä s s i g e n Polyeder, sondern bestreitet das Recht der ersten Usurpation, consequenterweise verurteilt sie sich zugleich selbst. Es wird dem Verfasser gewiss nicht in den Sinn kommen, dass seine Polyeder eine bedeutungsvollere Begrenzung der Regelmässigkeit für die Geometrie darbieten als die bekannten fünf. Warum klammert er sich dann an einen unrechtmässigen Namen an und lässt nicht die Sache für sich selbst sprechen? Hätte er statt Namen anzuführen kurz und bündig die Bedingungen für die sog. Platonischen, dann die Poinsot'schen Polyeder ausgesprochen, so wäre es daran anknüpfend leicht gewesen die selbst gewählten Bedingungen deutlich zu formuliren und zu motiviren. Dies geschieht jedoch nicht; vielmehr lässt er, als wenn der Nimbus gerade sein Zweck und Streben wäre, letztere aus eingestreuten Andeutungen gemischt mit Folgerungen, man sieht nicht, wo sie herkommen, erraten. H.

Trigonometrie.

Traité de trigonométrie. Par J. A. Serret, Membre de l'Institut, Professeur au Collège de France et à la Faculté des sciences de Paris. Cinquième édition. Paris 1875. Gauthier-Villars. 336 S.

Das Werk giebt sich durch seinen elementären, methodisch geordneten Lehrgang als Lehrbuch für Schulen zu erkennen und zeichnet sich als solches durch Ausführlichkeit, exacten Ausdruck und elegante Darstellungsweise aus, beschränkt sich jedoch nicht auf die notwendigen Grundlagen, sondern verwebt damit eine grosse Menge des Wissenswerten ohne gerade ein umgrenztes Thema erschöpfen zu wollen. Logische Gründlichkeit wird man zwar selten vermissen; doch wird sie in Punkten, wo sie eine eigens darauf gerichtete Aufmerksamkeit erfordern würde, wie z. B. bei Grenzwerten, Convergenz der Reihen u. a., ohne weiteres als Nebensache bei Seite gesetzt; dass $\operatorname{tg} x > x$ steht als unbewiesener mitten unter bewiesenen Sätzen, so als ob der Schüler nicht darauf achten sollte. Das Buch ist in 6 Capitel geteilt: 1) Circuläre Functionen 2) Construction und Gebrauch der Tafeln 3) das geradlinige 4) das sphärische Dreieck 5) Moivre-sche Formeln und höhere Theorie der Kreisfunctionen 6) Auflösung der Dreiecke mittelst der Reihen und Differentialformeln. H.

Geodäsie und praktische Geometrie.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von F. A. Klingenfeld, ordentl. Professor der darstellenden Geometrie und der mechanischen Technologie an der k. polytechnischen Schule zu München. Band III. Mit vier Tafeln. Nürnberg 1876. Friedr. Korn. 96 S.

Dieser dritte Band tritt als Vermehrung eines schon wiederholt aufgelegten in 2 Bänden bearbeiteten Lehrbuchs auf, damit es den Bedürfnissen der technischen Hochschulen entsprechen könnte, wozu die Behandlung der Schattenconstruction und der Perspective erfordert wurde, die anfänglich noch fehlte. Der Gegenstand ist nicht dasjenige Zeichnen, welches das Bild zur Entnahme der exacten wirklichen Anordnung und Abmessung durch einfachste Beziehung dazu entwirft, sondern dasjenige, welches dem Totaleindruck dient. Aus diesem Grunde wählt der Verfasser bei der Parallelperspective, mit Verwerfung der 2 oder 3 orthogonalen Risse, den einen Riss auf der schräg gestellten Tafel. Ausser der Schattenconstruction im 6. Abschnitt, werden im 7ten und 8ten noch die Parallel- und Centralperspective behandelt, worauf schliesslich Aufgaben folgen. Die geometrischen Grundlehren werden hier als bekannt vorausgesetzt. H.

Mechanik.

Die graphische Zusammensetzung der Kräfte. Ein Beitrag zur graphischen Mechanik von Friedrich Steiner. Mit 27 in den Text gedruckten Holzschnitten. Wien 1876. Carl Gerold's Sohn. 40 S.

Die hier behandelte Doctrin beruht auf einer bekannten reciproken Beziehung zwischen Geometrie und Statik. Man kann im Interesse der Statik die Zusammensetzung der Kräfte auf constructivem Wege ausführen; man kann aber auch umgekehrt in rein geometrischen Interesse von den in der Statik gewonnenen Anschauungen und Methoden Verwendung machen. Von letzterem Gesichtspunkte aus hat die Methode von Bellavitis für die Geometrie der Ebene einen hohen Grad der Entwickelung und Ausbildung erfahren. Für die gegenwärtige Schrift hingegen ist die Aufgabe der Statik allein massgebend; ausserdem umfasst sie von Anfang an die 3 Dimensionen des Raumes. Im Grunde müssen beide Auffassungsweisen dieselbe Theorie ergeben; nur entwickelt sich diese in andern Richtungen und begrenzt sich unter der statischen weit enger als unter der geometrischen; denn die Aufgabe der Statik ist durch die Reduction des Kräftesystems, welches hier zunächst als Pyramide der Kraftlinien construirt, dann auf das Raumpolygon zurückgeführt wird, erledigt, während sich für die geometrischen Verwendungen keine Grenze ersehen lässt.

Die Darstellung lässt in den ersten Elementen Klarheit vermissen, wodurch jedoch die Deutlichkeit auch im weiteren merklich beeinträchtigt wird. Der Verfasser sagt: „Das Wesen der Kraft ist uns unbekannt“. In der Tat zeugt die ganze Einleitung von einer Unbekanntschaft mit dem Wesen der Kraft, wie sie nur bei Solchen vorkommt, die dem Studium der Mechanik fern geblieben sind, und sich mit vulgären Vorstellungen begnügen. Ihr zufolge soll die Kraft die Ursache der Ortsveränderung sein, u. a. dergl. Der Unbestimmtheit, in welcher für den Verfasser der Begriff der Kraft schwebte, mag es wol zuzuschreiben sein, dass er sich über die Anfangsgründe der Statik, die Bedingungen des Gleichgewichts gar nicht ausspricht, sondern sofort zu Constructionen schreitet, ohne nur die Vorstellungen fixirt zu haben, ob die Angriffspunkte frei oder so und so verbunden gedacht werden sollen. H.

Praktische Mechanik.

Ueber die Quelle und den Betrag der durch Luftballons geleisteten Arbeit. Von Josef Popper. Mit 1 Tafel. Sitzber. d. k. Akad. d. W. LXXI. 2. Abth. April. Wien. 1875. 37 S.

Es wird die bei Füllung aufgespeicherte und die beim Steigen geleistete Arbeit eines Luftballons berechnet und gleichgesetzt, und zwar besonders erst für leeren Ballon, dann mit Gas, dann mit warmer Luft gefüllten. Gleich von Anfang aber wird als null betrachtet das Gewicht des Ballons, der Luftwiderstand, die Variabilität der Erdanziehung und der Temperatur. Es ist demnach weder auf Erreichung grosser Höhen noch auf schnelles Steigen gerechnet; vielmehr handelt es sich nur um die schliesslich gestellte Frage, ob sich der Luftballon mit Vorteil zur Hebung von Lasten, namentlich aus Schachten, eigne. H.

Theoretische Untersuchung der Constructionssysteme des Unterbaues von Locomotiven. Von Johannes Einbeck, Ingenieur, Mitinhaber der Firma Einbeck u. Vetter in Frankfurt a. M. Mit 11 lithographirten Tafeln. Leipzig 1875. Leopold Voss. 127 S.

Im Anfang der Schrift wird ausgeführt, und daraus der Anlass zur gegenwärtigen theoretischen Untersuchung genommen, dass die Locomotiven in Betreff des Oberbaues, des krafterzeugenden Bestandteils, schon sehr frühzeitig ihre definitive Gestalt gewonnen haben, indem die vom Engländer Stephenson construirte Maschine dauernd als Vorbild einer grossen Zahl verschiedener Systeme diente. Von da waren alle Verbesserungsversuche darauf gerichtet den Unterbau so zu construiren, dass alle Störungen beseitigt und ein gleichmässiger Gang erzielt wurde. Nach einem kürzern Abschnitt über die Zugkraft werden die Bedingungen eines solchen unter Berücksichtigung aller erfahrungsmässigen Störungen einer eingehenden und ziemlich ausgedehnten Rechnung unterworfen. H.

Optik.

Untersuchungen über die scheinbare Ortsveränderung eines leuchtenden Punktes, herbeigeführt durch ein von zwei parallelen Ebenen begrenztes, lichtbrechendes Medium. Mathematisch-physikalische Abhandlung von P. Moennich, Rostock. Mit vier Tafeln. Rostock 1875. Wilh. Werther. 47 S.

Die Schrift behandelt die im Titel vollständig ausgesprochene leichte Aufgabe mit grosser Ausführlichkeit und leicht verständlichem Vortrag. Die möglichen Fälle werden zuerst für ein Auge, dann für zwei, einzeln durch Rechnung gelöst, die Abhängigkeit der Ablenkungswinkel und Entfernungsänderungen discutirt und die Maxima und Minima ermittelt. H.

Astronomie und Meteorologie.

Ueber die Möglichkeit einer Axenänderung der Erde. Von Friedrich Stark, Major im kgl. Bayerischen II. Infanterie-Regiment. München 1875. Theodor Ackermann. 32 S.

Die Schrift führt uns Gedanken eines Laien über die Bildung des Erdkörpers vor. Doch selbst in dieser Kategorie steht sie hinter den zahlreichen Schriften über das beliebte Thema zurück, sofern sie keiner Art Fähigkeiten kund giebt, die etwa für den Mangel an Sachverständniss entschädigen könnten. Die Anschauung ist so wenig entwickelt, dass, häufig wechselnd, von Axenstellung im Raume und im Körper die Rede ist, als ob beides dieselbe Sache wäre. Noch mehr aber vermisst man die Fähigkeit des verständlichen, unzweideutigen Ausdrucks: bei Beschreibung von Versuchen fehlen die notwendigsten Angaben, auch bleibt das Ziel sehr im Dunkeln. Ebenso wenig ist ein geordneter Gedankengang durch das Ganze zu entdecken. H.

Die Gesetze der Kometen, abgeleitet aus dem Gravitations-Gesetze von Albert R. v. Miller-Hauenfels, Professor a. D. in Graz. Graz 1875. Leuschner u. Lubensky. 118 S.

Nach Ansicht des Verfassers sind die Kometen Gasbälle, die durch einen im Weltraume gleichmässig vorhandenen, zur Anziehung der eigenen Masse hinzutretenden Druck, hervorgebracht durch ein äusserst dünnes Gas, zusammengehalten werden. Unter dieser Annahme untersucht er nach einander: die allgemeinen Gesetze für einen Gasball im freien Raume, die Dichte und Temperatur der Himmelskörper, insbesondere der Kometen und Meteoriten, die Gestalt der schweiflosen Kometen, die Gestalt und inneren Bewegungen der geschweiften Kometen und schliesst mit Betrachtungen über den wahrscheinlichen einstigen kometarischen Zustand der Planeten. Die Untersuchung nimmt in jedem einzelnen Fragepunkte einen recht gründlichen, exacten Anfang, doch werden die Rechnungen nicht viel weiter geführt, als ihre Entwickelung in bekannten mechanischen Theoremen bereits vorgefunden ward; von da an werden noch eine zeitlang die Vorgänge an den Teilen ohne Rücksicht auf das System verfolgt, und endlich bringt die lose Phantasie mit Ausserachtlassung aller Causalverbindung das gewünschte Ziel herbei. Die Schweife sollen aus Teilen der Kometen entstehen, welche zuerst nach der Sonne zu abgerissen, um den Kometen herum weit nach der abgekehrten Seite hin fliegen, dann von ihm wieder zurückgezogen werden. Hier beruht aber allein die Abtrennung auf einer, noch dazu falschen, Rechnung. Es ist nicht beachtet worden, dass die Anziehung der Sonne durch die Centri-

fugalkraft im Schwerpunkt aufgehoben wird, daher die Abstände des neutralen Punkts nicht in zweiter, sondern in dritter Potenz in Anrechnung zu bringen sind. Doch, wo auch immer der neutrale Punkt liegen mochte, es ist unbegreiflich, wie der Verfasser einer Kraft, die momentan null, vor und nachher, sowie in der Umgebung, unendlich klein ist, die Wirkung einer plötzlichen, tumultuarischen Bewegung zuschreiben konnte, welche die abgetrennten Teile fortschleudern sollte. Ebenso fehlt aller Grund für die fernere Bewegung, wie er sich dieselbe vorstellt. H.

Grundzüge der Meteorologie. Die Lehre von Wind und Wetter nach den neuesten Forschungen gemeinfasslich dargestellt von H. Mohn, Professor der Meteorologie an der Universität zu Christiania, Director des k. norwegischen meteorologischen Instituts. Deutsche Originalausgabe. Mit 24 Karten und 35 Holzschnitten. Berlin 1875. Dietrich Reimer. 304 S.

Dieses bereits ruhmvoll anerkannte Werk kann man unbedenklich den grössten didaktischen Leistungen zuzählen, die auf irgend einem wissenschaftlichen Gebiete betätigt worden sind. Es gehörte in der Tat eine seltene Begabung dazu, bei Behandlung eines Gegenstandes, der mit der Zeit so grosse Dimensionen angenommen hat, und der theoretischen Concentration einen so hartnäckigen Widerstand darbietet, wie die Meteorologie, die beiden auf dem Titel genannten Ziele, Einführung in den Standpunkt der neuesten Forschungen und Gemeinfasslichkeit, so vollkommen vereint zu erreichen. Physikalische Einsicht und richtige Logik, welche man wol sonst geneigt wäre als selbstverständliche Voraussetzungen unerwähnt zu lassen, müssen gleichwol factischen Zuständen gegenüber als Auszeichnungen genannt werden, welche dem Vorliegenden ohne Einschränkung zuzuerkennen sind. Namentlich hat es der Verfasser verstanden, ohne Unterbrechung des Connexes der Darstellung die hypothetischen Elemente sammt den mehr und weniger sichern Folgerungen sichtlich geschieden zu erhalten von der Mitteilung und Anordnung der Tatsachen. Obwol die Aufgabe der Meteorologie in der Erforschung der Ursachen der Veränderung der Zustände liegt, so bringt es doch ihre Eigentümlichkeit mit sich, dass bei weitem der grösste Teil des Vortrags der Auffassung der Zustände selbst gewidmet sein muss, dass es daher erst einen umfangreichen Lehrstoff rein beschreibend zu behandeln giebt, ehe von Ursachen, d. h. von der in Atmosphäre factisch wirksamen Combination derselben, nicht von den experimentell darstellbaren Wirkungsrelationen, welche letztere zur Auffassung beitragen und sich von der Beschreibung nicht sondern lassen, klarerweise die Rede sein kann. Im Zustand der Atmosphäre scheiden sich 5 Elemente, die in

den ersten 5 Capiteln behandelt werden: Temperatur, Wasserdampfgehalt, Druck, Wolkenbildung und Niederschlag. In Betreff eines jeden werden die Instrumente und das Beobachtungsverfahren, die eingeführten Gradirungen und Classificirungen, die Statistik der Resultate, die sich local und temporal ausdehnt, und deren Verwendungsweise beschrieben. Die locale Darstellung wird nach wenigen Beispielen durch Karten vertreten. Hierauf handelt das sechste Capitel vom Wetter, wo nun das Zusammenwirken aller vorher betrachteten Umstände discutirt wird. Besonders ausführlich werden die Vorgänge bei den Wirbeln und deren Bewegungen erörtert. Es folgen dann noch 3 Capitel über die Stürme, die Gewitter, die Klimatologie und Vorausbestimmung des Wetters. Das Buch war 2 Jahre früher in norwegischer Sprache erschienen. Die Karten der isothermischen und isobarischen Linien sind nach Dove und Buchau mit Benutzung des später hinzugekommenen Materials construirt, die Karten über den Druck der Wasserdämpfe neu entworfen. Als Hauptquellen führt der Verfasser die klimatologischen Mitteilungen in der Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie und die Publicationen des meteorological office in London, der schottischen meteorologischen Gesellschaft, des niederländischen meteorologischen Instituts sowie die Jahrbücher und Bulletins der übrigen meteorologischen Centralanstalten an. H.

Physik.

Die beiden Urkräfte der Natur. Ein Beitrag zur Physik und Astronomie von H. C. Howe. Lübeck 1876. Rudolf Seelig. 98 S.

Eine Probe von unentwickeltem Denkvermögen in einem Grade, wie es nur bei keinem oder ganz erfolglosem Schulbesuch vorkommen kann, und wo man gern jeden Versuch einer Verständigung aufgiebt, in starkem Contrast mit dem Umfang herbeigezogener Kenntnisse von physikalischen Gegenständen. H.

Das Moleculargesetz mit besonderer Anwendung auf das Wasser, den Wasserdampf und die Luft. Von P. E. Harder. Hamburg 1866. Otto Meissner. 168 S. — Ergänzungen und Erläuterungen zum Vorstehenden. 1874.

Mit dem Moleculargesetz bezeichnet der Verfasser die von ihm hypothetisch aufgestellte Relation

$$P = Am(T + Bm^{\frac{4}{3}}) - Cm^{\frac{1}{3}}$$

zwischen dem Druck P, der Temperatur T und der Dichtigkeit m

eines vollkommenen Gases. Der Ausdruck wird zwar durch vorausgehende Betrachtung motivirt, und tritt der Darstellungsform nach als Resultat auf, doch beschränkt sich die Betrachtung auf beliebig ausgesonderte Teile in speciell gewählter Anordnung und bleibt weit entfernt von einer wirklichen Deduction. Der Hauptrelation wird eine zweite

$$V^2 = T + Bm^2$$

zur Seite gestellt, worin V die Atomgeschwindigkeit bedeuten soll. Beide haben im Grunde mit Molecularvorgängen nichts zu schaffen, da solche weder untersucht worden sind, noch von der untergelegten Beziehung der summarischen Grössen V u. s. w. auf Bewegung der Atome irgendwo Gebrauch gemacht wird, so oft sie sich auch erwähnt findet. Daher ist ein principiell theoretischer Fortschritt in der Aufstellung nicht wol ersichtlich; es kann sich bloss noch darum handeln, ob dieselbe den Wert einer empirischen Formel hat. Dem entsprechend werden dann auch im Verlauf der Schrift die Consequenzen der Relation für das Verhalten des Wassers, des Wasserdampfs und der Luft entwickelt. Die Vergleichung derselben mit Versuchsresultaten, auf die es jetzt ankam, da von ihr allein noch ein günstiges Urteil zu erwarten war, ist eine äusserst dürftige, und selbst die wenigen Angaben zeigen keine befriedigende Uebereinstimmung. Durch die 8 Jahre später erschienenen Ergänzungen und Erläuterungen, in welchen der Verfasser gewisse Mängel der Begründung einräumt, die Aufstellung selbst aber aufrecht hallen will, ist nicht das mindeste gebessert. Zum grössten Teil sind sie auf fernere Stützung der ungenügenden Vorbetrachtungen gerichtet, die sie aber nur vervielfältigen und mit überflüssigem Wortreichtum umgeben. H.

Exposition analytique et expérimentelle de la théorie mécanique de la chaleur. Par G. A. Hirn. Troisième édition, entièrement refondue. Tome second. Paris 1876. Gauthier-Villars. 435 S.

Dieser zweite Band schliesst den ersten Teil der mechanischen Wärmetheorie. Er enthält davon das 4te und 5te Buch. Ersteres beschäftigt sich ausschliesslich mit den thermischen Motoren, letzteres behandelt nach einander folgende Themata: die absolute Wärmecapacität der Körper, die innere Arbeit an sich betrachtet, die Zerlegung der innern und äussern Arbeit in ihre verschiedenen Factoren, das Gesetz, welches das Atomvolum, das interatomische Volum, das zur Erscheinung tretende Volum, den innern und äussern Druck und die absolute Temperatur verbindet, die Ausdehnung des Gesetzes für Wärmequantum und Temperatur auf Liquiden und die Allgemeingültigkeit desselben. Es folgt dann noch ein Rückblick, eine kritische Besprechung einzelner Punkte und allgemeine Schlüsse. H.

Die Theorie der Wärme. Von Dr. Hermann Scheffler. Mit einer Figurentafel. Braunschweig 1875. Friedrich Vieweg und Sohn. 71 S.

Aus einem beigefügten Prospect ersieht man, dass das Vorliegende als Probestück aus einem Universalwerke, die gesammte Naturwissenschaft einschliesslich der Naturphilosopie unter dem Titel: „Die Naturgesetze“ umfassend, ausgegeben wird, um im voraus Gelegenheit zu einer Beurteilung darzubieten. Gleich der Anfang der Schrift, in welchem der Verfasser eine Originalhypothese aufstellt, zeugt von einer seltenen Unfähigkeit seine Gedanken mitzuteilen. Man bleibt dabei in Zweifel, ob er selbst die fehlenden Bestimmungen hinzugedacht und nur vergessen hat sie auszusprechen, oder ob ihm das Bewusstsein der Erfordernisse eines klaren Gedankens gänzlich abging. Das letztere wird, wenn man weiter liest, das wahrscheinlichere. Die Neuzeit ist sehr ergiebig an litterarischen Erzeugnissen, die mit Weltideen auftreten ohne von den elementären Bedingungen exacter Auffassung eine Ahnung zu haben. Wir können nicht auf jedes der Art ausführlich eingehen. In Betreff des gegenwärtigen ist zu wünschen, dass das beabsichtigte Unternehmen nicht zur Ausführung kommt.

H.

Jordmagnetiska bestämningar i Sverige under åren 1869—1871. Af Rob. Thalén. Med 2 taflor. Till Kongl. Vet. Akad. inlemnad den 13 december 1871. Stockholm 1872. P. A. Norstedt och söner. 4°. 80 S.

Om spektra tillhörande yttrium, erbium, didym och lanthan. Af Rob. Thalén. Med en tafla. Till Kongl. Vet. Akad. inlemnad den 9 september 1873. Stockholm 1874. P. A. Norstedt o. söner. 4°. 24 S.

Redogörelse för en ny method att medelst magnetiska mätningar undersöka jernmalmfält, jemte anförande af några i sammanhang dermed anstälda experimenter. Af Rob. Thalén. Öfversigt af K. Vet. Akad. förh. 1874. Nr. 2. Stockholm. 15 S.

Om de isodynamiska ytorna kring en vertikal magnetstång, med tillämpning häraf vid en på magnetiska mätningar grundad undersökning af jernmalmfält. Af Rob. Thalén. Öfv. af K. Vet. Akad. förh. 1874. Nr. 5. Stockholm. 13 S.

Om magnetiska mätningar å jernmalmfält. Af Rob. Thalén. Öfv. af K. Vet. Akad. förh. 1874. Nr. 8. Stockholm. 21 S.

Recherches sur les spectres des métalloïdes. Par A. J. Ångström et T. R. Thalén. (Extr. des Nova Acta R. Soc. Sc. Upsal.,

sér. III. vol. IX.) Avec 2 planches. Upsal 1875. Ed. Berling. 4°. 34 S.

Vier von diesen 6 Arbeiten handeln vom Magnetismus, zwei von Spectralanalysen; schliessen wir uns in der Betrachtung dieser Scheidung in 2 Classen an. Die erste Arbeit ist ein Bericht über Messungen, welche der Verfasser im Laufe dreier Jahre in dem Teile von Schweden zwischen Umeå (Nordende) und Schonen (Südende) angestellt hat um die erdmagnetischen Constanten zu ermitteln, eine Untersuchung, welche vor ihm von Ångström, Lemström und Lundquist begonnen und gefördert worden war. Es ist dies ein Landstrich, in welchem die localen Störungen besonders hohe Grade erreichen. Die Schrift enthält die Beschreibung der Instrumente, des Beobachtungs- und Berechnungsverfahrens, die Aufzeichnung der Beobachtungsresultate und die Bestimmung der Constanten.

Die dritte, vierte und fünfte Schrift haben die Entdeckung der Eisenerzlager auf magnetischem Wege zum Ziele, was jedoch auch Anlass bot, eine geometrische Aufgabe in analytischem Interesse zu verfolgen und zu lösen. Im dritten Artikel wird das Messungsverfahren und die Construction der isogonischen und isodynamischen Linien, welche 2 Pole, einen des Maximums, einen des Minimums der Ablenkung, umschliessen, beschrieben, erstere entsprechend der Wirkung einer verticalen Magnetstange und des Erdmagnetismus, letztere der Wirkung dieser zwei und eines fernen Deviationsmagneten. Um auch auf die Tiefe des Centrums der Eisenmasse zu schliessen, werden im vierten Artikel die isogonische und isodynamische Fläche berechnet. Der fünfte Artikel enthält theoretische Betrachtungen, welche die zur Ermittelung der Lage eines Eisenerzlagers anzustellenden Intensitäts-, Inclinations- und Declinations-Beobachtungen leiten, und handelt zum grössten Teil von der Bestimmung des Südpols der Eisenmasse. Der zweite Artikel ist ein Bericht über Versuche, welche darauf ausgingen, die Spectra des Yttriums und Erbiums, sowie die des Didyms und Lanthoms gesondert zu erhalten, was in der Tat gelang, mit dem Resultat, dass die anscheinend gemeinsamen Linien nur je einem von beiden Stoffen angehörten. Die sechste Schrift, noch von Ångström bearbeitet, nach seinem Tode von Thalén zusammengestellt und herausgegeben, ist eine umfassende Abhandlung, welche die gesammten Untersuchungen über die Spectra der Metalloide hinsichtlich des bis jetzt Erreichten entwickelt ohne über Specialversuche zu berichten. Sie handelt nach einander von den Spectren der alkalischen und alkalinerdigen Metalle, dann des Kohlenstoffs und seiner Verbindungen, dann des Azotes und seiner Verbindungen, stellt dann die Versuchsweisen zusammen, erörtert die Bestimmung der Wellenlängen und giebt schliesslich die Tabelle der Resultate. H.

Verschiedene Schriften, Zeitschriften.

Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Seriei tertiae vol. VIII. 1873. IX. 1874. 1875.

Der Inhalt des 8ten Bandes an mathematischen und mathematisch physikalischen Abhandlungen ist folgender.

H. Gyldén: Untersuchungen über die Rotation der Erde.

R. Hoppe: Systeme gleicher Linien und Flächen begrenzt durch gemeinsame Radien.

M. Falk: Ueber die Integration partieller Differentialgleichungen $n$ter Ordnung mit 1 abhängigen und 2 unabhängigen Variabeln.

L. A. Forssman: Von den Relationen zwischen dem Nordlicht, den magnetischen St¨rungen und den meteorologischen Erscheinungen.

Göran Dillner: Abhandlung über höheren geometrischen Calcul.

Der Inhalt des 9ten Bandes ist folgender.

G. Lundquist: Ueber die Reflexion des Lichtes an der Oberfläche isotroper Körper.

Otto Pettersson: Untersuchungen über die Molecularvolumina einiger Reihen von isomorphen Salzen.

C. F. Lindman: Ueber eine transscendente Function.

Herman Schultz: Mikrometrische Beobachtungen von 500 Nebelflecken.

H. Hildebrand Hildebrandsson: Ueber die obern Ströme der Atmosphäre in ihrer Beziehung zu den isobarymetrischen Linien.

A. J. Ångström und T. R. Thalén: Untersuchungen über die Spectra der Metalloide. H.

Nouvelle Correspondance Mathématique. Publié par Eugène Catalan, ancien élève de l'école polytechnique, Docteur ès sciences, Professeur à l'université de Liége, etc. et Paul Mansion, Docteur spécial en sciences mathématiques, Professeur à l'université de Gand. Tome I. Mons, 1874. 1875. Hector Manceaux.

In Betreff der 3 ersten Lieferungen verweisen wir auf litt. Ber. 228. Der Inhalt der, besonders an Aufgaben reichen 3 übrigen an Aufsätzen ist folgender.

P. Mansion: Principien der Theorie der Determinanten nach Baltzer und Salmon (2 Artikel).

J. **Neuberg**: Ueber 2 Probleme von Simon Lhuilier.

E. **Catalan**: Ueber einen geometrischen Ort.

L. **Saltel**: Sätze über die Curven und Flächen 3. Ordnung.

E. **Catalan**: Ueber die binomische Formel.

De Tilly: Note über das Princip des arithmetischen Mittels und dessen Anwendung auf die mathematische Theorie der Fehler.

B. **Niewenglowski**: Note über die Bogen sphärischer Curven.

P. **Mansion**: Ueber eine Maximum-Frage, Huygen'sches Problem.

E. **Catalan**: Ueber die Asymptoten der algebraischen Curven.

H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXXXI.

Methoden und Principien.

Berthold, G., John Holland u. d. Monismus d. Gegenwart. 8. Heidelberg, Winter. 2 Mk. 80 Pf.

Howe, H. C., d. beiden Urkräfte d. Natur. 8. Lübeck, Seelig. 1 Mk. 60 Pf.

Scheffler, H., d. Naturgesetze u. ihr Zusammenhang m. d. Prinzipien d. abstracten Wiss. 1. Thl. 1. Lfg. 8. Leipzig, Förster. 10 Mk.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

August, F., d. Elemente d. Arithmetik f. d. Mittelklassen höherer Schulen u. z. Repetition in d. oberen Klassen. 8. Berlin, Winckelmann & S. 1 Mk.

Frischauf, J., Lehrb. d. allg. Arithmetik. 3. Aufl. 8. Graz, Leuschner & L. 2 Mk. 40 Pf.

Gerlach, H., Lehrb. d. Mathematik. 1. Thl. 3. Aufl. 8. Dessau, Reissner. 2 Mk.

Hermes, O., Elementaraufg. aus d. Algebra. 8. Berlin, Winckelmann & S. 1 Mk. 60 Pf.

Huther, P., Resultate z. 7. Aufl. d. Sammlg. v. arithmet. Aufg. in systemat. Ordng. 8. Regensburg, Pustet. 1 Mk.

Paulson, A., Lehrb. d. Planimetrie. 2. Aufl. 8. Dorpat, Schnakenburg. Geb. 3 Mk.

Petrick, C. L., Multiplications-Tab. geprüft m. d. Thomas'schen Rechenmaschine. 1. Lfg. 1—1000. Fol. Berlin, Nauck. 3 Mk.

Ronkewitz, Th. G., Anfangsgründe d. Arithmetik u. d. Trigonometrie. 2. Aufl. 8. Neuwied, Heuser. 1 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Boltzmann, L., zur Integration d. partiellen Differentialgleichgn. 1. Ordnung. 8. Wien, Gerold's Sohn. 30 Pf.

Diekmann, O., Einleitg. in d. v. d. Determinanten u. ihrer Anwendung auf d. Gebiete d. niedern Mathematik. 8. Essen, Bädeker. 1 Mk.

Faa de Bruno, F., Théorie des formes binaires. 8. Turin. Leipzig, Brockhaus' S. 15 Mk.

Greve, A., e' Problem aus d. Variations-Rechng. 8. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk.

Harmuth, Th., Beiträge z. Theorie d. Funktion $E(x)$. 8. Ebd. 1 Mk.

Riemann, B., partielle Differentialgleichgn. u. deren Anwendg. auf physikal. Fragen. 2. Aufl. 8. Braunschweig, Vieweg & S. 8 Mk.

Weber, H., Theorie d. Abel'schen Functionen v. Geschlecht 3. 4. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Geometrie.

Frahm, W., üb. d. Erzeugg. d. Curven dritter Classe u. vierter Ordnung. 8. Tübingen, Fues. 1 Mk.

Greve, E., üb. d. spirische Oberfläche u. ihre Durchschnittscurven m. Ebenen. 4. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk. 60 Pf.

Horn, D., geometr. Anschauungscursus. 8. Essen, Bädeker. 60 Pf.

Müller, J., üb. reciproke Polaren zweiten Grades. 8. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk. 40 Pf.

Schottky, F., üb. d. conforme Abbildg. mehrfach zusammenhängender ebner Flächen. 8. Berlin. Breslau, Koebner. 1 Mk. 20 Pf.

Geodäsie und praktische Geometrie.

Bauernfeind, C. M. v., Elemente d. Vermessungskunde. 5. Aufl. 2 Bde. 8. Stuttgart, Cotta. 15 Mk.

Liebenam, A., Lehrbuch d. Markscheidekunst u. prakt. Geometrie. 8. Leipzig, Mentzel. 9 Mk.; geb. 10 Mk. 20 Pf.

Mechanik.

Kärger, E., Unters. d. Bahn e. Punktes, d. m. d. Kraft $\frac{k}{r^4}$ angezogen od. abgestossen wird, wobei k eine Constante u. r die Entfernung d. angezogenen Punktes vom Kraftcentrum bedeutet. 8. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk. 20 Pf.

Optik.

Lommel, E., üb. d. Interferenz d. gebeugten Lichtes. 3. Mittheilung. 8. Erlangen, Besold. 30 Pf.

Tyndall, J., das Licht. Hrsg. v. G. Wiedemann. 8. Braunschweig, Vieweg & S. 6 Mk.

Astronomie und Meteorologie.

Fortschritte, die, auf d. Gebiete d. Astronomie. Nr. 3. 1875. 8. Leipzig, Mayer. 2 Mk.

Moesta, C. G., Observaciones astronom. hechas en el observatorio nacional de Santjago de Chile en los años de 1856 à 1860. Tom. II. 4. Dresden, v. Zahn. 20 Mk.

Oerter, mittlere, f. 1876. O. v. 539 Sternen u. scheinbare Oerter f. d. J. 1876 v. 529 Sternen d. Verzeichnisses I. u. II., welches f. d. Beobachtg. d. Sterne d. nördl. Halbkugel bis z. 9. Grösse als Grundlage dienen soll. 8. Berlin, Dümmler. 2 Mk. 50 Pf.

Repertorium f. Meteorologie. Red. v. H. Wild. 4. Bd. 2. Hft. 4. Leipzig, Voss. 7 Mk. 50 Pf.

Sirius. Hrsg. v. R. Falb. 9. Bd. (6 Hefte). 8. Leipzig, Scholtze. procplt. 4 Mk.

Sternfreund, G., astronom. Führer pro 1876 u. in die Himmelskunde überhaupt. 16. München, Lit.-art. Anstalt. 1 Mk.

Ule, O., die Sternenwelt. 2. Aufl. 3. u. 4. Lfg. 8. Leipzig, Spamer. à 1 Mk.

Wochenschrift f. Astronomie, Meteorologie u. Geographie. Red. v. H. J. Klein. N. F. 19. J. 1876. Nr. 1. 8. Halle, Schmidt. procplt. 9 Mk.

Zeitschrift d. österreich. Gesch. f. Meteorologie. Red. v. C. Jelinek u. J. Hann. 11. Bd. 1876. (26 Nrn.). Nr. 1. 8. Wien, Braumüller. procplt. 10 Mk.

Physik.

Clausius, R., d. mechan. Wärmetheorie. 2. Aufl. 1. Bd. 8. Braunschweig, Vieweg & S. 8 Mk.

Gretschel, H., Katechismus d. Physik. 2. Aufl. 8. Leipzig, Weber. 2 Mk.

Repertorium f. Experimental-Physik, f. physikal. Technik, mathemat. u. astronom. Instrumentenkunde. Hrsg. v. Ph. Carl. 12. Bd. (6 Hefte). 1. Hft. 8. München, Oldenbourg. procplt. 19 Mk. 20 Pf.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen d. mathemat.-physikal. Classe d. k. bayer. Akademie d. Wiss. 12. Bd. 1. Abth. 4. München, Franz. 10 Mk. 50 Pf.

Bibliothek, polytechn. J. 1876. (12 Nrn.). Nr. 1. 8. Leipzig, Quandt & H. procplt. 3 Mk.

Zeitschrift f. mathemat. u. naturwiss. Unt. Hrsg. v. J. C. V. Hoffmann. 7. J. 1876. (6 Hefte). 1. Hft. 8. Leipzig, Teubner. procplt. 10 Mk. 80 Pf.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, hrsg. v. O. Schlömilch, Kahl u. M. Cantor. 21. J. 1876. (6 Hefte). 1. Hft. 8. Ebd. procplt. 18 Mk.

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Neunundfunfzigster Teil. Drittes Heft.

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1876.

XVII.

Principien der Flächentheorie.

Von

R. Hoppe.

Die gegenwärtige Bearbeitung der Flächentheorie reiht sich einer grössern Anzahl ähnlicher Arbeiten an, welche in neuster Zeit in französischen und italienischen Journalen erschienen sind. Das erwachte Streben, die Methode in successiven Schritten dem Ziele einer allseitig befriedigenden und dadurch definitiven Gestaltung zuzuführen, wovon dieselben Zeugniss ablegen, wird auch den neuen Versuch rechtfertigen, welcher das gleiche Ziel verfolgt. Es liegt mir jedoch ob, kurz zu bezeichnen, worin er sich unterscheiden soll, und inwiefern ich ihm einen Fortschritt vindicire. Ein Teil der betreffenden früheren Arbeiten hat, wie wir es verlangen müssen, in der Tat das Ganze der Theorie in Auge, sie lassen sich aber in der Wahl ihres Ausgangspunkts und ihrer Einführungen — anscheinend, denn Erklärung darüber wird nicht gegeben — durch apriorische Argumente bestimmen, die ich nicht für entscheidend halten kann; sie wählen dazu eine zu breite Basis, und erschweren infolge dessen den Einblick durch einen zu grossen Formelapparat. Andere Bearbeitungen hingegen sind mehr auf eine geeignete Basis bedacht gewesen; aber sie richteten sie nur auf leichte Herleitung gewisser Theoreme ein. Wir müssen beide Forderungen vereinigen. Die Principien müssen disponibele Werkzeuge der Untersuchung in allen Richtungen sein, ebendarum aber auch eine leichte Handhabung gestatten, sich daher in Einführungen auf den geringst möglichen Umfang beschränken. Ueber die Richtigkeit der Wahl kann nur der Erfolg entscheiden. Der Punkt, in welchem die Methoden aus einander gehen, und der bestimmend für die ganze fernere Gestaltung wird, ist die

Einführung der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung; denn die Gaussschen erster Ordnung sind allen gemeinsam und es ist kein Grund erdenklich davon abzugehen. Ich habe nur zu ihrer Bezeichnung des leichtern Schreibens und Lesens wegen die kleinen Buchstaben e, f, g statt der grossen gewählt. Die von mir aufgestellten 3 Fundamentalgrössen 2. Ordnung sind auch schon früher in Anwendung gekommen; doch nehme ich auf die betreffende Arkeit keinen Bezug, weil sie im übrigen keinen Berührungspunkt darbietet. Einziger Bestimmungsgrund war mir vielmehr, dass die theoretisch wichtigen geometrischen Eigenschaften und Bedingungen im einfachsten Connex mit den Werten und Relationen jener 6 Grössen stehen. Die Theorie wird aus folgenden 3 Abschnitten bestehen: I. Entwickelung der theoretisch wichtigen geometrischen Beziehungen auf allgemeiner Grundlage. II. Besondere Liniensysteme, nämlich Krümmungslinien, asymptotische Linien, orthogonal geodätische und Abbildungs-Liniensysteme. III. Besondere Arten von Flächen, welche sich dadurch auszeichnen, dass sie Lösungen von Problemen zulassen, die allgemein nicht lösbar sind. Die einfachsten Sätze der Curventheorie (Bd. 56. VII.) und der Cinematik (Bd. 55. IX.) setze ich als bekannt voraus.

I. Entwickelung der theoretisch wichtigen geometrischen Beziehungen auf allgemeiner Grundlage.

§. 1. Bestimmung von Punkten und Linien auf einer Fläche. Fundamentalgrössen 1. Ordnung. Eine Linie als Ort eines Punktes (xyz), den derselbe bei Variation des Parameters u erzeugt, ist bestimmt durch die Functionen

$$x = x(u); \quad y = y(u); \quad z = z(u)$$

Variirt die Linie mit einem zweiten Parameter v und erzeugt eine Fläche, so ist diese bestimmt durch die Functionen

$$x = x(u, v); \quad y = y(u, v); \quad z = z(u, v)$$

Dabei erzeugt jeder Punkt der obigen Linie, $u =$ const., eine neue Linie auf der Fläche, die wiederum bei Variation von u dieselbe Fläche erzeugt. Demnach durchkreuzen sich in jedem Punkte 2 Linien, genannt die Parameterlinien (u) und (v), welche bzhw. bei allein variirendem u und allein variirendem v erzeugt werden. Sofern durch die Werte von u und v der Punkt (xyz) oder der Punkt (uv) bestimmt ist, kann man u, v Coordinaten desselben nennen; zum Unterschied mögen sie superficielle Coordinaten heissen. Für $x = u$, $y = v$, $z = 0$ gehen sie in ebene cartesische Coordinaten über.

Bewegt sich der Punkt (uv) beliebig, d. h. bei beliebiger gleichzeitiger Variation von u und v, längs der Fläche, so ist das Element der erzeugten Linie ∂s ausgedrückt durch

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$$

wo

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial u}\partial u + \frac{\partial x}{\partial v}\partial v; \quad \partial y = \frac{\partial y}{\partial u}\partial u + \frac{\partial y}{\partial v}\partial v; \quad \partial z = \frac{\partial z}{\partial u}\partial u + \frac{\partial z}{\partial v}\partial v \quad (1)$$

Das Resultat der Einführung dieser Werte hat in Bezug auf ∂u, ∂v die Form:

$$\partial s^2 = e\partial u^2 + 2f\partial u\partial v + g\partial v^2 \quad (2)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} e &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ f &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \\ g &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

gesetzt ist. Die Coefficienten e, f, g heissen die Fundamentalgrössen 1. Ordnung. Sie haben für alle Linien s, die von demselben Punkte ausgehen, in diesem dieselben Werte, während das Verhältniss

$$k = \frac{\partial v}{\partial u}$$

für verschiedene Linien verschieden ist.

Unter dem Winkel zwischen 2 sich schneidenden Linien s, s' versteht man den, welchen ihre Tangenten im Schnittpunkt bilden. Die Richtungscosinus der erstern Tangente sind nach dem Obigen:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} + k\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{e + 2fk + gk^2}}; \quad \text{etc.}$$

Bezeichnet also ϑ den Winkel zwischen s und s', denen die Werte k und k' entsprechen, so findet man:

$$\cos\vartheta = \frac{e + f(k + k') + gkk'}{\sqrt{(e + 2fk + gk^2)(e + 2fk' + gk'^2)}} \quad (4)$$

Ist insbesondere s' die Parameterlinie (u), also $k' = 0$, und geht dann ϑ über in ϑ_0, so ist

$$\cos\vartheta_0 = \frac{e\partial u + f\partial v}{\sqrt{e}\sqrt{e\partial u^2 + 2f\partial u\partial v + g\partial v^2}} \quad (5)$$

Lässt man endlich auch s in die Parameterlinie (v), ϑ_0 in D übergehen, so wird $\partial u = 0$, also

$$\cos D = \frac{f}{\sqrt{eg}} \tag{6}$$

Da nun $\sqrt{e}\,\partial u$ und $\sqrt{g}\,\partial v$ die Werte von ∂s bzhw. für $\partial v = 0$ und $\partial u = 0$ sind, so folgt, dass e, g die Quadrate, f das mit dem Cosinus des Winkels zwischen den Parameterlinien multiplicirte Product der beiden Parameterlinienelemente, jedes dividirt durch das Parameterincrement bedeuten.

Aus dieser Bedeutung folgt, dass e, f, g unabhängig von der Lage der Axen der x, y, z sind.

Sind umgekehrt auf zwei Flächen, die man in denselben Parametern u, v darstellt, die Werte von e, f, g dieselben, so sind nach Gl. (2) auch die Längen aller entsprechenden Linien gleich; folglich kann man die eine Fläche durch Biegung ohne Dehnung oder Contraction auf die andere legen, und man hat den Satz:

S. 1. Alle Flächen, die, bezüglich auf dieselben Parameter, gleiche Fundamentalgrössen erster Ordnung haben, sind auf einander abwickelbar.

Endlich folgt noch aus (4) und (6), dass

$$f = 0$$

und

$$e + f(k + k') + gkk' = 0 \tag{7}$$

die Bedingungen des rechtwinkligen Durchschnitts bzhw. der Parameterlinien und zweier beliebigen Linien sind.

§. 2. **Berührungsebene und Normale.** Die Gleichungen der Tangente einer Curve s auf der Fläche sind:

$$\xi = x + R\frac{\partial x}{\partial s}; \quad \eta = y + R\frac{\partial y}{\partial s}; \quad \zeta = z + R\frac{\partial z}{\partial s}$$

Setzt man für ∂x, ∂y, ∂z ihre Werte (1) und eliminirt ∂u, ∂v, so kommt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \xi - x \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \eta - y \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \zeta - z \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

das ist die Gleichung einer Ebene. Da sie ∂u, ∂v nicht enthält, so gilt sie gleicherweise für die Tangenten aller Curven, die durch den Punkt (uv) gehen. Die so bestimmte Ebene, in welcher demnach alle diese Tangenten liegen, heisst die Berührungsebene, ihre Normale im Berührungspunkt errichtet die Normale der Fläche. Die Richtungscosinus der einen wie der andern p, q, r müssen den Coefficienten von ξ, η, ζ proportional sein; daher hat man:

$$pt = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}; \quad qt = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}; \quad rt = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{9}$$

Zur Bestimmung von t nimmt man die Quadratsumme der 3 Grössen; dann kommt:

$$t^2 = eg - f^2 \tag{10}$$

Da die Normale auf allen Tangenten senkrecht steht, so ist für jede Variation längs der Fläche

$$p\partial x + q\partial y + r\partial z = 0 \tag{11}$$

Der Formel (6) lässt sich jetzt eine zweite an die Seite stellen; es ist

$$f = \sqrt{eg}\cos D; \quad t = \sqrt{eg}\sin D \tag{12}$$

§. 3. **Flächenelement.** Denkt man ein Flächenstück Ω von der Parameterlinie (u) bei variirendem v erzeugt, so nimmt es, wenn v in $v + \partial v$ übergeht, um den unendlich schmalen Streifen $\partial\Omega$ zwischen 2 consecutiven Parameterlinien (u) zu. Dieser Streifen wird zugleich mit dem Flächenstück Ω von der Parameterlinie (v) bei variirendem u erzeugt, und sein Increment $\partial^2\Omega$, das er bei Uebergang von u in $u + \partial u$ erhält, ist das nach allen Richtungen unendlich wenig ausgedehnte Bogenviereck zwischen 2 Par consecutiven Parameterlinien (u) und (v) und heisst als solches das Element der Fläche, in dem Sinne dass durch Integration nach u und v daraus die Fläche Ω erhalten wird. Dieses Bogenviereck lässt sich als ein Parallelogramm in der Berührungsebene betrachten, dessen 2 an den Punkt (uv) anstossende Seiten die auf den Tangenten der Parameterlinien abgetragenen Linienelemente

$$\sqrt{e}\,\partial u, \qquad \sqrt{g}\,\partial v$$

bilden mit dem Winkel D zwischen sich. Der Inhalt ist daher

$$\partial^2\Omega = \sqrt{e}\,\partial u \,.\, \sqrt{g}\,\partial v \sin D$$

das ist nach (12):

$$\partial^2\Omega = t\,\partial u\,\partial v, \quad \text{oder} \quad \Omega = \iint t\,\partial u\,\partial v \tag{13}$$

Gemäss dieser geometrischen Bedeutung der Grösse t kann man dieselbe den Flächendifferentialquotienten nennen.

§. 4. **Körperelement.** Denkt man einen Körper P von einer Fläche, ausgedrückt in den Parametern u, v bei Variation mit einem dritten Parameter w erzeugt, so ist, wenn w in $w+\partial w$ übergeht, das Increment des Körpers ∂P die unendlich dünne Schale zwischen 2 consecutiven Flächen. Während nun das Flächenstück Ω die Schale ∂P erzeugt, erzeugt das Flächenelement $\partial^2\Omega$ das nach allen Richtungen hin unendlich wenig ausgedehnte Körperelement $\partial^3 P$, in Gestalt eines Prismas auf der Grundfläche $\partial^2\Omega$ und von einer Höhe gleich der Projection der Verrückung des Punktes (uv) auf die Normale der Fläche. Die Projectionen der Verrückung auf die Axen der x, y, z sind

$$\frac{\partial x}{\partial w}\partial w, \qquad \frac{\partial y}{\partial w}\partial w, \qquad \frac{\partial z}{\partial w}\partial w$$

also ihre Projection auf die Normale

$$h=\left(p\frac{\partial x}{\partial w}+q\frac{\partial y}{\partial w}+r\frac{\partial z}{\partial w}\right)\partial w \tag{14}$$

folglich ist das Körperelement

$$\partial^3 P=h\partial^2\Omega=ht\partial u\partial v \quad \text{oder}$$
$$\partial^3 P=T\partial u\partial v\partial w \tag{15}$$

wo nach Einführung der Werte (14) (9)

$$T=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \tag{16}$$

wird.

§. 5. **Fundamentalgrössen zweiter Ordnung.** Als Fundamentalgrössen 2. Ordnung betrachten wir folgende drei:

$$\left.\begin{aligned} E&=p\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+q\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+r\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ F&=p\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+q\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+r\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} \\ G&=p\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+q\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+r\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Auch diese sind unabhängig von der Lage der Axen der x, y, z, wie eine Orthogonalsubstitution für x, y, z leicht zeigt. Vermittelst ihrer lassen sich nun die Covarianten (d. i. mit der Axenlage variirenden) 2. Ordnung auf je 3 Covarianten 1. Ordnung und Invarianten (d. h. von jener unabhängige) 2. Ordnung zurückführen, in folgender Form:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= A\frac{\partial x}{\partial u}+A_1\frac{\partial x}{\partial v}+A_2 p \\
\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} &= B\frac{\partial x}{\partial u}+B_1\frac{\partial x}{\partial v}+B_2 p \\
\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= C\frac{\partial x}{\partial u}+C_1\frac{\partial x}{\partial v}+C_2 p
\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial u} &= H\frac{\partial x}{\partial u}+H_1\frac{\partial x}{\partial v} \\
\frac{\partial p}{\partial v} &= J\frac{\partial x}{\partial u}+J_1\frac{\partial x}{\partial v}
\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

gültig für jede Lage der x Axe, so dass die Coefficienten dieselben bleiben, wenn x in y und z, p in q und r übergeht. Um die Coefficienten zu bestimmen multipliciren wir die 5 Gleichungen mit $\frac{\partial x}{\partial u}$ und nehmen die Summe der je 3 analogen für x, y, z. Dabei ist hinsichtlich der linken Seiten zu beachten, dass durch Differentiation der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
p\frac{\partial x}{\partial u}+q\frac{\partial y}{\partial u}+r\frac{\partial z}{\partial u} &= 0 \\
p\frac{\partial x}{\partial v}+q\frac{\partial y}{\partial v}+r\frac{\partial z}{\partial v} &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

erhalten wird:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}+E &= 0 \\
\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}+F &= 0 \\
\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}+F &= 0 \\
\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}+G &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Dann kommt:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial u} = Ae + A_1 f \\ \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v} = Be + B_1 f \\ \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u} = Ce + C_1 f\end{array}\right\} \quad (22)$$

$$\left.\begin{array}{r}-E = He + H_1 f \\ -F = Je + J_1 f\end{array}\right\} \quad (23)$$

Multiplicirt man dieselben Gleichungen statt dessen mit $\frac{\partial x}{\partial v}$, so giebt die Summe der analogen:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v} = Af + A_1 g \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u} = Bf + B_1 g \\ \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial v} = Cf + C_1 g\end{array}\right\} \quad (24)$$

$$\left.\begin{array}{r}-F = Hf + H_1 g \\ -G = Jf + J_1 g\end{array}\right\} \quad (25)$$

Hiernach sind je 2 der 10 Coefficienten durch 2 lineare Gleichungen bestimmt, aus denen ihre Werte leicht hervorgehen. Multiplicirt man endlich statt dessen mit p, so giebt die Summe der Analogen:

$$E = A_2; \quad F = B_2; \quad G = C_2$$

und die 2 letzten Gleichungen sind identisch erfüllt. Sofern die gefundenen Werte unabhängig von der Axenlage sind, ist die anfängliche Aufstellung gerechtfertigt.

§. 6. **Relationen zwischen den Fundamentalgrössen.** Differentiirt man die erste, zweite, vierte der Gl. (18) (19) nach v, die zweite, dritte, fünfte nach u, so erhält man je 2 Ausdrücke für $\frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v}$, $\frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2}$, $\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v}$, die einander gleichgesetzt 3 Gleichungen ergeben, sämmtlich von der Form

$$K\frac{\partial x}{\partial u} + K_1\frac{\partial x}{\partial v} + K_2 p = 0$$

in der sie mit Hülfe derselben Gl. (18) (19) dargestellt werden können. Da diese für jede Axenlage gelten, so muss

$$K=0;\quad K_1=0;\quad K_2=0$$

sein. Unter den so entstehenden 9 Gleichungen ist eine für sich von selbst erfüllt; die übrigen geben übereinstimmend nur folgende 3 unabhängigen Resultate:

$$\begin{aligned}4(EG-F^2)+2\left(\frac{\partial^2 e}{\partial v^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right)\\ +\frac{e}{t^2}\left\{\left(2\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial e}{\partial v}\right)\frac{\partial g}{\partial v}-\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2\right\}\\ +\frac{f}{t^2}\left\{2\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial e}{\partial v}+2\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v}-4\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\right\}\\ +\frac{g}{t^2}\left\{\left(2\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial u}\right)\frac{\partial e}{\partial u}-\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)^2\right\}=0\end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{aligned}2t^2\left(\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial u}\right)-(Eg-2Ff+Ge)\frac{\partial e}{\partial v}+(Fg-Gf)\frac{\partial e}{\partial u}\\ +2(Ge-Ff)\frac{\partial f}{\partial u}+(Ef-Fe)\frac{\partial g}{\partial u}=0\end{aligned}\tag{27}$$

$$\begin{aligned}2t^2\left(\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial v}\right)-(Eg-2Ff+Ge)\frac{\partial g}{\partial u}+(Gf-Fg)\frac{\partial e}{\partial v}\\ +2(Eg-Ff)\frac{\partial f}{\partial v}+(Fe-Ef)\frac{\partial g}{\partial v}=0\end{aligned}\tag{28}$$

Die erste, welche wir die Gauss'sche Relation nennen können, ist wichtig, sofern sie zeigt, dass die Grösse $EG-F^2$ für bestimmte Parameter nur von Fundamentalgrössen 1. Ordnung abhängt, folglich nach §. 1. auf allen auf einander abwickelbaren Flächen denselben Wert hat.

§. 7. **Relation zwischen den Krümmungen berührender Curven (Meusnier'scher Satz).** Multiplicirt man die erste der Gl. (21) mit ∂u^2, die zweite und dritte mit $\partial u\partial v$, die vierte mit ∂v^2 und addirt sie, so kommt:

$$\partial p\,\partial x+\partial q\,\partial y+\partial r\,\partial z+E\partial u^2+2F\partial u\,\partial v+G\partial v^2=0\tag{29}$$

wo die vollständigen Differentiale gemäss der Variation in einer beliebigen Richtung längs der Fläche, der Richtung der Tangente einer Curve s zu nehmen sind. Wendet man auch Gl. (11) auf dieselbe Curve an, dividirt beide Gleichungen durch ∂s und differentiirt dann letztere nach dem Krümmungswinkel τ dieser Curve, so kommt:

$$p\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial x}{\partial s}+q\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial y}{\partial s}+r\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{E\partial u^2+2F\partial u\,\partial v+G\partial v^2}{\partial\tau\,\partial s}$$

Da die 2mal 3 Factoren zur Linken die Richtungscosinus der Flächennormale und der Hauptnormale von s sind, so drückt die Linke den Cosinus des Winkels zwischen beiden Normalen aus. Setzen wir diesen $= \Theta$, so wird die Gleichung:

$$\frac{\partial \tau}{\partial s} \cos \Theta = \frac{E \partial u^2 + 2F \partial u \partial v + G \partial v^2}{e \partial u^2 + 2f \partial u \partial v + g \partial v^2} \tag{30}$$

Die Grösse zur Rechten hängt nur von u, v und $\frac{\partial v}{\partial u}$ ab, welche einen Punkt und eine Tangentialrichtung bestimmen, ist also dieselbe für alle Curven s auf der Fläche, die sich im Punkte (uv) berühren. Wir legen nun allen diesen Curven diejenige zugrunde, in welcher eine durch die Flächennormale und durch jene Tangente gelegte Ebene die Fläche schneidet. Diese ebene Curve, kurz bezeichnet durch den Normalschnitt im Punkte (uv) für die Richtung $(\partial u, \partial v)$, hat die Flächennormale zur Hauptnormale, also ist für sie $\Theta = 0$. Ferner drückt $\frac{\partial \tau}{\partial s}$ die Krümmung, $\frac{\partial s}{\partial \tau}$ den Krümmungsradius der Curve s aus. Bezeichnet also ϱ den Krümmungsradius des Normalschnitts, so ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{E \partial u^2 + 2F \partial u \partial v + G \partial v^2}{e \partial u^2 + 2f \partial u \partial v + g \partial v^2} \tag{31}$$

woraus verglichen mit (30):

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = \varrho \cos \Theta \tag{32}$$

Wir haben demnach zur Charakterisirung der Fläche in einem Punkte von jetzt an nur die Krümmungen von Normalschnitten zu untersuchen.

§. 8. **Summe der Krümmungen zweier sich unter rechten Winkeln schneidenden Normalschnitte.** Ohne Rücksicht auf die Bedeutung der Buchstaben hat man die identische Gleichung:

$$\begin{aligned}(e + 2fk + gk^2)(E + 2Fk' + Gk'^2) + (e + 2fk' + gk'^2)(E + 2Fk + Gk^2) \\ = 2\{e + f(k + k') + gkk'\}\{E + F(k + k') + Gkk'\} \\ + (eG - 2fF + gE)(k - k')^2\end{aligned} \tag{33}$$

Haben jetzt e, f, g, k, k' die Bedeutung von §. 1., d. h. sind k, k' die Werte von $\frac{\partial v}{\partial u}$ für 2, im Punkte (uv) sich schneidende Curven, so ist nach Gl. (7)

$$e + f(k + k') + gkk' = 0 \tag{7}$$

die Bedingung, unter der die Curven sich rechtwinklig schneiden. Dies angenommen reducirt sich die Gleichung auf

$$(e+2fk+gk^2)(E+2Fk'+Gk'^2)+(e+2fk'+gk'^2)(E+2Fk+Gk^2)$$
$$= (eG-2fF+gE)(k-k')^2 \qquad (34)$$

Da hierin E, F, G noch beliebige Grössen sind, so setzen wir

$$E=e; \quad F=f; \quad G=g$$

dann kommt:

$$(e+2fk+gk^2)(e+2fk'+gk'^2) = t^2(k-k')^2 \qquad (35)$$

Die vorige Gleichung durch diese dividirt giebt:

$$\frac{E+2Fk+Gk^2}{e+2fk+gk^2}+\frac{E+2Fk'+Gk'^2}{e+2fk'+gk'^2} = \frac{eG-2fF+gE}{t^2}$$

worin noch immer E, F, G beliebige Grössen sind. Erteilt man ihnen ihre Bedeutung (17), so drücken nach (31) die 2 Terme zur Linken die Krümmungen der 2 Normalschnitte für die Richtungen der Tangenten der 2 genannten Curven aus. Bezeichnen also ϱ, ϱ' die Krümmungsradien zweier sich rechtwinklig schneidenden Normalschnitte, so ist

$$\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'} = \frac{eG-2fF+gE}{t^2} \qquad (36)$$

Da die Rechte unabhängig von $\frac{\partial v}{\partial u}$ ist, so hat man den Satz:

S. 2. Die Summe der Krümmungen zweier sich rechtwinklig schneidenden Normalschnitte ist für den bestimmten Schnittpunkt constant.

§. 9. **Hauptkrümmungen.** Der Ausdruck (31) von $\frac{1}{\varrho}$ variirt nur mit u, v und $\frac{\partial v}{\partial u} = k$, also für einen festen Punkt (uv) nur mit k, indem die Normalschnittsebene um die Normale rotirt. Differentiirt man unter dieser Voraussetzung Gl. (31) nach k, so kommt:

$$\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{1}{\varrho}\right) = \frac{1}{N}\begin{vmatrix} F+Gk & E+2Fk+Gk^2 \\ f+gk & e+2fk+gk^2 \end{vmatrix}$$
$$= -\frac{1}{N}\left\{\begin{vmatrix} E F \\ e f \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} G E \\ g e \end{vmatrix} k + \begin{vmatrix} F G \\ f g \end{vmatrix} k^2\right\} \qquad (37)$$

wo zur Abkürzung

$$N = \tfrac{1}{2}(e+2fk+gk^2)^2$$

gesetzt ist. Verschwindet dieser Ausdruck für jedes k, so ist $\frac{1}{\varrho}$ constant, ein Fall den wir später betrachten. Verschwindet er nur für bestimmte Werte von k, so entsprechen diesen ein Maximum und ein

Minimum von $\frac{1}{\varrho}$; denn, wenn nicht alle Krümmungen gleich sind, so muss bei einer vollen Umdrehung mindestens eine ein Maximum und eine ein Minimum sein, daher muss die quadratische Gleichung, welche k bestimmt, nämlich

$$\begin{vmatrix} E F \\ e f \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} G E \\ g e \end{vmatrix} k + \begin{vmatrix} F G \\ f g \end{vmatrix} k^2 = 0 \tag{38}$$

immer 2 reelle ungleiche Wurzeln haben, deren eine der Maximal-, die andere der Minimalkrümmung entspricht. Die 2, durch diese Wurzelwerte bestimmten Normalschnitte heissen die Hauptnormalschnitte, ihre Krümmungen die Hauptkrümmungen, ihre Ebenen die Hauptnormalebenen, ihre Tangenten die Hauptkrümmungstangenten, und deren Richtungen die Hauptkrümmungsrichtungen.

Sind k_1, k_2 die Wurzeln der Gl. (38), so wird

$$\begin{vmatrix} F G \\ f g \end{vmatrix} = M; \quad \begin{vmatrix} G E \\ g e \end{vmatrix} = M(k_1 + k_2); \quad \begin{vmatrix} E F \\ e f \end{vmatrix} = M k_1 k_2 \tag{39}$$

woraus durch Verbindung:

$$e + f(k_1 + k_2) + g k_1 k_2 = 0 \tag{40}$$

$$E + F(k_1 + k_2) + G k_1 k_2 = 0 \tag{41}$$

Erstere Gleichung sagt, dass die Hauptkrümmungsrichtungen auf einander senkrecht stehen; die Bedeutung der letztern wird in §. 13. zu Tage kommen. Da sich also die Hauptnormalschnitte rechtwinklig schneiden, so ist nach Gl. (36), wenn ϱ_1, ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien bezeichnen:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{eG - 2fF + gE}{t^2} \tag{42}$$

Setzt man ferner in Gl. (33) $k = k_1$, $k' = k_2$, und erst e, f, g für E, F, G, dann umgekehrt E, F, G für e, f, g, so erhält man nach Gl. (40) (41):

$$(e + 2fk_1 + gk_1^2)(e + 2fk_2 + gk_2^2) = t^2(k_1 - k_2)^2 \tag{43}$$

$$(E + 2Fk_1 + Gk_1^2)(E + 2Fk_2 + Gk_2^2) = (EG - F^2)(k_1 - k_2)^2 \tag{44}$$

und nach Division, zufolge (31):

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{EG - F^2}{t^2} \tag{45}$$

Da jetzt Summe und Product der Hauptkrümmungen bekannt ist, so ergeben sich beide einzeln als Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{t^2}{\varrho^2}-\frac{eG-2fF+gE}{\varrho}+EG-F^2=0 \tag{46}$$

Um jedoch zu finden, welche Wurzel zu k_1, welche zu k_2 gehört, untersuchen wir direct die Differenz beider

$$\varDelta=\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}$$

Nach Gl. (31) ist sie

$$\varDelta=\frac{E+2Fk_1+Gk_1^2}{e+2fk_1+gk_1^2}-\frac{E+2Fk_2+Gk_2^2}{e+2fk_2+gk_2^2}$$

Dies multiplicirt mit dem aus (43) bekannten Product beider Nenner giebt:

$$\varDelta t^2(k_1-k_2)^2=\begin{vmatrix} E+2Fk_1+Gk_1^2 & E+2Fk_2+Gk_2^2 \\ e+2fk_1+gk_1^2 & e+2fk_2+gk_2^2 \end{vmatrix}$$

$$=(k_1-k_2)\left\{-2\begin{vmatrix} EF \\ ef \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} GE \\ ge \end{vmatrix}(k_1+k_2)-2\begin{vmatrix} FG \\ fg \end{vmatrix}k_1k_2\right\}$$

und nach Einführung der Werte (39):

$$\varDelta=\begin{vmatrix} FG \\ fg \end{vmatrix}\frac{k_1-k_2}{t^2} \tag{47}$$

Die gefundenen Resultate vereinfachen sich, wenn man für E, F, G ihre Werte aus den Gl. (23) (25) substituirt; denn dann wird

$$\begin{vmatrix} EF \\ ef \end{vmatrix}=H_1t^2;\quad \begin{vmatrix} GE \\ ge \end{vmatrix}=(H-J_1)t^2;\quad \begin{vmatrix} FG \\ fg \end{vmatrix}=-Jt^2 \tag{48}$$

und man findet:

$$k_1+k_2=\frac{J_1-H}{J};\quad k_1-k_2=-\frac{\varDelta}{J};\quad k_1k_2=-\frac{H_1}{J} \tag{49}$$

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=-H-J_1;\quad \frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}=\varDelta;\quad \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}=HJ_1-JH_1 \tag{50}$$

woraus:

$$k_1=\frac{-H+J_1-\varDelta}{2J};\quad k_2=\frac{-H+J_1+\varDelta}{2J} \tag{51}$$

$$\frac{1}{\varrho_1}=\frac{-H-J_1+\varDelta}{2};\quad \frac{1}{\varrho_2}=-\frac{H+J_1+\varDelta}{2} \tag{52}$$

$$\varDelta^2=(H-J_1)^2+4JH_1 \tag{53}$$

Die Gleichungen, welche die Hauptkrümmungsrichtungen und Hauptkrümmungen bestimmen, lauten jetzt:

$$Jk^2 + (H - J_1)k - H_1 = 0 \tag{54}$$

$$\left(\frac{1}{\varrho} + H\right)\left(\frac{1}{\varrho} + J_1\right) = JH_1 \tag{55}$$

§. 10. **Sphärische Krümmung.** Wie anfangs §. 9. erwähnt, wird $\frac{1}{\varrho}$ constant, also die Krümmungen aller Normalschnitte, die durch einen Punkt gehen, einander gleich, wenn Gl. (38) unabhängig von k gilt, wenn also

$$\begin{vmatrix} E F \\ e f \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} G E \\ g e \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} F G \\ f g \end{vmatrix} = 0$$

ist, drei Gleichungen die sich auf folgende 2 reduciren:

$$\frac{E}{e} = \frac{F}{f} = \frac{G}{g} \tag{56}$$

Im allgemeinen bestimmen dieselben einen oder einzelne Punkte; ein solcher Punkt heisst ein Nabelpunkt. In besonderen Fällen geben sie nur eine Relation zwischen u und v, bestimmen also eine Linie, Nabellinie. In Nabelpunkten und Nabellinien heisst die Fläche sphärisch gekrümmt. Nach (31) werden die 3 Quotienten $= \frac{1}{\varrho}$; daher ist

$$E = \frac{e}{\varrho}; \quad F = \frac{f}{\varrho}; \quad G = \frac{g}{\varrho} \tag{57}$$

§. 11. **Krümmungsmass.** Zieht man von einem festen Punkte, z. B. dem Anfangspunkte der xyz eine Gerade von der Länge 1 in der Richtung der Normale einer Fläche, so ist der Ort des Endpunkts, dessen Coordinaten also p, q, r sind, eine Kugelfläche vom Radius 1, auf welcher jedem Punkte der Fläche (xyz) ein Punkt der Kugelfläche (pqr) entspricht. Beschreibt nun der Punkt (xyz) den Umfang eines unendlich kleinen Flächenelements $\partial^2\Omega$, so beschreibt der Punkt (pqr) den Umfang eines unendlichkleinen sphärischen Flächenelements $\partial^2\omega$. Den Quotienten

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial^2\Omega}$$

nennt man die Krümmung der Fläche, in analogem Sinne wie in der Curventheorie der Quotient $\frac{\partial\tau}{\partial s}$ die Krümmung der Curve genannt worden ist, nur war es daselbst die Tangente, mit welcher vom Anfangspunkte eine Gerade von der Länge 1 gezogen ward, deren Endpunkt dann auf der Kugel die Curve τ entsprechend der vom Berührungspunkte gleichzeitig durchlaufenen Curve s beschrieb. Ebenso wie dort werden wir auch in der Flächentheorie jede vom

Punkte (pqr) beschriebene Curve die Indicatrix der Normale für die von ihrem Fusspunkt gleichzeitig beschriebene Curve nennen.

Um den Wert der so definirten Krümmung zu finden, wenden wir eine der Formeln (9) auf die Kugelfläche an, wo der Grösse t die Grösse t_1 entsprechen möge, während p, q, r auch hier die Richtungscosinus der Normale ausdrücken; dann ist

$$pt_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial v} \\ \frac{\partial r}{\partial u} & \frac{\partial r}{\partial v} \end{vmatrix}$$

und nach Einführung der Werte (19)

$$pt_1 = \begin{vmatrix} H\frac{\partial y}{\partial u} + H_1\frac{\partial y}{\partial v} & J\frac{\partial y}{\partial u} + J_1\frac{\partial y}{\partial v} \\ H\frac{\partial z}{\partial u} + H_1\frac{\partial z}{\partial v} & J\frac{\partial z}{\partial u} + J_1\frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} HH_1 \\ JJ_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Der letzte Factor ist $= pt$, der erste nach (50) $= \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$, folglich

$$t_1 = \frac{t}{\varrho_1 \varrho_2} \tag{58}$$

oder

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 \Omega} = \frac{t_1 \partial u \partial v}{t \partial u \partial v} = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} \tag{59}$$

S. 3. Die Krümmung der Fläche ist also gleich dem Product der Hauptkrümmungen. Infolge dessen können wir eine Fläche positiv oder negativ gekrümmt nennen, jenachdem die Hauptkrümmungen gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben. Der Grenzfall, wo eine Hauptkrümmung null ist, kann entweder auf der ganzen Fläche oder längs einer Linie oder in einem blossen Punkte stattfinden. Im ersten Falle wird durch die Eigenschaft eine besondere Art von Flächen definirt, deren Theorie im 3. Abschnitt behandelt werden wird; im zweiten ist die Linie der Nullkrümmung gewöhnlich die Grenze zwischen zwei entgegengesetzt gekrümmten Teilen einer Fläche.

§. 12. **Reduction der Krümmung eines beliebigen Normalschnitts auf die Hauptkrümmungen.** Bezeichnet ϑ den Winkel zwischen der beliebigen Tangentialrichtung $\frac{\partial v}{\partial u} = k$ und der ersten Hauptkrümmungsrichtung $\frac{\partial v}{\partial u} = k_1$, so ist $R - \vartheta$ der Winkel zwischen eben jener und

der zweiten Hauptkrümmungsrichtung $\frac{\partial v}{\partial u} = k_2$. Daher erhält man die Werte von $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$ aus der Formel (4), wenn man bzhw. $k' = k_1$ und k_2 setzt. Nun hat man vermöge der Gl. (40):

$$e + f(k + k_1) + gkk_1 = (f + gk_1)(k - k_2)$$
$$e + f(k + k_2) + gkk_2 = (f + gk_2)(k - k_1)$$
$$e + 2fk_1 + gk_1^2 = (f + gk_1)(k_1 - k_2)$$
$$e + 2fk_2 + gk_2^2 = -(f + gk_2)(k_1 - k_2)$$

Demnach gehen die genannten Ausdrücke über in

$$\cos^2\vartheta = \frac{f + gk_1}{e + 2fk + gk^2} \frac{(k - k_2)^2}{k_1 - k_2}$$

$$\sin^2\vartheta = -\frac{f + gk_2}{e + 2fk + gk^2} \frac{(k - k_1)^2}{k_1 - k_2}$$

Ebenso hat man vermöge der Gl. (41):

$$E + 2Fk_1 + Gk_1^2 = (F + Gk_1)(k_1 - k_2)$$
$$E + 2Fk_2 + Gk_2^2 = -(F + Gk_2)(k_1 - k_2)$$

demzufolge die Formel für die Krümmung eines Normalschnitts (31) angewandt auf die Hauptkrümmungen ergiebt:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{F + Gk_1}{f + gk_1}; \quad \frac{1}{\varrho_2} = \frac{F + Gk_2}{f + gk_2} \tag{60}$$

Aus vorstehenden 4 Ausdrücken setzt sich zusammen:

$$\frac{\cos^2\vartheta}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\vartheta}{\varrho_2} = \frac{(F + Gk_1)(k - k_2)^2 - (F + Gk_2)(k - k_1)^2}{(e + 2fk + gk^2)(k_1 - k_2)}$$

$$= \frac{2Fk + Gk^2 - F(k_1 + k_2) - Gk_1k_2}{e + 2fk + gk^2}$$

das ist nach (41) und dann nach (31)

$$= \frac{E + 2Fk + Gk^2}{e + 2fk + gk^2} = \frac{1}{\varrho}$$

also

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\vartheta}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\vartheta}{\varrho_2} \tag{61}$$

Auf Grund dieses Resultats kann man die Beziehungen zwischen den Krümmungen der Normalschnitte folgendermassen constructiv darstellen. Denkt man auf der variabeln Tangentialrichtung $\frac{\partial v}{\partial u} = k$ eine Strecke R abgeschnitten, so sind R, ϑ die Polarcoordinaten des

Endpunkts P auf der Berührungsebene für den Berührungspunkt M als Anfangspunkt. Lässt man den Punkt P um M als Mittelpunkt einen Kegelschnitt beschreiben, so wird dessen Gleichung

$$1 = \frac{(R\cos\vartheta)^2}{a} + \frac{(R\sin\vartheta)^2}{b}$$

identisch mit Gl. (61), wenn man

$$a = \frac{R^2\varrho_1}{\varrho}; \quad b = \frac{R^2\varrho_2}{\varrho}$$

setzt. Diese Gleichungen kann man entweder durch

$$R^2 = \varrho; \quad a = \varrho_1; \quad b = \varrho_2$$

oder durch

$$R^2 = -\varrho; \quad a = -\varrho_1; \quad b = -\varrho_2$$

erfüllen. Für positive Krümmung, wo ϱ_1, ϱ_2 gleiches Vorzeichen haben, können a und b, weil nie beide negativ sind, nur positiv sein, und ϱ hat dasselbe Vorzeichen. Für negative Krümmung hingegen sind beide Bestimmungen von a, b zulässig. Folglich ist der Ort des Punktes P für positive Krümmung eine Ellipse, für negative eine Verbindung zweier Hyperbeln von gemeinsamen Asymptoten. Unter allen Umständen aber ist der absolute Wert des Krümmungsradius ϱ dargestellt durch das Quadrat des Radiusvectors. Da, im Intervall von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \mathrm{R}$, ϱ von ϱ_1 bis ϱ_2 variirt, so muss $\frac{1}{\varrho}$ im Fall negativer Krümmung einmal null werden und sein Vorzeichen wechseln; dies geschieht, wo der Radiusvector in die Asymptote übergeht. Ist aber die Krümmung des Normalschnitts null, so sind es nach §. 7. die Krümmungen aller Curven von gemeinsamer Tangente gleichfalls. Diese Nullkrümmungsrichtungen, deren in jedem Punkte einer negativ gekrümmten Fläche 2 existiren, nennt man die asymptotischen Richtungen. Man findet sie durch Auflösung der Gleichung

$$E + 2Fk + Gk^2 = 0 \tag{62}$$

nach k.

§. 13. **Variation der Berührungsebene.** Variirt der Berührungspunkt (xyz) der Berührungsebene

$$p(\xi - x) + q(\eta - y) + r(\zeta - z) = 0$$

beliebig, so erhält man durch Differentiation bei constanten ξ, η, ζ als zweite Gleichung der Coincidenzlinie:

$$\partial p(\xi - x) + \partial q(\eta - y) + \partial r(\zeta - z) = 0$$

Die Coincidenzlinie geht also durch den Punkt (xyz) und ist Tangente der Fläche.

Bezeichnet ν den Drehungswinkel, so ist ihr Richtungscosinus gegen die x Axe:

$$\frac{1}{\partial\nu}\begin{vmatrix} q & \partial q \\ r & \partial r \end{vmatrix} = \frac{H\partial u + J\partial v}{\partial\nu}\begin{vmatrix} q & \frac{\partial y}{\partial u} \\ r & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} + \frac{H_1\partial u + J_1\partial v}{\partial\nu}\begin{vmatrix} q & \frac{\partial y}{\partial v} \\ r & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

und, wenn man für q, r die Werte (9) setzt:

$$= \frac{H\partial u + J\partial v}{t\partial\nu}\begin{vmatrix} e & \frac{\partial x}{\partial u} \\ f & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} + \frac{H_1\partial u + J_1\partial v}{t\partial\nu}\begin{vmatrix} f & \frac{\partial x}{\partial u} \\ g & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}$$

das ist nach (23) (25):

$$= \frac{1}{t\partial\nu}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & E\partial u + F\partial v \\ \frac{\partial x}{\partial v} & F\partial u + G\partial v \end{vmatrix} \tag{63}$$

Nimmt man zur Bestimmung von $\partial\nu$ die Quadratsumme der Analogen, so kommt:

$$\begin{aligned}(t\partial\nu)^2 &= g(E\partial u + F\partial v)^2 - 2f(E\partial u + F\partial v)(F\partial u + G\partial v) \\ &\quad + e(F\partial u + G\partial v)^2 \\ &= (eG - 2fF + gE)(E\partial u^2 + 2F\partial u\partial v + G\partial v^2) \\ &\quad - (EG - F^2)(e\partial u^2 + 2f\partial u\partial v + g\partial v^2) \\ &= t^2\left\{\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}\right\}\partial s^2\end{aligned}$$

also

$$\partial\nu^2 = \left\{\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}\right\}\partial s^2 \tag{64}$$

Bezeichnet s' eine Curve, deren Tangente die eben bestimmte Coincidenzlinie ist, und werden die Tangentialrichtungen von s (Bahn des Punkts (xyz)) und s' bestimmt durch die Werte $\frac{\partial v}{\partial u} = k$ und k', so lässt sich das Resultat (63) schreiben:

$$\frac{\partial x}{\partial s'} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}k'\right)\frac{\partial u}{\partial s'} = \frac{\partial u}{t\partial\nu}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & E + Fk \\ \frac{\partial x}{\partial v} & F + Gk \end{vmatrix} \tag{65}$$

Multiplicirt man einzeln mit $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, so giebt die Summe der Analogen:

$$e+fk' = \frac{\partial s'}{t\partial v}\begin{vmatrix} e & E+Fk \\ f & F+Gk \end{vmatrix}$$

$$f+gk' = \frac{\partial s'}{t\partial v}\begin{vmatrix} f & E+Fk \\ g & F+Gk \end{vmatrix}$$

woraus durch Elimination von ∂v:

$$E+F(k+k')+Gkk' = 0 \tag{41}$$

Diese Gleichung zeigt zuerst, dass die Tangenten von s und s' in reciproker Beziehung stehen. Man nennt darum die Coincidenzlinie der Berührungsebene die **conjugirte Tangente** zu derjenigen, welche die Richtung der Variation des Berührungspunkts bezeichnet; und umgekehrt ist dann letztere die conjugirte Tangente der Coincidenzlinie.

Ferner ist aus §. 9. bekannt, dass die Gl. (41) verbunden mit der folgenden

$$e+f(k+k')+gkk' = 0 \tag{7}$$

welche Bedingung des rechtwinkligen Durchschnitts von s und s' ist, die Bedingung ausmacht, unter der die Tangenten beider Curven Hauptkrümmungstangenten sind. Hieraus folgt der Satz:

S. 4. **Conjugirte Tangenten bilden immer und nur dann rechte Winkel, wenn sie Hauptkrümmungstangenten sind.** Oder umgekehrt:

Notwendige und ausreichende Bedingung der Hauptkrümmungsrichtungen ist, dass sie 1) senkrecht auf einander und 2) conjugirt sind.

Gl. (41) differentiirt giebt:

$$(F+Gk)^2\partial k' = (EG-F^2)\partial k = \frac{t^2\partial k}{\varrho_1\varrho_2}$$

daher variiren k und k' auf positiv gekrümmter Fläche in gleichem, auf negativ gekrümmter in entgegengesetztem Sinne. Da aber die conjugirten Tangenten bei Rotation um den Berührungspunkt gleichzeitig in die Hauptkrümmungsrichtungen fallen, so folgt, dass sie von diesen aus auf positiv gekrümmten Flächen, in gleichem Sinne rotirend in verschiedene Quadranten, auf negativ gekrümmten einander entgegen rotirend in denselben Quadranten treten und sich einander begegnen. Letzteres geschieht für $k = k'$, also nach Gl. (41) für

$$E+2Fk+Gk^2 = 0 \tag{62}$$

d. i. nach §. 12. in der asymptotischen Richtung, und man hat den Satz:

S. 5. Die asymptotische Tangentialrichtung ist sich selbst conjugirt.

§. 14. **Variation der Normale.** Die Normale hat denselben Drehungswinkel ν wie die Berührungsebene, und eine gleichgerichtete momentane Rotationsaxe. Es bleibt daher nur ihr Drehpunktsabstand

$$R = -\frac{\partial p\,\partial x + \partial q\,\partial y + \partial r\,\partial z}{\partial \nu^2}$$

und ihre Gleitung längs der momentanen Rotationsaxe

$$\partial Q = \frac{1}{\partial \nu}\begin{vmatrix} p & \partial p & \partial x \\ q & \partial q & \partial y \\ r & \partial r & \partial z \end{vmatrix}$$

zu berechnen. Der Wert des Zählers von R ist bereits nach Gl. (29) bekannt, und vermöge (31) und (64) wird daraus:

$$R = \frac{\partial s^2}{\varrho\,\partial \nu^2} = \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2 - \varrho} \tag{66}$$

Der Ausdruck von Q aber, entwickelt nach Elementen der dritten Verticalreihe, enthält als Coefficienten die in §. 13. ermittelten Richtungscosinus der Coincidenzlinie der Berührungsebene, so dass

$$\partial Q = \frac{\partial x}{\partial s'}\,\partial x + \frac{\partial y}{\partial s'}\,\partial y + \frac{\partial z}{\partial s'}\,\partial z$$

und nach Einsetzung der Werte (65)

$$\partial Q = \frac{\partial u^2}{t\,\partial \nu}\begin{vmatrix} e + fk & E + Fk \\ f + gk & F + Gk \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial u^2}{t\,\partial \nu}\left\{\begin{vmatrix} e & E \\ f & F \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} g & G \\ e & E \end{vmatrix} k + \begin{vmatrix} f & F \\ g & G \end{vmatrix} k^2\right\}$$

oder, weil die Klammer nach §. 9. für $k = k_1$ und k_2 verschwindet:

$$\partial Q = \frac{\partial u^2}{t\,\partial \nu}\begin{vmatrix} f & F \\ g & G \end{vmatrix}(k - k_1)(k - k_2) \tag{67}$$

Hiernach ist die Gleitung constant null und der Drehpunkt Coincidenzpunkt in Nabelpunkten der Fläche, in jedem andern Punkte findet dasselbe statt bei Variation in den Hauptkrümmungsrichtungen. Bei beliebiger Variation stellt ∂Q den normalen Abstand zweier consecutiven Normalen dar.

Die Lage des Drehpunkts, resp. Coincidenzpunkts erhält man als Endpunkt der Strecke R auf dem positiven Arme der Normale abgeschnitten. Coincidenzpunkt wird er zweimal, für $\varrho = \varrho_1$ und $\varrho = \varrho_2$. Bzhw. wird hier auch $R = \varrho_1$ und ϱ_2. Die Orte der letztern 2 Punkte heissen die Mittelpunktsflächen.

§. 15. **Bedingung eines Normalensystems.** Eine Gerade

$$\frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} = \frac{z-\gamma}{c} = R \tag{68}$$

variire mit 2 Parametern u, v. Für beliebige Variation ist dann

$$\begin{aligned} \partial x &= \partial\alpha + R\partial a + a\partial R \\ \partial y &= \partial\beta + R\partial b + b\partial R \\ \partial z &= \partial\gamma + R\partial c + c\partial R \end{aligned}$$

woraus:

$$a\partial x + b\partial y + c\partial z = a\partial\alpha + b\partial\beta + c\partial\gamma + \partial R$$

Soll nun die Gerade Normale einer Fläche, (xyz) ihr Fusspunkt sein, so muss die Linke verschwinden. Dann wird $a\partial\alpha + b\partial\beta + c\partial\gamma$ ein Differential, nämlich von $-R$. Die Bedingung ist also:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(a\frac{\partial\alpha}{\partial u} + b\frac{\partial\beta}{\partial u} + c\frac{\partial\gamma}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(a\frac{\partial\alpha}{\partial v} + b\frac{\partial\beta}{\partial v} + c\frac{\partial\gamma}{\partial v}\right)$$

oder:

$$\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial\alpha}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v}\frac{\partial\beta}{\partial u} + \frac{\partial c}{\partial v}\frac{\partial\gamma}{\partial u} = \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial v} + \frac{\partial b}{\partial u}\frac{\partial\beta}{\partial v} + \frac{\partial c}{\partial u}\frac{\partial\gamma}{\partial v} \tag{69}$$

Immer und nur dann, wenn diese Gleichung erfüllt ist, ist das System von Geraden (68) ein System von Normalen einer Fläche.

§. 16. **Torsionswinkel einer Curve auf der Fläche.** Bezeichnet, wie in §. 7. Θ den Winkel zwischen der Hauptnormale einer Curve s auf der Fläche und der Flächennormale, ferner a, b, c die Richtungscosinus der Binormale, a_1, b_1, c_1 die der Hauptnormale, so dass

$$\begin{aligned} pa_1 + qb_1 + rc_1 &= \cos\Theta \\ pa + qb + rc &= -\sin\Theta \end{aligned} \tag{70}$$

wird, endlich τ und ϑ den Krümmungs- und Torsionswinkel, so hat man:

$$\partial a_1 = a\partial\vartheta - \frac{\partial x}{\partial s}\partial\tau; \quad a_1 = \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial x}{\partial s}$$

und findet nach Differentiation der Gl. (70):

$$a_1\partial p + b_1\partial q + c_1\partial r - \partial\vartheta\sin\Theta = -\partial\Theta\sin\Theta$$

Setzt man für ∂p, ∂q, ∂r ihre Werte aus (19), so kommt:

$$\partial\vartheta - \partial\Theta = \frac{M(H\partial u + J\partial v) + N(H_1\partial u + J_1\partial v)}{\sin\Theta} \tag{71}$$

wo zur Abkürzung

$$M = a_1\frac{\partial x}{\partial u} + b_1\frac{\partial y}{\partial u} + c_1\frac{\partial z}{\partial u}; \quad N = a_1\frac{\partial x}{\partial v} + b_1\frac{\partial y}{\partial v} + c_1\frac{\partial z}{\partial v}$$

gesetzt ist. Zur Bestimmung dieser Coefficienten hat man zunächst:

$$M\partial u + N\partial v = a_1\partial x + b_1\partial y + c_1\partial z = 0 \tag{72}$$

Um eine zweite Bestimmung zu erhalten, lassen wir die Curve s von einer zweiten Curve s' rechtwinklig schneiden. Für erstere sei $\frac{\partial v}{\partial u} = k$, für letztere $= k'$. Die Tangente von s' bildet dann mit der Hauptnormale von s den Winkel $\Theta - R$, daher ist

$$\sin\Theta = a_1\frac{\partial x}{\partial s'} + b_1\frac{\partial y}{\partial s'} + c_1\frac{\partial z}{\partial s'} = (M + Nk')\frac{\partial u}{\partial s'} \tag{73}$$

Eliminirt man zwischen den 3 Gleichungen

$$e + 2fk + gk^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2$$

$$e + f(k + k') + gkk' = 0$$

$$e + 2fk' + gk'^2 = \left(\frac{\partial s'}{\partial u}\right)^2$$

e und k', so findet man:

$$(f + gk)\frac{\partial s'}{\partial u} = t\frac{\partial s}{\partial u}$$

und, wenn man nur die 2 ersten subtrahirt:

$$(f + gk)(k - k') = \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2$$

woraus:

$$\frac{\partial s'}{\partial u} = t(k - k')\frac{\partial u}{\partial s} \tag{74}$$

Jetzt werden die Gl. (72) (73):

$$M + Nk = 0$$

$$M + Nk' = t(k - k')\frac{\partial u}{\partial s}\sin\Theta$$

woraus:

$$M = tk\frac{\partial u}{\partial s}\sin\Theta; \quad N = -t\frac{\partial u}{\partial s}\sin\Theta$$

und Gl. (71) wird:

$$\partial\vartheta - \partial\Theta = t\frac{\partial u^2}{\partial s}\{Jk^2 + (H - J_1)k - H_1\}$$

das ist nach (54):

$$\partial\vartheta - \partial\Theta = t\frac{\partial u^2}{\partial s}J(k - k_1)(k - k_2)$$

Der Torsionswinkel einer beliebigen Curve auf der Fläche ist also:

$$\vartheta = \Theta + \int t\frac{\partial u^2}{\partial s}J(k - k_1)(k - k_2) \qquad (75)$$

§. 17. **Biegung und Abwickelung.** Variirt eine in Parametern u, v dargestellte Fläche, so betrachten wir den durch die Werte von u, v bestimmten Punkt als beständig denselben, desgleichen eine Linie, wenn sie der Ort identischer Punkte ist, und ein Flächenstück, wenn es identisch begrenzt ist.

Eine Fläche biegen heisst sie so verändern, dass alle begrenzten Linien auf ihr gleiche Länge behalten.

Wird eine Fläche gebogen, so folgt, dass alle begrenzten Flächenstücke, insbesondere die Flächenelemente constanten Inhalt haben.

Eine Fläche auf einer andern abwickeln heisst sie durch Biegung (und Transposition) in letztere übergehen lassen.

Damit also eine Fläche Ω auf einer andern Ω_1 abwickelbar sei, muss jede irgendwie begrenzte Linie s auf ihr, also auch das Quadrat des Linienelements

$$\partial s^2 = e\partial u^2 + 2f\partial u\partial v + g\partial v^2$$

und, da es für willkürliche ∂u, ∂v gilt, auch die Coefficienten e, f, g auf Ω und Ω_1, in denselben Parametern dargestellt, gleichen Wert haben, und umgekehrt; der Satz lautet:

S. 6. Notwendige und ausreichende Bedingung der Abwickelbarkeit ist, dass e, f, g auf beiden Flächen gleich sind.

In diesem Falle ist offenbar auch t und das Flächenelement $t\partial u\partial v$ gemeinsam, desgleichen die Krümmung der Fläche

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = \frac{EG - F^2}{t^2}$$

weil sie nach Gl. (26) in e, f, g darstellbar ist.

Die Aufgabe, alle auf der Fläche Ω_1 abwickelbaren Flächen Ω

zu finden, besteht demnach in der Integration der Gl. (3), worin e, f, g gegeben, d. h. aus Ω_1 zu entwickeln, und x, y, z gesucht sind.

§. 18. **Mittelpunktsflächen.** Die Gleichungen der beiden Mittelpunktsflächen sind nach §. 14.

$$x_1 = x + p\varrho_1; \quad y_1 = y + q\varrho_1; \quad z_1 = z + r\varrho_1$$
$$x_2 = x + p\varrho_2; \quad y_2 = y + q\varrho_2; \quad z_2 = z + r\varrho_2$$

Durch Differentiation gemäss den Formeln (19) erhält man:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = (1 + H\varrho_1)\frac{\partial x}{\partial u} + H_1\varrho_1\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}p; \quad \text{etc.}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = J\varrho_1\frac{\partial x}{\partial u} + (1 + J_1\varrho_1)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial v}p; \quad \text{etc.}$$

Bezeichnet man durch p_1, q_1, r_1, t_1 die Werte von p, q, r, t auf der ersten Mittelpunktsfläche, so findet man durch Anwendung der Formeln (9) auf die vorstehenden Differentialquotienten:

$$p_1t_1 = \begin{vmatrix} f - F\varrho_1\frac{\partial \varrho_1}{\partial u} \\ g - G\varrho_1\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} \end{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} - \begin{vmatrix} e - E\varrho_1\frac{\partial \varrho_1}{\partial u} \\ f - F\varrho_1\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} \end{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}; \quad \text{etc.}$$

Hieraus folgt, dass

$$pp_1 + qq_1 + rr_1 = 0$$

dass also (S. 7.) Die Normale der Mittelpunktsfläche parallel der Berührungsebene, ihre Berührungsebene parallel der Normale der Urfläche ist.

Die Herleitung anderer Eigenschaften versparen wir, bis durch Einführung geeigneter Parameter die Untersuchung vereinfacht werden kann.

§. 19. **Parallele Flächen.** Trägt man auf der Normale vom Fusspunkt P aus die constante Strecke c ab, so ist der Ort des Endpunkts P' eine Fläche, deren Gleichungen sind:

$$x' = x + pc; \quad y' = y + qc; \quad z' = z + rc$$

woraus nach (19)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial u} &= (1 + Hc)\frac{\partial x}{\partial u} + H_1c\frac{\partial x}{\partial v}; \quad \text{etc.} \\ \frac{\partial x'}{\partial v} &= Jc\frac{\partial x}{\partial u} + (1 + J_1c)\frac{\partial x}{\partial v}; \quad \text{etc.} \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

folglich

$$p\partial x'+q\partial y'+r dz'=0$$

d. h. die Normale der Fläche P ist auch Normale der Fläche P', und beide Flächen haben den constanten normalen Abstand c, sind demnach einander parallel.

Wendet man jetzt die Formeln (9) auf die Fläche P' an, für welche die Grössen p, q, r noch gelten, so findet man:

$$pt' = \begin{vmatrix} 1+Hc & H_1c \\ Jc & 1+J_1c \end{vmatrix} pt; \quad \text{etc.}$$

folglich ist

$$t' = \{(1+Hc)(1+J_1c)-JH_1c^2\}t$$

oder nach (50)

$$t' = \left(1-\frac{c}{\varrho_1}\right)\left(1-\frac{c}{\varrho_2}\right)t$$

Differentiirt man partiell die Gl. (76) mit Anwendung der Formeln (18), so kommt:

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial u^2} = A_3\frac{\partial x}{\partial u}+A_4\frac{\partial x}{\partial v}+E'p$$

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial u\partial v} = B_3\frac{\partial x}{\partial u}+B_4\frac{\partial x}{\partial v}+F'p$$

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial v^2} = C_3\frac{\partial x}{\partial u}+C_4\frac{\partial x}{\partial v}+G'p$$

wo gemäss den Definitionsgleichungen (17) E', F', G' die Fundamentalgrössen 2. Ordnung für die Fläche P' sind und der gegenwärtigen Rechnung zufolge die Werte haben:

$$\left.\begin{aligned} E' &= (1+Hc)E+H_1cF = \frac{et^2c}{\varrho_1\varrho_2}+E\left\{1-t^2c\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)\right\} \\ F' &= (1+Hc)F+H_1cG = \frac{ft^2c}{\varrho_1\varrho_2}+F\left\{1-t^2c\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)\right\} \\ G' &= JcF+(1+J_1c)G = \frac{gt^2c}{\varrho_1\varrho_2}+G\left\{1-t^2c\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)\right\} \end{aligned}\right\} \quad (78)$$

Ferner ist nach (19), angewandt auf beide Flächen

$$\frac{\partial p}{\partial u} = H\frac{\partial x}{\partial u}+H_1\frac{\partial x}{\partial v} = H'\frac{\partial x'}{\partial u}+H_1'\frac{\partial x'}{\partial v}$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} = J\frac{\partial x}{\partial u}+J_1\frac{\partial x}{\partial v} = J'\frac{\partial x'}{\partial u}+J_1'\frac{\partial x'}{\partial v}$$

Multiplicirt man erst mit $\frac{\partial x}{\partial u}$, dann mit $\frac{\partial x}{\partial v}$, und addirt jedesmal die Analogen, so kommt, mit Anwendung von (23) (25):

$$\begin{aligned}
-E &= H'(e-Ec)+H_1'(f-Fc)\\
-F &= H'(f-Fc)+H_1'(g-Gc)\\
-F &= J'(e-Ec)+J_1'(f-Fc)\\
-G &= J'(f-Fc)+J_1'(g-Gc)
\end{aligned}$$

woraus, nach umgekehrter Auflösung:

$$\left.\begin{aligned}
H'\left(1-\frac{c}{\varrho_1}\right)\left(1-\frac{c}{\varrho_2}\right) &= H+\frac{c}{\varrho_1\varrho_2}\\
H_1'\left(1-\frac{c}{\varrho_1}\right)\left(1-\frac{c}{\varrho_2}\right) &= H_1\\
J'\left(1-\frac{c}{\varrho_1}\right)\left(1-\frac{c}{\varrho_2}\right) &= J\\
J_1'\left(1-\frac{c}{\varrho_1}\right)\left(1-\frac{c}{\varrho_2}\right) &= J_1+\frac{c}{\varrho_1\varrho_2}
\end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Wendet man jetzt die Gl. (50) auf die Flächen P' und P an, so kommt:

$$\left(\frac{1}{\varrho_1'}+\frac{1}{\varrho_2'}\right)\left(1-\frac{c}{\varrho_1}\right)\left(1-\frac{c}{\varrho_2}\right)=\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}-\frac{2c}{\varrho_1\varrho_2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varrho_1'\varrho_2'}\left(1-\frac{c}{\varrho_1}\right)^2\left(1-\frac{c}{\varrho_2}\right)^2 &= \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}-\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{c}{\varrho_1\varrho_2}+\frac{c^2}{\varrho_1^2\varrho_2^2}\\
&= \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}\left(1-\frac{c}{\varrho_1}\right)\left(1-\frac{c}{\varrho_2}\right)
\end{aligned}$$

oder

$$\frac{1}{\varrho_1'\varrho_2'}\left(1-\frac{c}{\varrho_1}\right)\left(1-\frac{c}{\varrho_2}\right)=\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} \tag{80}$$

und nach Division beider Gleichungen:

$$\varrho_1'+\varrho_2'=\varrho_1+\varrho_2-2c$$

Hiermit verbunden Gl. (80) in der Form

$$\varrho_1'\varrho_2'=(\varrho_1-c)(\varrho_2-c)$$

giebt:

$$\varrho_1'=\varrho_1-c;\quad \varrho_2'=\varrho_2-c \tag{81}$$

S. 8. Die Hauptkrümmungsradien paralleler Flächen differiren um deren Abstand.

Ferner ist allgemein

$$\left.\begin{array}{l} e = \varrho_1 \varrho_2 \begin{vmatrix} H_1 E \\ J_1 F \end{vmatrix}; \quad f = \varrho_1 \varrho_2 \begin{vmatrix} EH \\ FJ \end{vmatrix} \\ f = \varrho_1 \varrho_2 \begin{vmatrix} H_1 F \\ J_1 G \end{vmatrix}; \quad g = \varrho_1 \varrho_2 \begin{vmatrix} FH \\ GJ \end{vmatrix} \end{array}\right\} \tag{82}$$

Wendet man diese Formeln auf die Fläche P' an und schreibt die Gl. (79) wie folgt

$$H'\varrho_1'\varrho_2' = H\varrho_1\varrho_2 + c; \quad H_1'\varrho_1'\varrho_2' = H_1\varrho_1\varrho_2$$
$$J'\varrho_1'\varrho_2' = J\varrho_1\varrho_2; \quad J_1'\varrho_1'\varrho_2' = J_1\varrho_1\varrho_2 + c$$

so wird

$$e' = \varrho_1\varrho_2 \begin{vmatrix} H_1 E' \\ J_1 F' \end{vmatrix} - E'c; \quad f' = \varrho_1\varrho_2 \begin{vmatrix} E'H \\ F'J \end{vmatrix} - F'c$$

$$f' = \varrho_1\varrho_2 \begin{vmatrix} H_1 F' \\ J_1 G' \end{vmatrix} - F'c; \quad g' = \varrho_1\varrho_2 \begin{vmatrix} F'H \\ G'J \end{vmatrix} - G'c$$

das ist nach (78):

$$\left.\begin{array}{l} e' = e\left(1 - \dfrac{c^2}{\varrho_1\varrho_2}\right) + Ec\left\{c\left(\dfrac{1}{\varrho_1} + \dfrac{1}{\varrho_2}\right) - 2\right\} \\ f' = f\left(1 - \dfrac{c^2}{\varrho_1\varrho_2}\right) + Fc\left\{c\left(\dfrac{1}{\varrho_1} + \dfrac{1}{\varrho_2}\right) - 2\right\} \\ g' = g\left(1 - \dfrac{c^2}{\varrho_1\varrho_2}\right) + Gc\left\{c\left(\dfrac{1}{\varrho_1} + \dfrac{1}{\varrho_2}\right) - 2\right\} \end{array}\right\} \tag{83}$$

§. 20. **Coincidenzpunkte der Parameterlinien.** Jede von beiden Scharen von Parameterlinien kann dreierlei Form haben, entweder bestehen sie ohne Durchschnitt neben einander, oder sie schneiden sich in einem variabeln, oder in einem festen Punkte. Der zweite Fall bringt Verwickelungen in die Rechnung; das System wird alsdann von einer Curve umhüllt, auf deren einer Seite jeder Punkt 2 Wertsystemen (uv), auf deren anderer er keinem Wertsysteme entspricht. Im dritten Falle braucht man nur den festen Punkt als Centrum zu betrachten, von dem die Parameterlinien als Strahlen ausgehen ohne es rückwärts zu überschreiten; dann wird wieder jeder Punkt durch ein Wertsystem (uv) vertreten.

Die Bedingung eines Durchschnitts consecutiver Parameterlinien (u) ist, dass für irgend welche Variation von u, v zwei consecutive Punkte zusammenfallen, dass also

$$\frac{\partial x}{\partial u}\partial u + \frac{\partial x}{\partial v}\partial v = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial u}\partial u + \frac{\partial y}{\partial v}\partial v = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial u}\partial u + \frac{\partial z}{\partial u}\partial v = 0$$

ist, wo ∂v nicht null sein darf. Die Gleichungen können entweder durch

$$\frac{\partial x}{\partial u}:\frac{\partial y}{\partial u}:\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial v}:\frac{\partial y}{\partial v}:\frac{\partial z}{\partial v}$$

oder durch

$$\frac{\partial x}{\partial v}=0;\quad \frac{\partial y}{\partial v}=0;\quad \frac{\partial z}{\partial v}=0;\quad du=0$$

erfüllt werden. Im ersten Falle gelangen die Parameterlinien beider Scharen zur Berührung. Solange man also an der Forderung festhält, dass sich beide Scharen stets schneiden sollen, so hat nur der zweite Fall Bedeutung. Die 3 Gleichungen lassen sich in eine zusammenbegreifen:

$$g=0$$

Stellt dieselbe eine Relation zwischen u, v dar, so drückt diese die Einhüllende der Parameterlinien (u) aus. Bestimmt sie hingegen nur einen Punkt, was namentlich dann stattfindet, wenn g nur u enthält, weil der Punkt (xyz) mit v allein nicht variiren kann, so ist dieser das Strahlencentrum.

II. Besondere Linien und Liniensysteme auf Flächen.

§. 21. **Uebergang zu neuen Parametern.** Sind u_1, v_1 Functionen von u, v, und man entwickelt die partiellen Differentialquotienten von x, y, z bezüglich auf u_1, v_1, so erhält man, indem man u_1, v_1 als neue Parameter betrachtet und die darauf bezüglichen Grössen durch den Index 1 unterscheidet, nach Einführung in I. Gl. (3) (17) (9):

$$\left.\begin{aligned}
e &= e_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2+2f_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial u}+g_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2\\
f &= e_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v}+f_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}+\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)+g_1\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}\\
g &= e_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2+2f_1\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial v}+g_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2
\end{aligned}\right\}\quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}
E &= E_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2+2F_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial u}+G_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2\\
F &= E_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v}+F_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}+\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)+G_1\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}\\
G &= E_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2+2F_1\frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial v}+G_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2
\end{aligned}\right\}\quad (2)$$

$$pt = pt_1 \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial u_1}{\partial v} \\ \frac{\partial v_1}{\partial u} & \frac{\partial v_1}{\partial v} \end{vmatrix}; \quad \text{etc.}$$

Hiermit ist die Functionsdeterminante und ihre Inverse

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u} & \frac{\partial u_1}{\partial v} \\ \frac{\partial v_1}{\partial u} & \frac{\partial v_1}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{t}{t_1}; \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u_1} & \frac{\partial v}{\partial u_1} \\ \frac{\partial u}{\partial v_1} & \frac{\partial v}{\partial v_1} \end{vmatrix} = \frac{t_1}{t} \tag{3}$$

bekannt, und man hat die Inversionsformeln:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial u} &= \frac{t}{t_1}\frac{\partial v}{\partial v_1}; \quad \frac{\partial u_1}{\partial v} = -\frac{t}{t_1}\frac{\partial u}{\partial v_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial u} &= -\frac{t}{t_1}\frac{\partial v}{\partial u_1}; \quad \frac{\partial v_1}{dv} = \frac{t}{t_1}\frac{\partial u}{\partial u_1} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Diese Werte wird man in die Gl. (1) (2) einsetzen, wenn man für u, v eine Substitution in u_1, v_1 ausführen und die alten Fundamentalgrössen in den neuen darstellen will. Die Hauptanwendung der Gl. (1) (2) besteht aber darin, dass sie, wenn Liniensysteme von bestimmter Eigenschaft gesucht werden, die Bedingungen darstellen, aus denen man die zugehörigen Parameter u_1, v_1 durch Integration findet, so fern diese Eigenschaft durch Werte von Fundamentalgrössen repräsentirt wird.

§. 22. **Orthogonale Liniensysteme.** Nach §. 1. schneiden sich die Parameterlinien (u) (v) rechtwinklig, wenn

$$f = 0$$

ist. Gilt dies für alle Punkte der Fläche, so ist das System der Parameterlinien ein orthogonales, das Flächenelement ein Rechteck. Wir nennen dann auch die Parameter orthogonal.

Die wichtigsten Vereinfachungen der in I. aufgestellten Formeln, die hier eintreten, sind die folgenden. Man hat:

$$t^2 = eg$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \frac{1}{2e}\frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{1}{2g}\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + Ep \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} &= \frac{1}{2e}\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + Fp \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= -\frac{1}{2e}\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + Gp \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial u} &= -\frac{E}{e}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{F}{g}\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial p}{\partial v} &= -\frac{F}{e}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{G}{g}\frac{\partial x}{\partial v}\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$$4(EG-F^2)+2\left(\frac{\partial^2 e}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right)-\frac{1}{g}\left\{\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v}+\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2\right\}$$
$$-\frac{1}{e}\left\{\frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u}+\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)^2\right\}=0 \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned}2eg\left(\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial u}\right)-Eg\frac{\partial e}{\partial v}+F\left(g\frac{\partial e}{\partial u}-e\frac{\partial g}{\partial u}\right)-Ge\frac{\partial e}{\partial v}=0\\ 2eg\left(\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial v}\right)-Eg\frac{\partial g}{\partial u}+F\left(e\frac{\partial g}{\partial v}-g\frac{\partial e}{\partial v}\right)-Ge\frac{\partial g}{\partial u}=0\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Die Beziehungen zwischen rechtwinklig sich kreuzenden Normalschnitten und ihren Krümmungen sind:

$$e+g\,kk'=0 \qquad (9)$$

$$\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}=\frac{E}{e}+\frac{G}{g} \qquad (10)$$

Die Hauptkrümmungen und deren Richtungen werden bestimmt bzhw. durch die Gleichungen:

$$\left(\frac{e}{\varrho}-E\right)\left(\frac{g}{\varrho}-G\right)=F^2 \qquad (11)$$

$$\frac{F}{e}k^2+\left(\frac{E}{e}-\frac{G}{g}\right)k-\frac{F}{g}=0 \qquad (12)$$

Will man von beliebigen Parametern u_1, v_1 zu orthogonalen Parametern übergehen, so kann man, da sich nicht beide durch eine Bedingung bestimmen, die eine Parameterlinienschar (u) beliebig annehmen; dann wird nach (1) der rechtwinklige Schnitt der andern (v) durch die Bedingung bestimmt:

$$e_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v}+f_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}+\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)+g_1\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}=0$$

oder nach (4):

$$\left(e_1\frac{\partial u}{\partial v_1}-f_1\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)\frac{\partial v}{\partial v_1}-\left(f_1\frac{\partial u}{\partial v_1}-g_1\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)\frac{\partial v}{\partial u_1}=0$$

welche die Integration der Gleichung

$$\left(e_1\frac{\partial u}{\partial v_1}-f_1\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)\partial u_1+\left(f_1\frac{\partial u}{\partial v_1}-g_1\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)\partial v_1=0$$

erfordert. Ist ihr Integral

$$\varphi(u_1, v_1) = \text{const.}$$

so ist

$$v = \varphi(u_1, v_1)$$

§. 23. **Krümmungslinien.** Krümmungslinie heisst auf einer Fläche eine Linie, deren Tangente in jedem Punkte Hauptkrümmungstangente ist. Es wird dazu die Existenz zweier Hauptkrümmungsrichtungen vorausgesetzt. Fehlen dieselben für einen Punkt, wie z. B. in einem Nabelpunkt, so lässt sich dieser noch als Endpunkt derjenigen Krümmungslinien betrachten, welche in unendlicher Nähe die Richtung nach ihm hin verfolgen. Abgesehen von diesen Endpunkten schneiden sich in jedem Punkte der Fläche 2 Krümmungslinien rechtwinklig. Demnach besteht das System der Krümmungslinien einer Fläche aus 2 Scharen, deren eine von den Normalschnitten grösster, die andere kleinster Krümmung berührt wird. Zwei Linien derselben Schar können sich nicht schneiden, ebensowenig eine sich selbst. Ein stetiger Uebergang von Linien einer Schar in die andere ist nur durch das Gleichwerden beider Hauptkrümmungen möglich, kann also nur in Nabelpunkten stattfinden.

Nach I. Gl. (38) ist die Bedingung einer Krümmungslinie:

$$\begin{vmatrix} E & F \\ e & f \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} G & E \\ g & e \end{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial u} + \begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix} \left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2 = 0 \tag{13}$$

Hieraus ergeben sich 2 Werte von $\frac{\partial v}{\partial u}$, welche den 2 Scharen entsprechen.

§. 24. **System der Krümmungslinien.** Sollen die Parameterlinien selbst Krümmungslinien sein, so muss die Gl. (13) durch $\partial v = 0$ und durch $\partial u = 0$ erfüllt werden, aber nicht durch jeden andern Wert. Folglich ist hier

$$\begin{vmatrix} E & F \\ e & f \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} G & E \\ g & e \end{vmatrix} \gtrless 0$$

Dies ergiebt:

$$f = 0; \quad F = 0$$

Betrachten wir zunächst die unmittelbaren Vereinfachungen, welche eintreten, wenn u, v Parameter der Krümmungslinien sind, so wird die Krümmung eines Normalschnitts:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{E\partial u^2 + G\partial v^2}{e\partial u^2 + g\partial v^2} \tag{14}$$

das ist bzhw. für ein constantes v und ein constantes u:

$$\frac{1}{\varrho_1}=\frac{E}{e};\quad \frac{1}{\varrho_2}=\frac{G}{g} \tag{15}$$

Für beliebig bewegte Normale wird die Gleichung des Drehungswinkels

$$\partial v^2=\frac{(E\partial u)^2}{e}+\frac{(G\partial v)^2}{g} \tag{16}$$

die Richtungscosinus der momentanen Rotationsaxe

$$\frac{G\frac{\partial x}{\partial u}\partial v-E\frac{\partial x}{\partial v}\partial u}{eg\partial v};\quad \text{etc.}$$

die Gleitung der Normale längs derselben

$$\partial Q=\left(\frac{G}{g}-\frac{E}{e}\right)\frac{\partial u\,\partial v}{\partial v} \tag{17}$$

Der Torsionswinkel einer beliebigen Curve s

$$\vartheta=\Theta+\int\left(\frac{G}{g}-\frac{E}{e}\right)\frac{t\,\partial u\,\partial v}{\partial s} \tag{18}$$

also der einer Krümmungslinie

$$\vartheta=\Theta$$

Von den Differentialformeln §. 22. sind hier bemerkenswert:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial u}&=-\frac{E}{e}\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial p}{\partial v}&=-\frac{G}{g}\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{1}{\varrho_2}\frac{\partial x}{\partial v}\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

sofern daraus folgt, dass längs den Krümmungslinien

$$\partial p:\partial q:\partial r=\partial x:\partial y:\partial z \tag{20}$$

ist. Diese Eigenschaft ist hinreichend um eine Linie als Krümmungslinie zu bestimmen. Denn, setzt man nur voraus, dass

$$\frac{\partial p}{\partial u}=m\frac{\partial x}{\partial u};\quad \frac{\partial q}{\partial u}=m\frac{\partial y}{\partial u};\quad \frac{\partial z}{\partial u}=m\frac{\partial z}{\partial u}$$

sei, so erhält man nach I. Gl. (19):

$$H_1\frac{\partial x}{\partial v}=(m-H)\frac{\partial x}{\partial u}$$

nebst analogen Gleichungen für y und z, woraus:

$$H_1 f=(m-H)e;\quad H_1 g=(m-H)f$$

oder nach I. Gl. (23):

$$E = me; \quad F = mf$$

Nimmt man jetzt den Parameter v, über den noch zu verfügen bleibt, orthogonal zu u, so folgt:

$$f = 0; \quad F = 0; \quad m = \frac{E}{e}$$

was zu beweisen war.

Die Relationen zwischen den Fundamentalgrössen reduciren sich auf

$$4EG + 2\left(\frac{\partial^2 e}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\right) - \frac{1}{g}\left\{\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial v} - \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2\right\} - \frac{1}{e}\left\{\frac{\partial e}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial u} - \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)^2\right\} = 0 \quad (21)$$

$$2\frac{\partial E}{\partial v} = \left(\frac{E}{e} + \frac{G}{g}\right)\frac{\partial e}{\partial v}; \quad 2\frac{\partial G}{\partial u} = \left(\frac{E}{e} + \frac{G}{g}\right)\frac{\partial g}{\partial u} \quad (22)$$

Hieraus ergeben sich 2 nützliche Formeln. Infolge der Gl. (15) ist

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\frac{e}{E} = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{e}{E}\frac{\partial E}{\partial v}\right).$$

das ist nach (22):

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} = \frac{1}{2E}\left(1 - \frac{eG}{gE}\right)\frac{\partial e}{\partial v} = \frac{1}{2E}\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial e}{\partial v}$$

und analog: (23)

$$\frac{\partial \varrho_2}{\partial u} = \frac{1}{2G}\left(1 - \frac{gE}{eG}\right)\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{2G}\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)\frac{\partial g}{\partial u}$$

Wie schon in §. 14. bemerkt, hat die Normale, bei Variation in einer Hauptkrümmungsrichtung, und bei keiner andern, wofern sie sich nicht parallel bleibt, einen Coincidenzpunkt; demnach erzeugt sie bei Variation längs einer Krümmungslinie, und bei keiner andern, eine abwickelbare Fläche. Auch diese Eigenschaft kann als Definition dienen.

Will man von beliebigen Parametern u_1, v_1 zu Parametern der Krümmungslinien u, v übergehen, so findet man diese durch Integration der zweiten Gl. (1) und der zweiten Gl. (2), wo die linke Seite null ist.

§. 25. **Ableitung des Krümmungsliniensystemes aus der Indicatrix.** Die Aufgabe ein Krümmungsliniensystem zu finden ist leichter, wenn nicht die Fläche, sondern die Indicatrix der Normale (s. §. 11.) gegeben ist. Nach Gl. (19) ist

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\varrho_1\frac{\partial p}{\partial u}; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\varrho_2\frac{\partial p}{\partial v} \quad (24)$$

woraus:

$$x = -\int\left(\varrho_1 \frac{\partial p}{\partial u}\partial u + \varrho_2 \frac{\partial p}{\partial v}\partial v\right) \tag{25}$$

und analog y und z. Hiernach sind die Gleichungen der Fläche bekannt, sobald ϱ_1 und ϱ_2 gefunden sind, vorausgesetzt dass p, q, r in orthogonalen Parametern u, v gegeben sind.

Eliminirt man x zwischen den Gl. (24), so kommt:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\varrho_1 \frac{\partial p}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\varrho_2 \frac{\partial p}{\partial v}\right)$$

nebst 2 Analogen für q und r, deren jede die Folge der beiden übrigen ist, so dass man durch Verbindung nur die 2 unabhängigen erhält:

$$R_1 \frac{\partial \varrho_1}{\partial v} = -(\varrho_1 - \varrho_2)\frac{\partial R_1}{\partial v}; \qquad R_2 \frac{\partial \varrho_2}{\partial u} = (\varrho_1 - \varrho_2)\frac{\partial R_2}{\partial u} \tag{26}$$

wo

$$R_1^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2$$

$$R_2^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2$$

bekannte Grössen sind. Eliminirt man einzeln ϱ_2 und ϱ_1, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial \log R_1}{\partial v} &= \frac{\partial \varrho_1}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial R_1}{R_1 R_2 \partial v} \\ \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial v}\frac{\partial \log R_2}{\partial u} &= \frac{\partial \varrho_2}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{\partial R_2}{R_1 R_2 \partial u} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Hat man durch Integration einer von beiden Gleichungen ϱ_1 oder ϱ_2 gefunden, so ergiebt sich bzhw. ϱ_2 oder ϱ_1 ohne neue Integration aus Gl. (26), und dann ist durch (25) die Fläche in Parametern der Krümmungslinien dargestellt. Da die allgemeine Lösung 2 willkürliche Functionen einer Variabeln enthält, so ergiebt sie eine Classe von Flächen, welche durch gemeinsame Indicatrix charakterisirt ist. In analoger Weise ergab sich in der Curventheorie aus der specifischen Gleichung, d. i. aus einer Relation zwischen 2 Indicatricen, eine Classe von Curven. Im gegenwärtigen Falle werden die Dimensionen, welche bei den Curven ganz beliebig angefügt wurden, durch die Krümmungsradien ϱ_1, ϱ_2 eingeführt.

§. 26. **Orthogonale Flächensysteme.** Ist in jedem Punkte der Schnittlinie zweier Flächen der Winkel zwischen den Normalen beider ein rechter, so heissen die Flächen orthogonal. Schneidet nun eine Flächenschar eine andre, und ist jede Fläche der einen Schar mit

jeder Fläche der andern orthogonal, so bilden beide Scharen ein einfach orthogonales Flächensystem. Drei einander schneidende Scharen von Flächen bilden ein dreifach orthogonales Flächensystem, wenn je zwei von ihnen ein einfaches bilden, wenn also in jedem Schnittpunkte die Normalen der 3 sich schneidenden Flächen normal zu einander sind.

Variirt nun ein Punkt (xyz) mit 3 Parametern u, v, w, so ist er der Schnittpunkt der 3 Flächen $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, $w = \text{const.}$, sowie der Schnittpunkt der 3 Parameterlinien (u), (v), (w), d. i. der Schnittlinien jener 3 Flächen, Linien in welchen bzhw. (v, w), (w, u), (u, v) constant sind. Die auf die 3 Flächen bezüglichen Bestimmungsgrössen mögen durch dieselben Buchstaben mit den Indices 1, 2, 3 bezeichnet sein.

Wir nehmen zuerst an, dass die 3 Flächenscharen, welche von den genannten 3 Flächen bei Variation von bzhw. u, v, w durchlaufen werden, ein dreifach orthogonales System bilden. Die positiven Richtungen der Normalen seien denen der x, y, z congruent gewählt, so dass

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = +1$$

wird; dann giebt eine dreifache Entwickelung der folgenden Determinante:

$$\varkappa = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \begin{matrix} = \left(p_1 \frac{\partial x}{\partial u} + q_1 \frac{\partial y}{\partial u} + r_1 \frac{\partial z}{\partial u}\right) t_1 \\ = \left(p_2 \frac{\partial x}{\partial v} + q_2 \frac{\partial y}{\partial v} + r_2 \frac{\partial z}{\partial v}\right) t_2 \\ = \left(p_3 \frac{\partial x}{\partial w} + q_3 \frac{\partial y}{\partial w} + r_3 \frac{\partial z}{\partial w}\right) t_3 \end{matrix}$$

und man hat:

$$p_1 \frac{\partial x}{\partial u} + q_1 \frac{\partial y}{\partial u} + r_1 \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\varkappa}{t_1}$$

$$p_2 \frac{\partial x}{\partial u} + q_2 \frac{\partial y}{\partial u} + r_2 \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

$$p_3 \frac{\partial x}{\partial u} + q_3 \frac{\partial y}{\partial u} + r_3 \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

woraus, mit nachfolgender Anwendung der Analogie:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\varkappa p_1}{t_1};\quad \frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\varkappa q_1}{t_1};\quad \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\varkappa r_1}{t_1}\\ \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\varkappa p_2}{t_2};\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\varkappa q_2}{t_2};\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\varkappa r_2}{t_2}\\ \frac{\partial x}{\partial w}=\frac{\varkappa p_3}{t_3};\quad \frac{\partial y}{\partial w}=\frac{\varkappa q_3}{t_3},\quad \frac{\partial z}{\partial w}=\frac{\varkappa r_3}{t_3}\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

und nach Verbindung:

$$f_1=0;\quad f_2=0:\quad f_3=0 \tag{29}$$

und nach partieller Differentiation:

$$\begin{aligned}0=\frac{\partial f_1}{\partial u}=\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}\\ +\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial w\,\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial w\,\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial w\,\partial u}\end{aligned} \tag{30}$$

nebst 2 analogen Gleichungen, durch deren Verbindung hervorgeht:

$$0=-\frac{\partial f_1}{\partial u}+\frac{\partial f_2}{\partial v}+\frac{\partial f_3}{\partial w}=2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial w}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial w}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial w}\right)$$

Setzt man die Werte (28) ein, so kommt (mit Hinzufügung der 2 analogen Resultate):

$$F_1=0;\quad F_2=0;\quad F_3=0$$

Dies in Verbindung mit (29) zeigt, dass die Parameterlinien (u), (v), (w) sämmtlich Krümmungslinien, und zwar auf je beiden Flächen, die sich darin treffen, sind. Wir haben den Satz:

S. 9. Die, ein dreifach orthogonales System bildenden 3 Flächenscharen schneiden sich gegenseitig in ihren Krümmungslinien.

Wir sehen jetzt von der ersten Flächenschar ab und nehmen an, dass die Flächen $v=$ const. und $w=$ const. ein einfach orthogonales System bilden, wählen aber auf ersteren die Parameter u, w, auf letzteren u, v orthogonal, während die Parameterlinie (u) beiden gemeinsam bleibt. Erstere Bedingung ist ausgedrückt durch

$$p_2 p_3+q_2 q_3+r_2 r_3=0 \tag{31}$$

letztere durch

$$f_2=0;\quad f_3=0$$

Die Tangenten der Parameterlinien (v) und (w) fallen dann bzhw. zusammen mit den Normalen der Flächen $v=$ const. und $w=$ const. d. h. es ist:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial x}{\partial v}:\frac{\partial y}{\partial v}:\frac{\partial z}{\partial v}=p_2:q_2:r_2\\[2ex]\frac{\partial x}{\partial w}:\frac{\partial y}{\partial w}:\frac{\partial z}{\partial w}=p_3:q_3:r_3\end{array}\right\}\qquad(32)$$

woraus nach (31):

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w}=0$$

Die Differentiation dieser Gleichung nach u ergab oben Gl. (30). Wendet man auf sie die Proportionen (32) an, so erhält man:

$$MF_2+NF_3=0$$

wo

$$M=\frac{1}{p_3}\frac{\partial x}{\partial w};\quad N=\frac{1}{p_2}\frac{\partial x}{\partial v}$$

gesetzt ist. Diese Gleichung zeigt, dass F_2 und F_3 nur gleichzeitig verschwinden können, und man hat den Satz:

S. 10. Ist die Schnittlinie eines einfach orthogonalen Flächensystems Krümmungslinie auf der einen Flächenschar, so ist sie es auch auf der andern.

Sind ferner a, b, c die Richtungscosinus der Tangente der Parameterlinie (u), so ist

$$a=k\frac{\partial x}{\partial u};\quad b=k\frac{\partial y}{\partial u};\quad c=k\frac{\partial z}{\partial u}$$

wo $k=e_3^{-\frac{1}{2}}$, daher

$$\frac{\partial a}{\partial w}=k\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial w}+\frac{\partial k}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial a}{\partial w}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial b}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial c}{\partial w}=NkF_2+\frac{\partial k}{\partial w}f_3$$

das ist $=0$, wenn die Parameter orthogonal und $F_2=0$ ist. Ebenso hat man:

$$\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial a}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial b}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial c}{\partial v}=0$$

Sofern beide Grössen null einander gleich sind, ist nach §. 15. die Bedingung erfüllt, unter welcher die Tangenten an die Parameterlinien (u) Normalen einer Fläche sind, und man hat den Satz:

S. 11. Wird eine Flächenschar von einer andern längs ihrer Krümmungslinien orthogonal geschnitten, so lassen sich beide von einer dritten Flächenschar orthogonal schneiden.

§. 27. **Mittelpunktsflächen in Beziehung zu den Krümmungslinien.** Differentiirt man die Gleichungen der ersten Mittelpunktsfläche (§. 18.) partiell nach den Formeln (5) und (19), so kommt:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial \varrho_1}{\partial u} p; \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial e}{\partial v}\frac{p}{2E}\right) \tag{33}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} &= -\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial u^2} p \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} &= -\frac{1}{\varrho_2}\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial u \partial v} p \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} = -\frac{1}{2e}\frac{\partial g}{\partial u}\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + C'\frac{\partial x}{\partial v} + C''p$$

wo C', C'' nicht in Anwendung kommen. Hieraus ergiebt sich:

$$p_1 t_1 = \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\begin{vmatrix} q & \frac{\partial y}{\partial v} \\ r & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{g}{t}\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}$$

nebst 2 analogen Gleichungen, denen zufolge

$$t_1 = \sqrt{g}\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial \varrho_1}{\partial u} \tag{35}$$

$$p_1 = -\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial x}{\partial u}; \quad q_1 = -\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial y}{\partial u}; \quad r_1 = -\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial z}{\partial u}$$

Die Fundamentalgrössen der Mittelpunktsfläche werden ihrer Definition gemäss:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right)^2; \quad f_1 = \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\frac{1}{2E}\frac{\partial e}{\partial v} = \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} \\ g_1 &= \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2\left\{g + \left(\frac{1}{2E}\frac{\partial e}{\partial v}\right)^2\right\} = \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}\right)^2 + g\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

$$E_1 = -\frac{\sqrt{e}}{\varrho_1}\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}; \quad F_1 = 0; \quad G_1 = \frac{1}{2\sqrt{e}}\frac{\partial g}{\partial u}\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) \tag{37}$$

Die Richtungscosinus der Tangente der Parameterlinie (u) auf der Mittelpunktsfläche sind:

$$\frac{1}{\sqrt{e_1}}\frac{\partial x_1}{\partial u} = p; \quad \frac{1}{\sqrt{e_1}}\frac{\partial y_1}{\partial u} = q; \quad \frac{1}{\sqrt{e_1}}\frac{\partial z_1}{\partial u} = r$$

Dies längs derselben Linie s_1 differentiirt giebt:

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{e_1}}\frac{\partial x_1}{\partial u} = -\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\sqrt{e}}{\varrho_1}p_1; \quad \text{etc.}$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Hauptnormale von s_1 mit der Flächennormale zusammenfällt. Hieraus folgt, dass die Binormale von s_1 der Tangente der Parameterlinie (v) parallel, und die Krümmung von s_1 die des berührenden Normalschnittes ist.

Ferner ist

$$\partial s_1 = \sqrt{e_1}\partial u = \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\partial u \quad \text{also}$$

$$s_1 = \varrho_1 + \text{const.} \tag{38}$$

Man kann daher die Gleichungen der ersten Mittelpunktsfläche (§. 18.) auch schreiben:

$$x = x_1 - (s_1 - \text{const.})\frac{\partial x_1}{\partial s_1}; \quad \text{etc.}$$

Demzufolge ist die Krümmungslinie (u) die Evolvente der Curve s_1. Die Hauptresultate sind folgende.

S. 12. Jeder Krümmungslinie auf der Urfläche entspricht ihre Evolute auf der zugehörigen Mittelpunktsfläche.

S. 13. Die Tangente der Krümmungslinie ist parallel der Normale der Mittelpunktsfläche, die ihrer Evolute parallel der Normale der Urfläche.

S. 14. Die Hauptnormale der Evolute ist Normale der Mittelpunktsfläche.

§. 28. **Asymptotische Linien.** Durch jeden Punkt einer negativ gekrümmten Fläche gehen 2 Normalschnitte, deren Krümmung in diesem Punkte null ist. Asymptotische Linien heissen dann diejenigen Linien auf der Fläche, welche in jedem Punkte einen Normalschnitt von Nullkrümmung berühren. Hiernach schneiden sich in jedem Punkte der negativ gekrümmten Fläche 2 asymptotische Linien.

Wendet man den Meusnier'schen Satz, nach welchem

$$\frac{\partial \tau}{\partial s}\cos\Theta = \frac{1}{\varrho}$$

ist, auf die asymptotischen Linien an, so ist hier $\frac{1}{\varrho}$, folglich entweder $\frac{\partial \tau}{\partial s}$ oder $\cos\Theta$ durchweg null, das heisst:

S. 15. **Eine asymptotische Linie ist entweder gerade, oder ihre Hauptnormale, mithin auch ihre Schmiegungsebene berühren die Fläche.**

Die Bedingung einer asymptotischen Linie ist zufolge I. Gl. (62):

$$E\partial u^2 + 2F\partial u\,\partial v + G\partial v^2 = 0 \tag{39}$$

Sollen die Parameterlinien (u), (v) asymptotische Linien sein, so wird die Bedingung

$$E = 0, \quad G = 0$$

Demnach treten in manchen Formeln grosse Vereinfachungen ein. Insbesondere gehen in §. 5. 6. die Gl. (19) (27) (28) über in

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{F}{t^2}\left(f\frac{\partial x}{\partial u} - e\frac{\partial x}{\partial v}\right); \quad \frac{\partial p}{\partial v} = \frac{F}{t^2}\left(f\frac{\partial x}{\partial v} - g\frac{\partial x}{\partial u}\right) \tag{40}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{t^2}{F}\frac{\partial F}{\partial u} &= f\left(\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u}\right) + \tfrac{1}{2}\left(g\frac{\partial e}{\partial u} - e\frac{\partial g}{\partial u}\right) \\ \frac{t^2}{F}\frac{\partial F}{\partial v} &= f\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}\right) + \tfrac{1}{2}\left(e\frac{\partial g}{\partial v} - g\frac{\partial e}{\partial v}\right) \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Die Krümmung eines Normalschnitts wird

$$\frac{1}{\varrho} = 2F\frac{\partial u\,\partial v}{\partial s^2} \tag{42}$$

die Summe der Krümmungen zweier sich rechtwinklig schneidenden Normalschnitte

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = -\frac{2fF}{t^2} \tag{43}$$

das Product der Hauptkrümmungen

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = -\frac{F^2}{t^2} \tag{44}$$

die einzelnen Hauptkrümmungen

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{\sqrt{eg} - f}{t^2}F; \quad \frac{1}{\varrho_2} = -\frac{\sqrt{eg} + f}{t^2}F \tag{45}$$

die Hauptkrümmungsrichtungen

$$\sqrt{e}\,\partial u = \sqrt{g}\,\partial u; \quad \sqrt{e}\,\partial u = -\sqrt{g}\,\partial v \tag{46}$$

Die Beziehung zwischen conjugirten Tangenten, für welche $\frac{\partial v}{\partial u}$ einzeln die Werte k und k' hat, ist hier

$$k + k' = 0$$

Der Drehungswinkel ν der Normale bei beliebiger Variation wird hier bestimmt durch

$$\partial\nu^2 = \frac{F^2}{t^2}(e\partial u^2 - 2f\partial u\partial v + g\partial v^2) \tag{47}$$

ihr Drehpunktsabstand vom Punkte (xyz) ist

$$R = \frac{2}{F}\frac{t^2\partial u\partial v}{e\partial u^2 - 2f\partial u\partial v + g\partial v^2} \tag{48}$$

ihre Gleitung längs der momentanen Rotationsaxe, deren Richtung durch $\partial v = -k\partial u$ ausgedrückt wird, oder der kürzeste Abstand consecutiver Normalen ist

$$\partial Q = \frac{e\partial u^2 - g\partial v^2}{\sqrt{e\partial u^2 - 2f\partial u\partial v + g\partial v^2}} \tag{49}$$

Der Torsionswinkel einer Curve s wird hier

$$\vartheta = \Theta + \int \frac{F}{t}\frac{e\partial u^2 - g\partial v^2}{\partial s} \tag{50}$$

Die asymptotischen Linien werden am leichtesten aus den Krümmungslinien, und diese am leichtesten aus jenen gefunden. Bezeichnet der Index 1 die Zugehörigkeit zu den Krümmungslinien, so ist in den Gl. (2) $E = 0$; $G = 0$; $F_1 = 0$ zu setzen; man hat also zunächst:

$$\left.\begin{aligned} E_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 + G_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2 = 0; \quad E_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 + G_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2 = 0 \\ E_1\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} + G_1\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} = F \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

was auf die Gl. (39) führt, die hier lautet:

$$E_1\partial u_1^2 + G_1\partial v_1^2 = 0$$

Wendet man statt dessen die Gl. (2) mit vertauschten Parametern an, so lauten sie:

$$\left.\begin{aligned} 2F\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial u_1} = E_1; \quad 2F\frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v}{\partial v_1} = G_1 \\ \frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial v_1} + \frac{\partial v}{\partial u_1}\frac{\partial u}{\partial v_1} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

§. 29. **Kürzeste Linien.** Ist s eine variabele Verbindungslinie zweier festen Punkte auf der Fläche, und bezeichnet δs die Variation ihrer Länge, so nimmt die Länge von irgend einem momentanen Werte s an momentan zu oder ab, jenachdem δs positiv oder negativ ist. Bei derselben Variation in umgekehrtem Verlaufe muss also bzhw. s von demselben momentanen Werte an momentan ab- oder zunehmen. Solange daher δs positiv oder negativ ist, kann s in entgegengesetztem Sinne variiren, mithin ist der momentane Wert nicht der kleinste. Folglich ist notwendige Bedingung einer kürzesten Verbindung zweier Punkte:

$$\delta s = 0$$

Stellt man s als Integral zwischen constanten Grenzen dar, so lautet die Gleichung:

$$\delta \int \partial s = \int \delta \partial s = 0$$

Aus der Gleichung $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$ findet man:

$$\partial s \, \delta \partial s = \partial x \, \delta \partial x + \partial y \, \delta \partial y + \partial z \, \delta \partial z$$

Ausserdem hat man:

$$\partial \left(\frac{\partial x}{\partial s} \delta x + \frac{\partial y}{\partial s} \delta y + \frac{\partial z}{\partial s} \delta z \right) = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \delta x + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \delta y + \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \delta z \right) \partial s$$
$$+ \frac{\partial x}{\partial s} \delta \partial x + \frac{\partial y}{\partial s} \delta \partial y + \frac{\partial z}{\partial s} \delta \partial z$$

Integrirt man dies zwischen den Endpunkten von s, so verschwindet das Integral der Linken, weil x, y, z in den Endpunkten unveränderlich sind, desgleichen das Integral der Summe der 3 letzten Terme, d. i. der Grösse $\delta \partial s$ der Bedingung gemäss, und es bleibt:

$$\int \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \delta x + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \delta y + \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \delta z \right) \partial s = 0$$

Die Bedingung, unter der die Linie auf der Fläche liegt, lautet:

$$p \delta x + q \delta y + r \delta z = 0$$

Multiplicirt man sie mit $\lambda \partial s$, integrirt zwischen denselben Grenzen und subtrahirt von der vorigen Gleichung, so kommt:

$$\int \left\{ \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - \lambda p \right) \delta x + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \lambda q \right) \delta y + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \lambda r \right) \delta z \right\} \partial s = 0$$

Macht man einen der 3 binomischen Coefficienten, z. B. den von δz durch Bestimmung von λ zu null, so enthält das Integral nur die 2 unabhängig variabelen δx, δy; damit es also bei jeder Variation verschwinde, muss

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = \lambda p; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = \lambda q; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \lambda r$$

sein. Da die linken Seiten sich verhalten wie die Richtungscosinus der Hauptnormale von s, so hat man den Satz

S. 16. Die Hauptnormale einer kürzesten Linie fällt zusammen mit der Normale der Fläche.

Offenbar ist jedes Stück einer kürzesten Linie auch kürzeste Linie zwischen seinen Endpunkten; folglich ist die Eigenschaft einer Kürzesten unabhängig von den Endpunkten.

Ferner bestimmt die Eigenschaft S. 16. eine Classe von Curven auf der Fläche. Denn diesem Satze zufolge sind die Richtungscosinus der Hauptnormale gegebene Functionen von (u, v), also bleibt nach Elimination von u, v eine Relation zwischen ihnen übrig. In der Curventheorie (Bd. 56. S. 59. Aufg. 3.) ist gezeigt, dass durch eine solche eine Schar von Curven bestimmt wird, deren jede eine besondere Tangente hat. Ist also ein Punkt und in diesem die Tangentialrichtung gegeben, so ist die Curve bestimmt.

Wir betrachten nun die Kürzesten als definirt durch die Eigenschaft S. 16., dann gehen durch jeden Punkt der Fläche Kürzeste in allen Tangentialrichtungen. Dies gestattet einige unmittelbare Anwendungen auf das Frühere.

Der in §. 7. eingeführte Winkel Θ ist bei einer Kürzesten null; daher ist ihre Krümmung gleich der des berührenden Normalschnitts, ihre Schmiegungsebene dessen Ebene, ihre Binormale Tangente der Fläche.

Nach S. 14. entspricht einer Krümmungslinie auf der zugehörigen Mittelpunktsfläche eine Linie von der Eigenschaft S. 16. Wir können daher jenen Satz so aussprechen:

S. 16. Die Evolute der Krümmungslinie ist Kürzeste auf der zugehörigen Mittelpunktsfläche.

§. 30. **Orthogonal geodätische Liniensysteme.** Es seien jetzt die Parameterlinien (u) eine beliebige Schar Kürzester; dann ist die Bedingung:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}\right) = p; \quad \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}\right) = q; \quad \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}\right) = r$$

wo τ den Krümmungswinkel bezeichnet, oder, da v constant ist:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}\right)\frac{\partial u}{\partial \tau} = p; \text{ etc. oder}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial \tau}+\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}=p;\text{ etc.}$$

Multiplicirt man mit $\frac{\partial x}{\partial v}$, so ist die Summe der 3 Analogen:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}-\tfrac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial s}+f\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}=0$$

Wird nun die Schar der Kürzesten von den Parameterlinien (v) rechtwinklig geschnitten, ist also $f=0$, so erhält man, weil $\frac{\partial u}{\partial s}$ nicht null sein kann:

$$\frac{\partial e}{\partial v}=0$$

folglich ist e Function von u allein. Man kann nun für ∂u substituiren $\frac{\partial u}{\sqrt{e}}$; dann wird

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=1$$

und der neue Wert von e ist 1, also

$$t^2=g$$

und die Gleichung für das Linienelement lautet:

$$\partial s^2=\partial u^2+t^2\partial v^2$$

Die Elemente der Parameterlinien (u), (v) sind hiernach ∂u und $t\partial v$; diese sind die Seiten des rechteckigen Flächenelements $t\partial u\partial v$.

Ein Stück der Parameterlinie (u) zwischen $u=u_0$ und u_1 ist also

$$\int_{u_0}^{u_1}\partial u=u_1-u_0$$

Lässt man diese Linien bei constanten u_0 und u_1 mit v variiren, so bleibt ihre Länge constant, während ihre Endpunkte auf 2 Parameterlinien (v) fortrücken, und misst deren kürzesten normalen Abstand auf der Fläche. Demnach sind die Linien (v), welche die Kürzesten (u) rechtwinklig schneiden, Linien constanten normalen Abstands, und heissen als solche **geodätische Parallelen**. Das System beider Scharen nennen wir ein **orthogonal geodätisches** und ebenso die Parameter.

Setzt man bei Annahme orthogonal geodätischer Parameter u, v stets

$$e=1;\quad f=0;\quad g=t^2$$

so werden die Formeln von §. 22.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= Ep;\quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{1}{t}\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + Fp\\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= -t\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{t}\frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + Gp\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial u} &= -E\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{F}{t^2}\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial p}{\partial v} &= -F\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{G}{t^2}\frac{\partial x}{\partial v}\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

$$EG - F^2 = -t\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} \tag{55}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{F}{t}\frac{\partial t}{\partial u}\\ \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v} &= \left(Et + \frac{G}{t}\right)\frac{\partial t}{\partial u} - \frac{F}{t}\frac{\partial t}{\partial v}\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Der Torsionswinkel einer Kürzesten wird:

$$\vartheta = \int \frac{F(\partial u^2 - t^2 \partial v^2) + (G - t^2 E)\partial u \partial v}{t\sqrt{\partial u^2 + t^2 \partial v^2}} \tag{57}$$

der Torsionswinkel der Parameterlinie (u):

$$\vartheta = \int \frac{F\partial u}{t} \tag{58}$$

§. 31. **Differentialgleichung der Kürzesten.** Die Parameter seien orthogonal geodätisch. Für eine beliebige Kürzeste s sei $\frac{\partial v}{\partial u} = k$; dann ist

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} + k\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{1 + t^2 k^2}}$$

oder, wenn man

$$tk = \operatorname{tg}\mu$$

setzt:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial u}\cos\mu + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\sin\mu}{t}$$

Dies nochmals längs s differentiirt giebt mit Anwendung der Formeln (53):

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = \frac{p}{\varrho} = Ep\cos^2\mu + 2\left(\frac{1}{t}\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + Fp\right)\frac{\sin\mu\cos\mu}{t}$$

$$+\left(-t\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{t}\frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + Gp\right)\frac{\sin^2\mu}{t^2} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}\sin\mu + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\sin\mu}{t}\right)$$

Multiplicirt man mit $\frac{\partial x}{\partial u}$ und addirt die Analogen, so kommt nach Division durch $\sin^2\mu$:

$$\frac{\partial\mu}{\sin\mu} = -\frac{\partial s}{t}\frac{\partial t}{\partial u} \tag{59}$$

Dieselbe Gleichung erhält man auch bei Anwendung des Multiplicators $\frac{\partial x}{\partial v}$. Der Multiplicator p giebt nur die allgemein gültige Gleichung I. (31). Folglich vertritt die Gl. (59) alle Bestimmungen. Ihre Anwendung setzt die Kenntniss einer speciellen Schar Kürzester voraus; durch ihre Integration findet man das vollständige System aller Kürzesten auf der Fläche.

§. 32. **Geodätische Polarcoordinaten.** Orthogonal geodätische Liniensysteme können dreierlei Form haben, jenachdem die Schar der Kürzesten ohne Durchschnitt neben einander besteht, oder von einer Curve eingehüllt wird, oder von einem festen Punkte ausgeht. Die Bedingung der 2 letzten Fälle ist nach §. 20., dass g, oder hier t, bzhw. längs einer Curve oder in einem Punkte verschwindet. Im letzten Falle verschwindet t unabhängig von v, also für einen constanten Wert $u = c$ und, nach Substitution von $u+c$ für u, für $u=0$. Ist letztere Anordnung getroffen, so drückt u den kürzesten Abstand eines beliebigen Punkts vom festen Punkte längs der Fläche, d. i. den geodätischen Radiusvector des erstern aus. Der Winkel, den ein variabeler Radiusvector mit einem festen bildet, ist dann Function von v, lässt sich daher selbst zum Parameter v nehmen. Die Parameterlinien (v) werden concentrische geodätische Kreise mit dem Radius u. Die Länge eines solchen Kreisbogens ist $=\int t\partial v$; für unendlich kleinen Radius, wo der Kreis eben wird, muss er aber $=\int u\partial v$ sein. Folglich ist die Bedingung, unter der v jenen Winkel, d. i. das geodätische Azimut, darstellt:

$$\lim\frac{t}{u} = 1 \tag{60}$$

und das Verfahren bei Ermittelung des Parameters folgendes. Man berechne für verschwindendes u

$$f(v) = \lim\frac{t}{u} \quad \text{und}$$

$$v' = \int f(v)\partial v$$

dann entspricht den Parametern u, v' der Wert

$$t' = \frac{t}{f(v)}$$

daher ist

$$\lim \frac{t'}{u} = \frac{1}{f(v)} \lim \frac{t}{u} = 1$$

folglich ist v' der gesuchte Parameter.

§. 33. **Conforme Abbildung der Flächen auf der Ebene.** Eine Fläche wird als Abbildung einer andern betrachtet, wenn man nach irgend einem Gesetze jedem Punkte der einen einen bestimmten Punkt der andern entsprechen lässt. Die entsprechenden Punkte und die von ihnen entsprechend erzeugten Linien heissen dann die Abbildungen von einander. So ist z. B. die Indicatrix der Normale die Abbildung derjenigen Curve auf der Kugel, welche der Fusspunkt durchläuft; das Gesetz ist hier die gleiche Richtung der Normalen. Analytisch ausgedrückt wird die Abbildung, indem man beide Flächen in denselben Parametern darstellt, so dass die Punkte (uv) sich auf beiden entsprechen.

Das Gesetz der conformen Abbildung ist die Aehnlichkeit der Flächenelemente. Alle Elemente der einen Fläche sind den entsprechenden der andern ähnlich, wenn die von jedem Punkte ausgehenden Linienelemente

$$\sqrt{e\partial u^2 + 2f\partial u\partial v + g\partial v^2}$$

auf der einen den entsprechenden

$$\sqrt{e'\partial u^2 + 2f'\partial u\partial v + g'\partial v^2}$$

auf der andern proportional sind, wenn also

$$e:f:g = e':f':g'$$

ist.

Das Problem der conformen Abbildung besteht also ursprünglich in folgendem. Zwei Flächen, Φ und Φ'', sind jede in besondern Parametern (u, v) und (u'', v'') gegeben, wodurch (e, f, g) und (e'', f'', g'') bekannt sind. Die Parameter der einen, welcher man will, z. B. u, v, kann man beibehalten. Dann soll man gemäss den Gl. (1), angewandt auf Φ'', von den Parametern (u'', v'') auf die Parameter (u', v') übergehen, wo

$$e' = me; \quad f' = mf; \quad g' = mg \tag{61}$$

zu setzen ist, so dass nach Elimination von m zwei Differentialgleichungen zur Bestimmung von u', v' als Functionen von u'', v'' zu integriren bleiben. Ist dies geschehen, so hat man:

$$u' = u; \quad v' = v$$

Das Problem lässt sich aber in 2 einfachere zerlegen. Man kann erst die Fläche Φ auf der Ebene, dann diese auf der Fläche Φ'' abbilden. Da überdies ein Parameterpar willkürlich ist, so nehmen wir auf der Ebene cartesische Coordinaten u, v zu Parametern. Dann handelt es sich nur noch um folgendes Problem. Eine Fläche ist in beliebigen Parametern gegeben; man soll diejenigen Parameter finden, welche bei conformer Abbildung auf der Ebene in cartesische Coordinaten übergehen. Den cartesischen Coordinaten als Parameter der Ebene entsprechen die Fundamentalgrössen

$$e' = 1; \quad f' = 0; \quad g' = 1$$

daher ist nach (61) die Bedingung:

$$e = g; \quad f = 0$$

Hiermit sind wir zu einem neuen Liniensystem gelangt, das wir abkürzend das Abbildungsliniensystem nennen können. Die Parameter heissen dann Abbildungsparameter. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass die das System bildenden Linien, jede für sich, ganz beliebige Linien sind, und nur ihr System die besondere Eigenschaft besitzt. Das System ist bestimmt, sobald man auf der Fläche 2 sich rechtwinklig schneidende, sonst beliebige Linien als erste Parameterlinien angenommen hat.

Die Formeln von §. 22. gehen hier, wo das Linienelement

$$\partial s = t\sqrt{\partial u^2 + \partial v^2}$$

ist, in folgende über:

$$t = e = g$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \frac{1}{2t}\left(\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\right) + Ep \\
\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} &= \frac{1}{2t}\left(\frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) + Fp \\
\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \frac{1}{2t}\left(-\frac{\partial t}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\right) + Gp
\end{aligned}\right\} \quad (62)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial u} &= -\frac{1}{t}\left(E\frac{\partial x}{\partial u} + F\frac{\partial x}{\partial v}\right) \\
\frac{\partial p}{\partial v} &= -\frac{1}{t}\left(F\frac{\partial x}{\partial u} + G\frac{\partial x}{\partial v}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (63)$$

$$2(EG - F^2) + \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial v^2} - \frac{1}{t}\left\{\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)^2\right\} = 0 \quad (64)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial u}&=\frac{E+G}{2t}\frac{\partial t}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial v}&=\frac{E+G}{2t}\frac{\partial t}{\partial u}\end{aligned}\right\}\quad (65)$$

Ein besonderer Fall der conformen Abbildung ist die Abwickelung; hier sind die ähnlichen Flächenelemente congruent.

III. Besondere Arten von Flächen.

§. 34. **Abwickelbare Flächen.** Im folgenden soll von Flächen gehandelt werden, die auf Ebenen abwickelbar sind. Man nennt solche gewöhnlich schlechthin abwickelbare Flächen.

Betrachtet man die Ebene der xy als die Fläche, auf welcher die Abwickelung geschieht, und nimmt die cartesischen Coordinaten $x=u$, $y=v$ zu Parametern, so wird

$$\partial s^2 = \partial x^2+\partial y^2 = \partial u^2+\partial v^2$$

also

$$e=1;\quad f=0;\quad g=1;\quad t=1 \quad (1)$$

Ferner werden auf jener Ebene $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$, etc. null, daher

$$E=0;\quad F=0;\quad G=0$$

woraus:

$$EG-F^2=0 \quad (2)$$

Nach §. 17. müssen die Gl. (1) (2) auch für die auf der Ebene abwickelbaren Flächen gelten; folglich ist hier

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}=\frac{EG-F^2}{t^2}=0$$

Hiernach ist immer eine von beiden Hauptkrümmungen null; wir setzen:

$$\frac{1}{\varrho_1}=0$$

Ist aber die Krümmung eines Normalschnitts null, so ist es nach §. 7. auch die Krümmung jeder denselben berührenden Curve, in unserm Falle also auch die Krümmung der ersten Krümmungslinie, und zwar in ihrer ganzen Ausdehnung, weil Gl. (2) für alle Punkte gilt; d. h. die erste Krümmungslinie ist gerade, und man hat den Satz:

S. 18. Jede Abwickelbare wird von einer Geraden erzeugt, und diese ist Krümmungslinie auf ihr.

Ferner hat eine Normale, welche längs einer Krümmungslinie gleitet, nach §. 25. entweder constante Richtung oder einen Coincidenzpunkt. Das letztere ist bei der geraden Krümmungslinie nicht möglich, weil sie selbst den kürzesten Abstand der consecutiven Normalen misst. Folglich ist die Richtung der Normale constant. Hieraus folgt weiter, dass die Fläche längs der geraden Krümmungslinie eine einzige Berührungsebene hat. Variirt dann der Punkt (xyz) transversal, so kann die Berührungsebene nur um die gerade Krümmungslinie rotiren; diese bildet dann ihre Coincidenzlinie und hat entweder constante Richtung oder einen Coincidenzpunkt. In beiden Fällen ist die Urfläche Einhüllende einer mit einem Parameter variirenden Ebene, und zwar kann sie als solche dreierlei Form haben: jenachdem die gerade Krümmungslinie constante Richtung oder einen festen oder einen variabeln Coincidenzpunkt hat, ist die Fläche cylindrisch, konisch oder Tangentenfläche.

§. 35. **Tangentenfläche.** Die Gerade

$$x = \alpha + au; \quad y = \beta + bu; \quad z = \gamma + cu \tag{3}$$

variire mit v; dann hat sie einen Coincidenzpunkt, wenn

$$\begin{vmatrix} a & \partial a & \partial\alpha \\ b & \partial b & \partial\beta \\ c & \partial c & \partial\gamma \end{vmatrix} = 0$$

ist. Wenn wie wir annehmen nicht a, b, c constant sind, so ist die Gleichung identisch mit den dreien:

$$\partial\alpha = a\partial\lambda + \mu\partial a; \quad \partial\beta = b\partial\lambda + \mu\partial b; \quad \partial\gamma = c\partial\lambda + \mu\partial c$$

woraus:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = a\frac{\partial\lambda}{\partial v} + (\mu + u)\frac{\partial a}{\partial v}; \quad \text{etc.} \tag{4}$$

Sind a, b, c die Richtungscosinus der Geraden, so findet man nach I. Gl. (3):

$$e = 1; \quad f = \frac{\partial\lambda}{\partial v}$$

Sollen die Parameter u, v der erzeugten Fläche orthogonal sein, so hat man $\partial\lambda = 0$ zu setzen, und erhält:

$$\partial\alpha = \mu\partial a; \quad \partial\beta = \mu\partial b; \quad \partial\gamma = \mu\partial c \tag{5}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = (\mu + u)\frac{\partial a}{\partial v}; \quad \text{etc.} \tag{6}$$

Der Drehungswinkel der Erzeugenden ist Function von v; daher können wir ihn $= v$ setzen; dann wird

$$\partial v^2 = \partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2 \tag{7}$$

folglich

$$e = 1;\quad f = 0;\quad g = (\mu + u)^2;\quad t = \mu + u \tag{8}$$

Es zeigt sich, dass die Parameter orthogonal geodätisch sind.

Ferner findet man:

$$pt = (\mu + u)\begin{vmatrix} b & \frac{\partial b}{\partial v} \\ c & \frac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix};\quad \text{etc.}$$

woraus:

$$p = \begin{vmatrix} b & \frac{\partial b}{\partial v} \\ c & \frac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix};\quad \text{etc.} \tag{9}$$

Eine zweite Differentiation der Gl. (4) (6) giebt:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0;\quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial a}{\partial v};\quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = (\mu + u)\frac{\partial^2 a}{\partial v^2} + \frac{\partial \mu}{\partial v}\frac{\partial a}{\partial v}$$

woraus:

$$E = 0;\quad F = 0;\quad G = (\mu + u) V \tag{10}$$

wenn wir zur Abkürzung

$$V = \begin{vmatrix} a & \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial^2 a}{\partial v^2} \\ b & \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial^2 b}{\partial v^2} \\ c & \frac{\partial c}{\partial v} & \frac{\partial^2 c}{\partial v^2} \end{vmatrix} \tag{11}$$

setzen. Demnach sind die Parameterlinien auch Krümmungslinien; daher die Hauptkrümmungen:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{E}{e} = 0;\quad \frac{1}{\varrho_2} = \frac{G}{g} = \frac{V}{\mu + u} \tag{12}$$

Der Drehpunktsabstand der Erzeugenden ist

$$-\frac{\partial a \partial \alpha + \partial b \partial \beta + \partial c \partial \gamma}{\partial v^2} = -\mu$$

folglich sind die Coordinaten des Coincidenzpunkts:

$$x_0 = \alpha - \mu a; \quad y_0 = \beta - \mu b; \quad z_0 = \gamma - \mu c$$

oder

$$x_0 = \int \mu \partial a - \mu a = -\int a \partial \mu; \quad \text{etc.}$$

Dieser erzeugt bei Variation von v, wofern er mit variirt, die Einhüllende der Geraden (3), die Gratlinie s_0 der Abwickelbaren, und zwar ist

$$\partial x_0 = -a \partial \mu; \quad \partial s_0 = -\partial \mu; \quad \frac{\partial x_0}{\partial s_0} = a$$

also

$$\alpha = x_0 + \mu a = x_0 - s_0 \frac{\partial x_0}{\partial s_0}$$

Dies eingeführt in (3) giebt:

$$x = x_0 + (u - s_0) \frac{\partial x_0}{\partial s_0}; \quad \text{etc.} \tag{13}$$

das ist für constantes u die Gleichung einer Evolvente von s_0, für constantes v die der Tangente. Es hat sich ergeben:

S. 19. Die Krümmungslinien einer Tangentenfläche sind die Tangente und die Evolvente ihrer Gratlinie. Dieselben sind zugleich orthogonal geodätische Parameterlinien.

Ferner ersieht man aus (7) (4) (9) (11), dass v der Krümmungswinkel, a, b, c die Richtungscosinus der Tangente, $\frac{\partial a}{\partial v}$, $\frac{\partial b}{\partial v}$, $\frac{\partial c}{\partial v}$ die der Hauptnormale, p, q, r die der Binormale, V das Krümmungsverhältniss, also $\int V \partial v$ der Torsionswinkel der Gratlinie ist. Geht man also von der beliebigen Curve s_0 aus, und lässt deren Tangente die Abwickelbare erzeugen, so folgen die Bestimmungsstücke der Fläche unmittelbar aus denen der Curve.

§. 36. **Abwickelung der Tangentenfläche.** Um die Tangentenfläche auf der Ebene abzuwickeln, haben wir nur diejenigen Parameter u_1, v_1 zu suchen, welche nach Abwickelung in ebene cartesische Coordinaten übergehen. Nach (1) entsprechen diesen die Werte:

$$e_1 = g_1 = t_1 = 1; \quad f_1 = 0 \tag{14}$$

Gehen wir also von den Werten (8) aus, so werden die Transformationsformeln II. Gl. (1):

$$1 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2$$

$$0 = \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} + \frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}$$

$$(\mu + u)^2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2$$

und lassen sich erfüllen durch

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial u} &= \cos\varkappa; \quad \frac{\partial u_1}{\partial v} = (\mu+u)\sin\varkappa \\ \frac{\partial v_1}{\partial u} &= -\sin\varkappa; \quad \frac{\partial v_1}{\partial v} = (\mu+u)\cos\varkappa \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Eliminirt man u_1 und v_1, so kommt:

$$-\frac{\partial\varkappa}{\partial v}\sin\varkappa = \sin\varkappa + (\mu+u)\frac{\partial\varkappa}{\partial u}\cos\varkappa$$

$$-\frac{\partial\varkappa}{\partial v}\cos\varkappa = \cos\varkappa - (\mu+u)\frac{\partial\varkappa}{\partial u}\sin\varkappa$$

woraus:

$$\frac{\partial\varkappa}{\partial v} = -1; \quad \frac{\partial\varkappa}{\partial u} = 0 \quad \text{oder}$$

$$\varkappa = \delta - v, \quad \text{wo } \delta \text{ constant.}$$

Dies eingeführt in (15) giebt:

$$\partial u_1 = \partial u\cos(\delta - v) + (\mu+u)\,\partial v\sin(\delta - v)$$
$$\partial v_1 = -\partial u\sin(\delta - v) + (\mu+u)\,\partial v\cos(\delta - v)$$

und nach Integration:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u\cos(\delta - v) + \int\mu\,\partial v\sin(\delta - v) \\ v_1 &= -u\sin(\delta - v) + \int\mu\,\partial v\cos(\delta - v) \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Hierdurch ist für jeden Punkt (uv) der Tangentenfläche der Punkt (u_1v_1) auf der Ebene bestimmt.

Dieselben Gleichungen lösen gleichzeitig das Problem der Kürzesten. Denn da die Parameterlinien (u_1) und (v_1) auf der Ebene Gerade, d. i. Kürzeste sind, so sind sie es auch auf der Abwickelbaren; und da jede Gerade auf der Ebene für irgend welche Werte von δ und u_1 mit der Pameterlinie $u_1 =$ const. identisch sein muss, so ist erstlich jede Kürzeste auf der Tangentenfläche durch eine der Gl. (16), und jedes orthogonal geodätische System durch beide Gleichungen dargestellt. Ueberdies ist bemerkenswert, dass hier 2 Scharen Kürzester sich rechtwinklig schneiden, folglich beide auch geodätisch parallel sind, was, wie leicht zu sehen, ausschliesslich Eigenschaft der Abwickelbaren ist, sofern dazu die Gl. (14) erfordert werden.

Die Abwickelung vertritt zugleich die conforme Abbildung.

§. 37. **Konische und cylindrische Fläche.** Ist der Ort der Geraden (3) eine konische Fläche, so sind α, β, γ constant. Nach (5)

ist dann $\mu = 0$; im übrigen bleibt alles, ausgenommen das auf die Curve s_0 Bezügliche, in unveränderter Geltung.

Im Fall einer cylindrischen Fläche, wo a, b, c constant, kann v seine Bedeutung nicht behalten. Setzen wir statt dessen

$$\partial v^2 = \partial\alpha^2 + \partial\beta^2 + \partial\gamma^2$$

so wird

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial \alpha}{\partial v}$$

$$e = 1; \quad f = 0; \quad g = 1; \quad t = 1$$

mit der Bedingung

$$a\partial\alpha + b\partial\beta + c\partial\gamma = 0 \quad \text{oder}$$
$$a\alpha + b\beta + c\gamma = \text{const.}$$

welche dadurch zu erfüllen ist, dass man den Ausgangspunkt der Geraden $(\alpha\beta\gamma)$ in ihren Durchschnitt mit einer Ebene normal zu ihr legt. Dann sind u, v die Parameter, welche nach Abwickelung in cartesische Coordinaten übergehen, und zwar bedeutet v einen Bogen der Curve, welche der Punkt $(\alpha\beta\gamma)$ erzeugt, und welche die **Basis** der cylindrischen Fläche heisst, und u den normalen Abstand des Punktes (uv) von der Basis. Ferner ist

$$p = pt = \begin{vmatrix} b & \frac{\partial\beta}{\partial v} \\ c & \frac{\partial\gamma}{\partial v} \end{vmatrix}; \quad \text{etc.}$$

$$E = 0; \quad F = 0; \quad G = \begin{vmatrix} a & \frac{\partial\alpha}{\partial v} & \frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2} \\ b & \frac{\partial\beta}{\partial v} & \frac{\partial^2\beta}{\partial v^2} \\ c & \frac{\partial\gamma}{\partial v} & \frac{\partial^2\gamma}{\partial v^2} \end{vmatrix}$$

Die Determinante entwickelt giebt:

$$G = (al + bm + cn)\frac{\partial\tau}{\partial v}$$

wo τ Krümmungswinkel, l, m, n Richtungscosinus der Binormale der Curve v, also identisch mit a, b, c sind. Daher hat man:

$$G = \frac{G}{g} = \frac{1}{\varrho_2} = \frac{\partial\tau}{\partial v}$$

d. h. die zweite Hauptkrümmung ist die Krümmung der Basis.

Die in §. 36. behandelte Aufgabe lässt sich in analoger Weise bei der cylindrischen Fläche durchführen, wo nur 1 statt $\mu + u$ zu schreiben ist, und man findet als allgemeinste Parameter, und zugleich als Gleichungen der Kürzesten und der orthogonal geodätischen Systeme:

$$u_1 = u \cos \varkappa + v \sin \varkappa$$
$$v_1 = -u \sin \varkappa + v \cos \varkappa$$

wo $\varkappa$ constant.

§. 38. **Flächen constanter Krümmung.** Die Krümmung einer Fläche sei constant $= k^2$, so dass k bei negativer Krümmung imaginär zu denken ist. Führt man orthogonal geodätische Parameter u, v ein, so ist nach II. Gl. (55)

$$k^2 = \frac{EG - F^2}{t^2} = -\frac{1}{t} \frac{\partial^2 t}{\partial u^2} \quad \text{oder}$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial u^2} + k^2 t = 0$$

Dies integrirt giebt:

$$t = V \cos ku + V_1 \sin ku$$

wo V, V_1 Functionen von v sind. Machen wir nach §. 31. u, v zu geodätischen Polarcoordinaten, so muss für verschwindendes u

$$\lim \frac{t}{u} = 1$$

sein; dies giebt:

$$V = 0; \quad V_1 = \frac{1}{k}$$

und man hat:

$$e = 1; \quad f = 0; \quad g = t^2; \quad t = \frac{\sin ku}{k} \tag{17}$$

Für eine beliebige Curve s auf der Fläche hat man jetzt:

$$\partial s^2 = \partial u^2 + \left(\frac{\sin ku}{k} \partial v\right)^2 \tag{18}$$

Soll nun diese Curve Kürzeste sein, so ist, wie in §. 29. erklärt, die Bedingung:

$$0 = \int \delta \partial s = \frac{1}{k} \int \frac{\sin^2 ku \frac{\partial v}{\partial u}}{\sqrt{k^2 + \sin^2 ku \left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2}} \partial \delta v$$

Integrirt man teilweise, so wird δv Factor des integrirten Teils. Werden die Endpunkte des Bogens s als fest angenommen, so verschwindet jener Factor an beiden Integralgrenzen, und es bleibt:

$$0 = \int \delta v \, \partial \left(\frac{\sin^2 ku \frac{\partial v}{\partial u}}{\sqrt{k^2 + \sin^2 ku \left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2}} \right).$$

Soll dies bei jeder Variation stattfinden, so muss sein

$$\partial \left(\frac{\sin^2 ku \frac{\partial v}{\partial u}}{\sqrt{k^2 + \sin^2 ku \left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2}} \right) = 0$$

also, wenn c eine Constante bezeichnet,

$$\sin^2 ku \frac{\partial v}{\partial u} = \sin kc \sqrt{k^2 + \sin^2 ku \left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2}$$

woraus:

$$\partial v = \frac{k \sin kc \, \partial u}{\sin ku \sqrt{\sin^2 ku - \sin^2 kc}} \tag{19}$$

Setzt man

$$\cos ku = \cos kc \cos w \tag{20}$$

so wird der Ausdruck:

$$\partial v = \frac{\sin kc \, \partial w}{1 - \cos^2 kc \cos^2 w}$$

und giebt nach Integration:

$$\operatorname{tg} w = \sin kc \operatorname{tg}(v + \beta) \tag{21}$$

Eliminirt man w mittelst (20), so kommt:

$$\operatorname{tg} ku \cos(v + \beta) = \operatorname{tg} kc \tag{22}$$

Eliminirt man, um einen Bogen der Kürzesten zu berechnen, ∂v zwischen (18) und (19), so findet man:

$$\partial s = \frac{\sin ku \, \partial u}{\sqrt{\sin^2 ku - \sin^2 kc}} \tag{23}$$

und nach Integration:

$$\cos ku = \cos kc \cos k(s + b) \tag{24}$$

Dies verglichen mit (20) zeigt, dass

$$w = k(s + b)$$

daher ist nach (21)

$$\operatorname{tg} k(s + b) = \sin kc \operatorname{tg}(v + \beta) \tag{25}$$

und in Verbindung mit (24) (22)

$$\sin k(s+b) = \operatorname{tg} kc \cos ku \operatorname{tg}(v+\beta) \tag{26}$$

$$\sin k(s+b) = \sin ku \sin(v+\beta) \tag{27}$$

Untersucht man noch den Winkel ϑ zwischen 2 Kürzesten s, s', so ist nach I. Gl. (4)

$$\cos\vartheta = \frac{1+\left(\frac{\sin ku}{k}\right)^2 \frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u}}{\frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial s'}{\partial u}}$$

Geht die zweite Curve vom Punkte $u=0$ aus, so ist s' identisch mit dem geodätischen Radiusvector u, also

$$\frac{\partial v'}{\partial u} = 0; \qquad \frac{\partial s'}{\partial u} = 1$$

Dies giebt:

$$\cos\vartheta = 1 : \frac{\partial s}{\partial u}$$

also vermöge (23):

$$\sin\vartheta = \frac{\sin kc}{\sin ku} \tag{28}$$

Für $u=c$, d. i. nach Gl. (22) für $v=-\beta$, ist daher ϑ ein Rechter. Hieraus erhellt die Bedeutung der Constanten. Der Winkel $v=-\beta$ bestimmt die Richtung, der Bogen c die Länge der geodätischen Normale vom Punkte $u=0$ auf die Kürzeste s. Was b betrifft, so können wir festsetzen, dass s zugleich mit v verschwindet. Da nun nach (24) für $u=c$ die Grösse $s=-b$ wird, so bezeichnet b das Stück der Kürzesten von $v=-\beta$ bis $v=0$.

Jetzt bildet u die Hypotenuse, c und $s+b$ die Katheten eines geodätischen rechtwinkligen Dreiecks, in welchem $v+\beta$ der Gegenwinkel von $s+b$, und ϑ der von c ist. Die Relationen zwischen den ersten 4 Stücken sind:

$$\cos ku = \cos kc \cos k(s+b) \tag{29}$$

$$\sin ku \cos(v+\beta) = \sin kc \cos k(s+b) \tag{30}$$

$$\sin ku \sin(v+\beta) = \sin k(s+b) \tag{31}$$

Bezeichnet a den Wert von u für $v=0$, so bilden die 3 Kürzesten u, a, s ein beliebiges geodätisches Dreieck. Die Gleichungen gehen für $v=0$; $s=0$ über in

$$\left.\begin{aligned} \cos ka &= \cos kc \cos kb \\ \sin ka \cos\beta &= \sin kc \cos kb \\ \sin ka \sin\beta &= \sin kb \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Die Gegenwinkel der Seiten a und u sind ϑ und der Nebenwinkel dessen, in welchen ϑ für $v=0$ übergeht. Letzteren durch γ bezeichnet, hat man nach (28):

$$\left.\begin{array}{l}\sin\vartheta\sin ku = \sin kc \\ \sin\gamma\sin ka = \sin kc\end{array}\right\} \qquad (33)$$

Die Gl. (24) (27) (28) bleiben dieselben, wenn man $s+b$ mit c und $v+\beta$ mit ϑ vertauscht. Gl. (30) ist die Folge von (24) und (27), daher besteht sie auch nach jener Vertauschung, und man hat:

$$\sin ku\cos\vartheta = \cos kc\sin k(s+b) \quad \text{und für } v=0$$
$$-\sin ka\cos\gamma = \cos kc\sin kb$$

Eliminirt man die Stücke b, c, β, welche nicht zum Dreieck (usa) gehören, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\sin ku}{\sin\gamma} = \dfrac{\sin ks}{\sin v} \\[2ex] \cos ks = \dfrac{\cos v + \cos\gamma\cos\vartheta}{\sin\gamma\sin\vartheta} \\[2ex] \cos v = \dfrac{\cos ks - \cos ka\cos ku}{\sin ka\sin ku}\end{array}\right\} \qquad (34)$$

übereinstimmend mit den Relationen, welche an einem Dreieck auf der Kugel vom Radius $\frac{1}{k}$ stattfinden.

§. 39. **Problem der Darstellung der Flächen constanter Krümmung in Coordinaten.** Um die durch die Werte von e, f, g bestimmte Fläche constanter Krümmung in Coordinaten darzustellen, ist das System von Gleichungen

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = e = 1$$
$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = f = 0$$
$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = g = \left(\frac{\sin ku}{k}\right)^2$$

zu integriren. Erfüllt man sie durch die Werte

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\sin\vartheta\sin\mu\cos\lambda - \cos\vartheta\sin\lambda; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\sin ku}{k}\cos\mu\cos\lambda$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\sin\vartheta\sin\mu\sin\lambda + \cos\vartheta\cos\lambda; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\sin ku}{k}\cos\mu\sin\lambda$$
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \sin\vartheta\cos\mu; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\sin ku}{k}\sin\mu$$

und eleminirt durch particlle Differentiation x, y, z, so erhält man 3 Gleichungen, deren erste zwei sich leicht zu zwei einfacheren verbinden lassen, so dass sich ergiebt:

$$\cos\vartheta\left(\sin\mu\frac{\partial\vartheta}{\partial v}+\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)+\sin\vartheta\cos\mu\frac{\partial\mu}{\partial v}=-\cos ku\cos\mu+\frac{\sin ku}{k}\sin\mu\frac{\partial\mu}{\partial u}$$

$$\sin\vartheta\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v}+\sin\mu\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)=-\frac{\sin ku}{k}\cos\mu\frac{\partial\lambda}{\partial u} \tag{35}$$

$$\cos\vartheta\cos\mu\frac{\partial\vartheta}{\partial v}-\sin\vartheta\sin\mu\frac{\partial\mu}{\partial v}=\cos ku\sin\mu+\frac{\sin ku}{k}\cos\mu\frac{\partial\mu}{\partial u} \tag{36}$$

Auch von diesen verbinden sich wieder die erste und dritte zu folgenden zweien:

$$\cos\vartheta\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v}+\sin\mu\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)=\frac{\sin ku}{k}\frac{\partial\mu}{\partial u} \tag{37}$$

$$\cos\vartheta\cos\mu\frac{\partial\lambda}{\partial v}+\sin\vartheta\frac{\partial\mu}{\partial v}=-\cos ku$$

deren erstere mit Gl. (35) ergiebt:

$$\cos\vartheta\cos\mu\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\sin\vartheta\frac{\partial\mu}{\partial u}=0 \tag{38}$$

Die letzten 2 Gleichungen umfasst die folgende:

$$\cos\vartheta\cos\mu\,\partial\lambda+\sin\vartheta\,\partial\mu+\cos ku\,\partial v=0 \tag{39}$$

welche nur noch mit Gl. (36) zu verbinden ist, um sämmtliche Bestimmungen für λ, μ, ϑ zu enthalten.

Gl. (38) zeigt, dass, wenn eine der Grössen λ, μ unabhängig von u ist, die andre es auch sein muss. In diesem Falle geben die Gl. (35) (37) übereinstimmend:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial v}=-\sin\mu\frac{\partial\lambda}{\partial v};\quad\text{also}\quad\vartheta=u_1-v_1 \tag{40}$$

wo u_1 Function von u, und

$$v_1=\int\sin\mu\,\partial\lambda$$

Function von v ist. Gl. (36) wird alsdann:

$$\cos ku=\frac{1}{\sin\mu}\frac{\partial(\sin(u_1-v_1)\cos\mu)}{\partial v}$$

oder, wenn man

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial(\cos v_1\cos\mu)}{\partial v}&=-c\sin\gamma\sin\mu\\ \frac{\partial(\sin v_1\cos\mu)}{\partial v}&=-c\cos\gamma\sin\mu\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

setzt:

$$\cos ku = c\cos(u_1+\gamma) \tag{42}$$

Hieraus erhellt, dass c und γ, weil sie nicht von u abhangen, überhaupt constant sein müssen. Die Gl. (41) geben, entwickelt, die Werte:

$$\frac{\partial\mu}{\partial v} = c\sin(v_1+\gamma); \quad \frac{\partial v_1}{\partial v} = -c\cos(v_1+\gamma)\operatorname{tg}\mu$$

woraus durch Integration:

$$\begin{aligned} \cos\mu\cos(v_1+\gamma) &= \sin\alpha \\ \cos\mu\sin(v_1+\gamma) &= \cos\alpha\cos(cv+\beta) \\ \sin\mu &= \cos\alpha\sin(cv+\beta) \end{aligned}$$

Jetzt ist nach Gl. (40)

$$\partial\lambda = \frac{\partial v_1}{\sin\mu}$$

und man findet nach Integration mit Hülfe der Relation zwischen μ und v_1:

$$\begin{aligned} \cos(v_1+\gamma)\cos\mu &= \sin\alpha \\ \cos(v_1+\gamma)\sin\mu &= \cos\alpha\cos(\lambda+\varepsilon) \\ \sin(v_1+\gamma) &= \cos\alpha\sin(\lambda+\varepsilon) \end{aligned}$$

Hier sind α, β, ε die Constanten der 3 successiven Integrationen. Führt man nun die Werte der partiellen Differentialquotienten der Coordinaten mittelst der gefundenen Relationen auf u und v zurück, so ergiebt die Integration der Ausdrücke von ∂x, ∂y, ∂z ohne Schwierigkeit:

$$x = \frac{\sin ku}{ck}\{\sin\varepsilon\sin(cv+\beta)-\sin\alpha\cos\varepsilon\cos(cv+\beta)\}-u_2\cos\alpha\cos\varepsilon$$

$$y = \frac{\sin ku}{ck}\{\cos\varepsilon\sin(cv+\beta)+\sin\alpha\sin\varepsilon\cos(cv+\beta)\}+u_2\cos\alpha\sin\varepsilon$$

$$z = -\frac{\sin ku}{ck}\cos\alpha\cos(cv+\beta)+u_2\sin\alpha$$

wo zu Abkürzung

$$u_2 = \int\sin(u_1+\gamma)\partial u$$

gesetzt ist. Verbindet man die 3 Coordinatenwerte wie folgt

$$\begin{gathered} (-x\cos\varepsilon+y\sin\varepsilon)\sin\alpha-z\cos\alpha \\ x\sin\varepsilon+y\cos\varepsilon \\ (-x\cos\varepsilon+y\sin\varepsilon)\cos\alpha+z\sin\alpha \end{gathered}$$

so stellen diese 3 Grössen die Coordinaten desselben Punktes für

andre Lage der Axen dar. Bezeichnet man sie wieder mit x, y, z, so werden die Gleichungen der Fläche:

$$x = \frac{\sin ku}{ck}\cos(cv+\beta); \quad y = \frac{\sin ku}{ck}\sin(cv+\beta); \quad z = u_2 \tag{43}$$

das sind die der Fläche, welche die ebene Curve

$$x = \frac{\sin ku}{ck}; \quad y = 0; \quad z = u_2$$

bei Rotation um die z Axe beschreibt. Für den Fall $c = 1$ wird nach (42)

$$u_1 + \gamma = ku; \quad \text{also} \quad u_2 = -\frac{\cos ku}{k}$$

und die Werte (43) ergeben:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{k^2}$$

Die Fläche geht alsdann, wofern k^2 positiv ist, in eine Kugel vom Radius $\frac{1}{k}$ über. Da nun nach §. 17. alle Flächen, welche gleichwertige e, f, g haben, auf einander abwickelbar sind, so sind alle Flächen constanter positiver Krümmung auf einer Kugel abwickelbar. Doch bemerkt man leicht, dass nicht die ganze geschlossene Fläche die ganze Kugel bedecken kann, sondern entweder, für $c > 1$, nur einen Teil derselben, oder, für $c < 1$, die Kugel zum Teil mehrfach bedeckt.

§. 40. **Kleinste Flächen. Bedingung.** Es ist die Aufgabe, unter allen Flächen, welche von derselben geschlossenen Linie begrenzt werden, die kleinste zu finden. Diese kleinste Fläche hat dann der Bedingung zu genügen, dass sie bei jeder unendlich kleinen Verschiebung ihrer innern (nicht zum Umfang gehörigen) Punkte wächst, dass also ihre Variation nie negativ ist. Dann kann aber die Variation auch nie positiv sein, weil sie sonst bei rückgängiger Verschiebung negativ wäre. Folglich ist die Variation der Fläche

$$\delta\Omega = \delta\int\int t\,\partial u\,\partial v = \int\int \delta t\,\partial u\,\partial v = 0 \tag{44}$$

Berechnet man δt aus I. Gl. (10) (3), so findet man:

$$\delta t = \frac{g\delta e - 2f\delta f + e\delta g}{t}$$

$$= L\delta\frac{\partial x}{\partial u} + L_1\delta\frac{\partial x}{\partial v} + M\delta\frac{\partial y}{\partial u} + M_1\delta\frac{\partial y}{\partial v} + N\delta\frac{\partial z}{\partial u} + N_1\delta\frac{\partial z}{\partial v}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{1}{t}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & f \\ \frac{\partial x}{\partial v} & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} & q \\ \frac{\partial z}{\partial v} & r \end{vmatrix} \\ L_1 &= \frac{1}{t}\begin{vmatrix} e & \frac{\partial x}{\partial u} \\ f & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q & \frac{\partial y}{\partial u} \\ r & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

und die übrigen Coefficienten analog bestimmt sind, oder:

$$\delta t = \frac{\partial}{\partial u}(L\,\delta x + M\delta y + N\delta z) + \frac{\partial}{\partial v}(L_1\,\delta x + M_1\,\delta y + N_1\,\delta z)$$
$$- \left(\frac{\partial L}{\partial u} + \frac{\partial L_1}{\partial v}\right)\delta x - \left(\frac{\partial M}{\partial u} + \frac{\partial M_1}{\partial v}\right)\delta y - \left(\frac{\partial N}{\partial u} + \frac{\partial N_1}{\partial v}\right)\delta z$$

Führt man diesen Wert in (44) ein und integrirt den ersten Term zuerst nach u in der Ausdehnung, in welcher die Parameterlinie (u) innerhalb des Flächenstücks Ω liegt, so werden die Grenzen entweder die Durchschnitte mit dem Umfang, in welchem δx, δy, δz null sind, oder, falls die Parameterlinie in sich selbst zurückläuft, ein und derselbe Punkt dieser Linie, also $L\delta x + M\delta y + N\delta z$ für beide Integralgrenzen dieselbe Grösse. In beiden Fällen verschwindet der Ausdruck schon nach erster Integration. Dasselbe gilt vom zweiten Term, wenn man ihn zuerst nach v integrirt. In den übrigen Termen sind die Factoren δx, δy, δz für alle Flächenelemente unabhängig willkürlich. Daher kann das Integral nur null sein, wenn es die Coefficienten der Variationen sind, und man erhält:

$$\frac{\partial L}{\partial u} + \frac{\partial L_1}{\partial v} = 0; \quad \frac{\partial M}{\partial u} + \frac{\partial M_1}{\partial v} = 0; \quad \frac{\partial N}{\partial u} + \frac{\partial N_1}{\partial v} = 0 \tag{46}$$

Setzt man für L, L_1 die obigen Werte und führt die Differentiation mit Anwendung der Formeln I. Gl. (19) aus, so kommt:

$$\frac{\partial L}{\partial u} + \frac{\partial L_1}{\partial v} = -(H + J_1)pt = \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)pt \tag{47}$$

und die 3 Gl. (46) reduciren sich auf die eine:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = 0 \tag{48}$$

Es hat sich ergeben:

S. 20. **Auf jeder kleinsten Fläche ist durchgängig die Summe der Hauptkrümmungen null.**

Durch diese Eigenschaft wird eine besondere Art von Flächen definirt, welche, wenn nicht ausschliesslich, jedenfalls alle kleinsten Flächen in sich begreift. Da offenbar jeder Teil einer kleinsten Fläche selbst kleinste Fläche in seinem Umfang ist, so ist der Begriff von der Begrenzung unabhängig.

§. 41. **Darstellung der kleinsten Flächen.** Löst man die Gleichungen I. (19) nach $\frac{\partial x}{\partial u}$. $\frac{\partial x}{\partial v}$ auf, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = P\frac{\partial p}{\partial u} + Q\frac{\partial p}{\partial v}; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = R\frac{\partial p}{\partial u} + S\frac{\partial p}{\partial v}$$

wo

$$P = -KJ_1; \quad Q = KH_1; \quad R = KJ; \quad S = -KH \tag{49}$$

$$\frac{1}{K} = -\begin{vmatrix} HH_1 \\ JJ_1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$$

gesetzt ist, Formeln die gleicherweise für die y und z gelten. Setzt man

$$p = \sin u \cos v; \quad q = \sin u \sin v; \quad r = \cos u \tag{50}$$

und wendet auf die so definirten Parameter u, v die obigen Formeln an, so lauten diese:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} &= P\cos u \cos v - Q \sin u \sin v \\
\frac{\partial x}{\partial v} &= R\cos u \cos v - S \sin u \sin v \\
\frac{\partial y}{\partial u} &= P\cos u \sin v + Q \sin u \cos v \\
\frac{\partial y}{\partial v} &= R\cos u \sin v + Q \sin u \cos v \\
\frac{\partial z}{\partial u} &= -P\sin u \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= -R\sin u
\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Eliminirt man durch Differentiation x, y, z, so findet man:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial R}{\partial u}\right)\cos u + (R - Q)\sin u &= 0 \\
\left(\frac{\partial Q}{\partial v} - \frac{\partial S}{\partial u}\right)\sin u + (P - S)\cos u &= 0 \\
\left(\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial R}{\partial u}\right)\sin u - R\cos u &= 0
\end{aligned} \tag{52}$$

Die erste und dritte Gleichung lassen sich verbinden zu

$$\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial R}{\partial u} = Q \sin u \cos u$$

$$R = Q \sin^2 u$$

und nach Elimination von R zu

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial u} \sin^2 u + 3Q \sin u \cos u$$

Dies lässt sich auch schreiben:

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{1}{\sin u} \frac{\partial (Q \sin^3 u)}{\partial u}$$

oder, wenn man

$$\frac{\partial u}{\sin u} = \partial w \tag{53}$$

das ist

$$\frac{1}{\sin u} = \cos iw; \quad \cot u = i \sin iw \tag{54}$$

setzt:

$$\frac{\partial (P \sin^2 u)}{\partial v} = \frac{\partial (Q \sin^3 u)}{\partial w}$$

eine Gleichung die allgemein befriedigt wird durch

$$P \sin^2 u = \frac{\partial T}{\partial w}; \quad Q \sin^3 u = \frac{\partial T}{\partial v}. \tag{55}$$

Jetzt bleibt noch Gl. (52) zu erfüllen, die wir mit $\sin^2 u$ multipliciren und folgendermassen schreiben:

$$\frac{\partial (Q \sin^3 u)}{\partial v} - \frac{\partial (S \sin^2 u)}{\partial w} + (P + S) \sin^2 u \cos u = 0$$

Hier ist nach (49)

$$P + S = -(H + J_1) K = \varrho_1 + \varrho_2$$

das ist auf kleinsten Flächen null; daher geht hier die vorige Gleichung über in

$$\frac{\partial (Q \sin^3 u)}{\partial v} + \frac{\partial (P \sin^2 u)}{\partial w} = 0$$

und nach Einführung der Werte (55) in

$$\frac{\partial^2 T}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial w^2} = 0$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$T = \varphi(v+iw, i) + \varphi(v-iw, -i)$$

woraus nach (55):

$$P\sin^2 u = i\varphi'(v+iw, i) - i\varphi'(v-iw, -i)$$
$$Q\sin^3 u = R\sin u = \varphi'(v+iw, i) + \varphi'(v-iw, -i)$$

Dies in die Gl. (51) eingeführt giebt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial v} &= \sin(v+iw)\varphi'(v+iw, i) + \text{conj.} \\
\frac{\partial x}{\partial w} &= -\sin(v+iw)\varphi'(v+iw, i) + \text{conj.} \\
\frac{\partial y}{\partial v} &= -i\cos(v+iw)\varphi'(v+iw, i) + \text{conj.} \\
\frac{\partial y}{\partial w} &= \cos(v+iw)\varphi'(v+iw, i) + \text{conj.} \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= -\varphi'(v+iw, i) + \text{conj.} \\
\frac{\partial z}{\partial w} &= -i\varphi'(v+iw, i) + \text{conj.}
\end{aligned}\right\} \quad (56)$$

und nach Integration:

$$\left.\begin{aligned}
x &= \chi(v+iw, i) + \chi(v-iw, -i) \\
y &= \psi(v+iw, i) + \psi(v-iw, -i) \\
z &= -\varphi(v+iw, i) - \varphi(v-iw, -i)
\end{aligned}\right\} \quad (57)$$

wo zwischen den Functionen φ, χ, ψ die Relationen bestehen:

$$\chi'(V, i) = i\varphi'(V, i)\sin V; \quad \psi'(V, i) = -i\varphi'(V, i)\cos V$$

so dass nur eine der drei willkürlich bleibt.

Betrachtet man w, v als Parameter der Fläche, so werden, wie sich direct aus den Werten (56) ergiebt, die Fundamentalgrössen 1. Ordnung:

$$e = g = -t = 4\varphi'(v+iw, i)\varphi'(v-iw, -i)\cos^2 iw \quad (58)$$
$$f = 0$$

Dass t ein negatives Vorzeichen erhält, ergiebt sich, wenn man die Werte von pt, qt, rt ihrer Definition gemäss bildet und mit (50) vergleicht. Da ferner nach (50) (54)

$$p = \frac{\cos v}{\cos iw}; \quad q = \frac{\sin v}{\cos iw}; \quad r = i\,\text{tg}\, iw \quad (59)$$

ist, so findet man nach Differentiation der Gl. (56) die Fundamentalgrössen 2. Ordnung gemäss ihrer Definition §. 5.

$$\left.\begin{array}{r} -E = G = i\varphi'(v+iw, i) - i\varphi'(v-iw, -i) \\ F = -\varphi'(v+iw, i) - \varphi'(v-iw, -i) \end{array}\right\} \quad (60)$$

woraus:

$$F^2 - EG = 4\varphi'(v+iw, i)\,\varphi'(v-iw, -i)$$

und in Verbindung mit (58):

$$\left.\begin{array}{r} -\varrho_1\varrho_2 = \dfrac{t^2}{F^2-EG} = \dfrac{1}{JH_1 - HJ_1} = K = \\ 4\varphi'(v+iw, i)\,\varphi'(v-iw, -i)\cos^4 iw \end{array}\right\} \quad (61)$$

Die beiden Hauptkrümmungsradien sind die positive und die negative Quadratwurzel aus dieser Grösse.

§. 42. **Krümmungslinien auf kleinster Fläche.** Nach (49) hat man (in Parametern u, v):

$$H = -J_1 = \frac{P}{K} = -\frac{i}{4\cos^2 iw}\left\{\frac{1}{\varphi'(v+iw, i)} - \frac{1}{\varphi'(v-iw, -i)}\right\}$$

$$H_1 = \frac{Q}{K} = \frac{1}{4\cos iw}\left\{\frac{1}{\varphi'(v+iw, i)} + \frac{1}{\varphi'(v-iw, -i)}\right\}$$

$$J = \frac{R}{K} = \frac{1}{4\cos^3 iw}\left\{\frac{1}{\varphi'(v+iw, i)} + \frac{1}{\varphi'(v-iw, -i)}\right\}$$

Daher lautet die Gleichung, welche die Hauptkrümmungsrichtungen bestimmt, I. (54):

$$(k^2 - \cos^2 iw)\left\{\frac{1}{\varphi'(v+iw, i)} + \frac{1}{\varphi'(v-iw, -i)}\right\}$$
$$-2ik\cos iw\left\{\frac{1}{\varphi'(v+iw, i)} - \frac{1}{\varphi'(v-iw, -i)}\right\}$$

oder:

$$\frac{(k - i\cos iw)^2}{\varphi'(v+iw, i)} + \frac{(k + i\cos iw)^2}{\varphi'(v-iw, -i)} = 0$$

Hier ist

$$k = \frac{\partial v}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial w}\cos iw$$

Dies eingeführt giebt:

$$\varphi'(v+iw, i)(\partial v + i\partial w)^2 + \varphi'(v-iw, -i)(\partial v - i\partial w)^2 = 0$$

Setzt man

$$\varphi'(V,i) = i\{\Phi'(V,i)\}^2 \tag{62}$$

so zerfällt die Gleichung in

$$\Phi'(v+iw,i)\partial(v+iw) \pm \Phi'(v-iw,-i)\partial(v-iw) = 0$$

Die Integration ergiebt als Gleichungen der beiden Krümmungslinien:

$$\left.\begin{aligned}\Phi(v+iw,i)+\Phi(v-iw,-i) &= u_1 = \text{const.}\\ \Phi(v+iw,i)-\Phi(v-iw,-i) &= iv_1 = \text{const.}\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

und u_1, v_1 sind die Parameter des Systems der Krümmungslinien. Hieraus berechnet man leicht nach II. Gl. (2) die Fundamentalgrössen 2. Ordnung E, G, für die Parameter u_1, v_1, und findet:

$$E_1 = -1; \quad G_1 = 1$$

woraus weiter nach II. Gl. (15):

$$e_1 = -\varrho_1; \quad g_1 = \varrho_2$$

§. 43. **Asymptotische Linien auf kleinster Fläche.** Sind u_2, v_2 die Parameter der asymptotischen Linien, so lauten die zu ihrer Bestimmung dienenden Relationen II. Gl. (2):

$$-1 = F_2 \frac{\partial u_2}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}; \quad 1 = F_2 \frac{\partial u_2}{\partial v_1}\frac{\partial v_2}{\partial v_1}$$

$$0 = \frac{\partial u_2}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial v_1} + \frac{\partial u_2}{\partial v_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}$$

Zerlegt man die letzte in

$$\frac{\partial v_2}{\partial u_1} = -\frac{m^2}{F_2}\frac{\partial u_2}{\partial u_1}; \quad \frac{\partial v_2}{\partial v_1} = \frac{m^2}{F_2}\frac{\partial u_2}{\partial v_1}$$

so gehen die beiden ersten über in

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial u_1}\right)^2 = m^{-2}; \quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial v_1}\right)^2 = m^{-2}$$

Nimmt man die Quadratwurzeln positiv, so wird

$$\partial u_2 = \frac{\partial u_1 + \partial v_1}{m}; \quad \partial v_2 = -\frac{m}{F_2}(\partial u_1 - \partial v_1)$$

folglich ist u_2 Function von u_1+v_1, und v_2 Function von u_1-v_1. Eine andere Vorzeichenbestimmung würde bloss Vertauschung von u_2 und v_2 bewirken. Da die willkürlichen Functionen ohne Einfluss auf die Parameterlinien sind, so setzen wir einfach:

$$\left.\begin{aligned}u_2 = u_1+v_1 &= (1-i)\Phi(v+iw,i)+(1+i)\Phi(v-iw,-i)\\ v_2 = u_1-v_1 &= (1+i)\Phi(v+iw,i)+(1-i)\Phi(v-iw,-i)\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

ist, so findet man nach Differentiation der Gl. (56) die Fundamentalgrössen 2. Ordnung gemäss ihrer Definition §. 5.

$$\left.\begin{aligned} -E = G &= i\varphi'(v+iw,i) - i\varphi'(v-iw,-i) \\ F &= -\varphi'(v+iw,i) - \varphi'(v-iw,-i) \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

woraus:

$$F^2 - EG = 4\varphi'(v+iw,i)\,\varphi'(v-iw,-i)$$

und in Verbindung mit (58):

$$\left.\begin{aligned} -\varrho_1\varrho_2 = \frac{t^2}{F^2-EG} = \frac{1}{JH_1-HJ_1} = K = \\ 4\varphi'(v+iw,i)\,\varphi'(v-iw,-i)\cos^4 iw \end{aligned}\right\} \quad (61)$$

Die beiden Hauptkrümmungsradien sind die positive und die negative Quadratwurzel aus dieser Grösse.

§. 42. **Krümmungslinien auf kleinster Fläche.** Nach (49) hat man (in Parametern u, v):

$$H = -J_1 = \frac{P}{K} = -\frac{i}{4\cos^2 iw}\left\{\frac{1}{\varphi'(v+iw,i)} - \frac{1}{\varphi'(v-iw,-i)}\right\}$$

$$H_1 = \frac{Q}{K} = \frac{1}{4\cos iw}\left\{\frac{1}{\varphi'(v+iw,i)} + \frac{1}{\varphi'(v-iw,-i)}\right\}$$

$$J = \frac{R}{K} = \frac{1}{4\cos^3 iw}\left\{\frac{1}{\varphi'(v+iw,i)} + \frac{1}{\varphi'(v-iw,-i)}\right\}$$

Daher lautet die Gleichung, welche die Hauptkrümmungsrichtungen bestimmt, I. (54):

$$(k^2 - \cos^2 iw)\left\{\frac{1}{\varphi'(v+iw,i)} + \frac{1}{\varphi'(v-iw,-i)}\right\}$$
$$-2ik\cos iw\left\{\frac{1}{\varphi'(v+iw,i)} - \frac{1}{\varphi'(v-iw,-i)}\right\}$$

oder:

$$\frac{(k-i\cos iw)^2}{\varphi'(v+iw,i)} + \frac{(k+i\cos iw)^2}{\varphi'(v-iw,-i)} = 0$$

Hier ist

$$k = \frac{\partial v}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial w}\cos iw$$

Dies eingeführt giebt:

$$\varphi'(v+iw,i)(\partial v + i\partial w)^2 + \varphi'(v-iw,-i)(\partial v - i\partial w)^2 = 0$$

Setzt man

$$\varphi'(V,i) = i\{\Phi'(V,i)\}^2 \tag{62}$$

so zerfällt die Gleichung in

$$\Phi'(v+iw,i)\,\partial(v+iw) \pm \Phi'(v-iw,-i)\,\partial(v-iw) = 0$$

Die Integration ergiebt als Gleichungen der beiden Krümmungslinien:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(v+iw,i)+\Phi(v-iw,-i) = u_1 = \text{const.} \\ \Phi(v+iw,i)-\Phi(v-iw,-i) = iv_1 = \text{const.} \end{array}\right\} \tag{63}$$

und u_1, v_1 sind die Parameter des Systems der Krümmungslinien. Hieraus berechnet man leicht nach II. Gl. (2) die Fundamentalgrössen 2. Ordnung E, G, für die Parameter u_1, v_1, und findet:

$$E_1 = -1; \quad G_1 = 1$$

woraus weiter nach II. Gl. (15):

$$e_1 = -\varrho_1; \quad g_1 = \varrho_2$$

§. 43. **Asymptotische Linien auf kleinster Fläche.** Sind u_2, v_2 die Parameter der asymptotischen Linien, so lauten die zu ihrer Bestimmung dienenden Relationen II. Gl. (2):

$$-1 = F_2 \frac{\partial u_2}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}; \quad 1 = F_2 \frac{\partial u_2}{\partial v_1}\frac{\partial v_2}{\partial v_1}$$

$$0 = \frac{\partial u_2}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial v_1} + \frac{\partial u_2}{\partial v_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}$$

Zerlegt man die letzte in

$$\frac{\partial v_2}{\partial u_1} = -\frac{m^2}{F_2}\frac{\partial u_2}{\partial u_1}; \quad \frac{\partial v_2}{\partial v_1} = \frac{m^2}{F_2}\frac{\partial u_2}{\partial v_1}$$

so gehen die beiden ersten über in

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial u_1}\right)^2 = m^{-2}; \quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial v_1}\right)^2 = m^{-2}$$

Nimmt man die Quadratwurzeln positiv, so wird

$$\partial u_2 = \frac{\partial u_1 + \partial v_1}{m}; \quad \partial v_2 = -\frac{m}{F_2}(\partial u_1 - \partial v_1)$$

folglich ist u_2 Function von u_1+v_1, und v_2 Function von u_1-v_1. Eine andere Vorzeichenbestimmung würde bloss Vertauschung von u_2 und v_2 bewirken. Da die willkürlichen Functionen ohne Einfluss auf die Parameterlinien sind, so setzen wir einfach:

$$\left.\begin{array}{l} u_2 = u_1 + v_1 = (1-i)\Phi(v+iw,i)+(1+i)\Phi(v-iw,-i) \\ v_2 = u_1 - v_1 = (1+i)\Phi(v+iw,i)+(1-i)\Phi(v-iw,-i) \end{array}\right\} \tag{64}$$

Gleichzeitig ergiebt sich:

$$F_2 = -1$$

Die Relationen II. Gl. (1) werden nach Einsetzung bekannter Werte:

$$\begin{aligned} -\varrho_1 &= e_2 + 2f_2 + g_2 \\ 0 &= e_2 \qquad - g_2 \\ \varrho_2 &= e_2 - 2f_2 + g_2 \end{aligned}$$

woraus:

$$e_2 = g_2 = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{4} = \tfrac{1}{2}\varrho_2; \quad f_2 = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{4} = 0$$

$$\partial s^2 = \tfrac{1}{2}\varrho_2(\partial u_2^2 + \partial v_2^2) \tag{65}$$

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{2}{\varrho_2}\frac{\partial u_2 \partial v_2}{\partial u_2^2 + \partial v_2^2}$$

Gl. (65) zeigt, dass u_2, v_2 zugleich Abbildungsparameter sind. Hierzu genügt indes nicht, dass sie asymptotische Parameter bezeichnen; vielmehr müssen noch 2 Gleichungen, etwa $e_2 = g_2 = \frac{1}{2}\varrho_2$, hinzukommen, welche die willkürlichen Functionen bestimmen.

§. 44. **Flächen von constanter Summe der Hauptkrümmungsradien.** Die Darstellung der kleinsten Flächen lässt sich zur Lösung der folgenden weiteren Aufgabe verwenden. Sind nämlich ϱ_1, ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien der vom Punkte (xyz) erzeugten Fläche, so sind nach §. 19. $\varrho_1 + c$, $\varrho_2 + c$ die Hauptkrümmungsradien der parallelen Fläche im Abstande c, welche der Punkt

$$x' = x - pc; \quad y' = y - qc; \quad z' = z - rc \tag{66}$$

erzeugt. Ist dann erstere Fläche eine kleinste, also

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 0$$

so ist die Summe der Hauptkrümmungsradien der letztern $= 2c$. Hiermit findet die Aufgabe:

Die Fläche allgemein darzustellen, deren Hauptkrümmungsradien die constante Summe $2c$ haben,

ohne weitere Untersuchung ihre Lösung. Die Gl. (66) stellen die verlangte Fläche dar, wenn man darin für x, y, z die Werte (57), für p, q, r die Werte (59) setzt; sie lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \chi(v + iw, i) + \chi(v - iw, -i) - \frac{c \cos v}{\cos iw} \\ y' &= \psi(v + iw, i) + \psi(v - iw, -i) - \frac{c \sin v}{\cos iw} \\ z' &= -\varphi(v + iw, i) - \varphi(v - iw, -i) - ic\,\mathrm{tg}\, iw \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

§. 45. **Kleinste Fläche bei constantem Volum.** Von der Oberfläche eines Körpers sei ein begrenzter Teil Ω variabel, der übrige Teil Ω_1 unveränderlich. Die Veränderungen von Ω seien jedoch der Bedingung unterworfen, dass das Volum des Körpers P constant bleibt. Der Flächeninhalt

$$\Omega = \iint t\,\partial u\,\partial v$$

soll als Minimum bestimmt werden.

Die Bedingung des Minimums ist hier noch, wie in §. 40.

$$\iint\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial u}+\frac{\partial L_1}{\partial v}\right)\delta x+\left(\frac{\partial M}{\partial u}+\frac{\partial M_1}{\partial v}\right)\delta y+\left(\frac{\partial N}{\partial u}+\frac{\partial N_1}{\partial v}\right)\delta z\right\}\partial u\,\partial v=0$$

das ist nach Gl. (47) und den analogen:

$$\iint\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)(p\delta x+q\delta y+r\delta z)\,t\,\partial u\,\partial v=0 \qquad (68)$$

Es tritt nur die Bedingung hinzu, dass δx, δy, δz einem constanten P entsprechen. Alle unter dieser Beschränkung gestatteten Werte können die Gl. (68) erfüllen, ohne dass jedes Element des Integrals null wird.

Nehmen wir nun an, dass jeder Punkt der Fläche in der Richtung der Normale verschoben wird, wobei noch alle Veränderungen der Fläche möglich bleiben, und lassen die Parameterlinien (w) alle Flächen $w=$ const. normal schneiden, dann ist die Verschiebung des Punktes (uvw)

$$=\frac{\delta x}{p}=\frac{\delta y}{q}=\frac{\delta z}{r}=p\delta x+q\delta y+r\delta z \qquad (69)$$

Erzeugt jener Punkt die Fläche Ω, so erzeugt gleichzeitig diese Verschiebungslinie den Raum zwischen ihr und der veränderten Fläche, d. i. die Variation des Volums δP. Ein Element dieses Raumes ist ein Prisma, dessen Grundfläche das Flächenelement $t\,\partial u\,\partial v$, und dessen Höhe die Verschiebung (69) ist; folglich ist die Variation des Volums

$$\delta P=\iint(p\delta x+q\delta y+r\delta z)\,t\,\partial u\,\partial v$$

und diese muss der Bedingung gemäss constant null sein. Setzt man zur Abkürzung

$$\Delta=(p\delta x+q\delta y+r\delta z)\,t\,\partial u\,\partial v$$

so lauten die 2 Bedingungen:

$$\iint\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)\Delta=0;\quad \iint\Delta=0 \qquad (70)$$

Beide können noch erfüllt werden, wenn nur 2 beliebige Flächen-

elemente variiren, die ganze übrige Fläche hingegen unverändert bleibt. Bezeichnen wir die jenen 2 Elementen entsprechenden Werte durch $\varDelta$, ϱ_1, ϱ_2 und $\varDelta'$, ϱ_1', ϱ_2', so gehen die Gl. (70) über in

$$\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)\varDelta+\left(\frac{1}{\varrho_1'}+\frac{1}{\varrho_2'}\right)\varDelta'=0; \quad \varDelta+\varDelta'=0$$

woraus:

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=\frac{1}{\varrho_1'}+\frac{1}{\varrho_2'}$$

das heisst: die Summe der Hauptkrümmungen hat in je 2 beliebigen Punkten der Fläche denselben Wert, ist also über die ganze Fläche constant, und man hat den Satz:

S. 21. Auf kleinster Fläche für constantes Volum ist die Summe der Hauptkrümmungen constant.

Die Bedeutung dieser Constanten, die wir mit a bezeichnen, können wir leicht aus der vorhergehenden Rechnung entnehmen, nach welcher für eine beliebige Fläche, und beliebige, nur immer normale, Verschiebungen

$$\delta\Omega=\iint\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)\varDelta; \quad \delta P=\iint\varDelta$$

ist. Ist dann Ω eine kleinste Fläche für constantes Volum, so hat man:

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}=a$$

also

$$\delta\Omega=a\,\delta P$$

für beliebige Verrückung. Jetzt sei die veränderte Fläche kleinste für das constante Volum $P+\partial P$, dann wird

$$a=\frac{\partial\Omega}{\partial P}$$

Betrachtet man das gegebene Volum als unabhängige Variabele, die ihm entsprechende kleinste Fläche als Function derselben, so ist die Summe der Hauptkrümmungen die derivirte Function.

§. 46. **Rotationsflächen.** Eine Rotationsfläche wird von einer ebenen Linie erzeugt, welche um eine Gerade in derselben rotirt. Die Gerade heisst die Rotationsaxe, die erzeugende Linie der Meridian, der von einem ihrer Punkte erzeugte Kreis ein Parallelkreis. Ein Durchschnittspunkt der Fläche und ihrer Axe heisst ein Scheitel oder eine Spitze, jenachdem die Axe daselbst Normale ist oder nicht.

Wir nehmen die Rotationsaxe zur Axe der z, den Meridianbogen zum Parameter u, den Rotationswinkel zum Parameter v, und bezeichnen vorläufig die ebenen cartesischen Coordinaten des Meridians durch x_0, z; dann sind die Gleichungen der Rotationsfläche:

$$x = x_0 \cos v; \quad y = x_0 \sin v; \quad z = z$$

wo x_0, z Functionen von u sind. Hieraus folgen die Werte der Fundamentalgrössen 1. Ordnung:

$$e = 1; \quad f = 0; \quad g = x_0^2; \quad t = x_0$$

Wir schreiben demgemäss die Flächengleichungen:

$$x = t\cos v; \quad y = t\sin v \tag{71}$$

Die Werte von e, f zeigen, dass die Parameter orthogonal geodätisch sind. Bezeichnet ferner τ den Krümmungswinkel des Meridians, so dass

$$\frac{\partial t}{\partial u} = \cos\tau; \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \sin\tau$$

wird, so hat man:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \cos\tau\cos v; & \dfrac{\partial y}{\partial u} = \cos\tau\sin v; & \dfrac{\partial z}{\partial u} = \sin\tau \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = -t\sin v; & \dfrac{\partial y}{\partial v} = t\cos v; & \dfrac{\partial z}{\partial v} = 0 \end{array}\right\} \tag{72}$$

woraus:

$$p = -\sin\tau\cos v; \quad q = -\sin\tau\sin v; \quad r = \cos\tau \tag{73}$$

In einem Scheitel wird $\tau = 0$, also

$$p = 0; \quad q = 0; \quad r = 1$$

in einer Spitze $\tau = \text{const.}$ bleiben p, q abhängig von v; statt einer Normale hat hier die Fläche eine normale konische Fläche. Die Fundamentalgrössen 2. Ordnung werden:

$$E = \frac{\partial\tau}{\partial u}; \quad F = 0; \quad G = t\sin\tau \tag{74}$$

Demnach sind die Parameterlinien (u), (v), d. i. die Meridiane und Parallelkreise, auch Krümmungslinien. Infolge dessen hat man:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{E}{e} = \frac{\partial\tau}{\partial u}; \quad \frac{1}{\varrho_2} = \frac{G}{g} = \frac{\sin\tau}{t} \tag{75}$$

Die Gleichungen der Mittelpunktsflächen werden:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + \varrho_1 p = \left(t - \frac{\partial u}{\partial \tau}\sin\tau\right)\cos v \\ y_1 &= y + \varrho_1 q = \left(t - \frac{\partial u}{\partial \tau}\sin\tau\right)\sin v \\ z_1 &= z + \varrho_1 r = z + \frac{\partial u}{\partial \tau}\cos\tau \end{aligned}\right\} \quad (76)$$

und

$$x_2 = x + \varrho_2 p = 0; \quad y_2 = y + \varrho_2 q = 0; \quad z_2 = z + \varrho_2 r = z + t\cot\tau$$

Die erstere ist also eine Rotationsfläche von gemeinsamer Axe, die letztere degenerirt in die Axe selbst. Die Beziehung zwischen conjugirten Tangenten wird:

$$kk' = -\frac{1}{t\sin\tau}\frac{\partial\tau}{\partial u}$$

Die Nullkrümmungstangenten sind bestimmt durch

$$\frac{\partial v}{\partial u} = \pm\sqrt{-\frac{1}{t\sin\tau}\frac{\partial\tau}{\partial u}} \quad (77)$$

der Drehungswinkel ν der Normale durch

$$\partial\nu^2 = \partial\tau^2 + \sin^2\tau\,\partial v^2 \quad (78)$$

Der Drehpunktsabstand wird:

$$R = \frac{\partial\tau\,\partial u + t\sin\tau\,\partial v^2}{\partial\nu^2} \quad (79)$$

die Gleitung längs der momentanen Rotationsaxe:

$$\partial Q = \frac{\sin\tau\,\partial u - t\,\partial\tau}{\partial\nu}\,\partial v \quad (80)$$

die Bedingung eines Nabelpunkts:

$$\frac{\partial\tau}{\partial u} = \frac{\sin\tau}{t} \quad (81)$$

Sie wird, da sie v nicht enthält, im allgemeinen durch einen Parallelkreis, nur für $t = 0$; $\tau = 0$ durch einen Punkt erfüllt. Eliminirt man t durch Differentiation, so erhält man als Gleichung der Nabellinie:

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial u^2} = 0$$

Aus gleichem Grunde zerfällt der Ausdruck eines Flächenstücks zwischen Meridianen und Parallelkreisen in 2 unabhängige Factoren:

$$\Omega = v\int t\,\partial u \quad (81)$$

Um ein Körperstück, ganz oder zum Teil begrenzt von einer Rotationsfläche, zu berechnen, kann man dasselbe von einer variabeln Rotationsfläche erzeugen lassen. Man hat dann bloss t, z, τ als Functionen von u und einem dritten Parameter w zu betrachten. Der Ausdruck des Körperelements I. Gl. (15) geht dann nach Einführung der Werte (72) über in

$$\partial^3 P = t\left(\frac{\partial z}{\partial w}\cos\tau - \frac{\partial t}{\partial w}\sin\tau\right)\partial u\,\partial v\,\partial w$$

$$= t\begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}\partial u\,\partial v\,\partial w = t\,\partial v\,\partial^2 Q$$

wo $\partial^2 Q$ das Element des erzeugenden ebenen Flächenstücks darstellt. Ist das Körperstück von Meridian- und Parallelkreisebenen begrenzt, so zerfällt das Integral in 2 unabhängige Factoren:

$$P = v\iint t\,\partial^2 Q \tag{82}$$

In (81) und (82) ist v der Winkel zwischen den 2 begrenzenden Meridianebenen.

§. 47. **Asymptotische Linien auf Rotationsflächen.** Die Differentialgleichungen der asymptotischen Linien (77) geben integrirt:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= v - \int\sqrt{-\frac{\partial u\,\partial\tau}{t\sin\tau}} \\ v_1 &= v + \int\sqrt{-\frac{\partial u\,\partial\tau}{t\sin\tau}} \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

und u_1, v_1 sind die Parameter des Systems. Diesen entsprechen, wie man am leichtesten aus II. Gl. (1) (2) findet, die Fundamentalgrössen:

$$e_1 = g_1 = \frac{t}{4}\left(t - \sin\tau\frac{\partial u}{\partial\tau}\right) \tag{84}$$

$$f_1 = \frac{t}{4}\left(t + \sin\tau\frac{\partial u}{\partial\tau}\right); \quad t_1 = \frac{t}{4}\sqrt{-t\sin\tau\frac{\partial u}{\partial\tau}}$$

$$F_1 = \tfrac{1}{2}t\sin\tau$$

§. 48. **Orthogonal geodätische Systeme auf Rotationsflächen.** Sind u_1, v_1 die Parameter eines beliebigen orthogonal geodätischen Systems, u, v die bisherigen, so sind nach II. Gl. (1) die Relationen zwischen beiden:

$$1 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 + t_1^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2$$

$$0 = \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} + t_1^2 \frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}$$

$$t^2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 + t_1^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2$$

Erfüllt man sie durch die Werte

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u_1}{\partial u} = \cos\varkappa; & \dfrac{\partial u_1}{\partial v} = t\sin\varkappa \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{t_1}\sin\varkappa; & \dfrac{\partial v_1}{\partial v} = \dfrac{t}{t_1}\cos\varkappa \end{array}\right\} \tag{85}$$

und eliminirt u_1, so kommt:

$$\frac{\partial\varkappa}{\partial u} t\cot\varkappa + \frac{\partial\varkappa}{\partial v} + \frac{\partial t}{\partial u} = 0$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$v = \int \frac{h\,\partial u}{t\sqrt{t^2-h^2}} + \varphi'(h); \qquad h = t\sin\varkappa \tag{86}$$

wo unter dem Integralzeichen h als constant betrachtet werden muss, und φ eine willkürliche Function bezeichnet. Bildet man aus den Werten (85) die Ausdrücke von ∂u_1, ∂v_1, und reducirt mittelst der Gl. (86) v und $\varkappa$ auf u und h als Unabhängige, so kommt:

$$\partial u_1 = \frac{t\,\partial u}{\sqrt{t^2-h^2}} + h\,\partial h\left\{\int \frac{t\,\partial u}{(t^2-h^2)^{\frac{3}{2}}} + \varphi''(h)\right\}$$

$$\partial v_1 = \frac{\partial h}{t_1}\sqrt{t^2-h^2}\left\{\int \frac{t\,\partial u}{(t^2-h^2)^{\frac{3}{2}}} + \varphi''(h)\right\}$$

Erstere Gleichung giebt integrirt:

$$u_1 = \int \frac{t\,\partial u}{\sqrt{t^2-h^2}} + h\varphi'(h) - \varphi(h) \tag{87}$$

Nach letzterer ist v_1 Function von h; setzt man

$$v_1 = h$$

so wird die Gleichung erfüllt durch

$$t_1 = \sqrt{t^2-h^2}\left\{\int \frac{t\,\partial u}{(t^2-h^2)^{\frac{3}{2}}} + \varphi''(h)\right\} \tag{88}$$

Nach Einführung der Werte (85) in II. Gl. (2) ergeben sich zunächst folgende Ausdrücke der Fundamentalgrössen 2. Ordnung:

$$E_1 = \frac{\partial \tau}{\partial u}\cos^2\varkappa + \frac{\sin\tau}{t}\sin^2\varkappa; \quad F_1 = t_1\left(\frac{\sin\tau}{t} - \frac{\partial\tau}{\partial u}\right)\sin\varkappa\cos\varkappa$$

$$G_1 = t_1^2\left(\frac{\partial\tau}{\partial u}\sin^2\varkappa + \frac{\sin\tau}{t}\cos^2\varkappa\right)$$

das ist nach (86) und (88)

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \frac{h^2}{t^3}\sin\tau + \frac{t^2-h^2}{t^2}\frac{\partial\tau}{\partial u} \\ F_1 &= \frac{t^2-h^2}{t^2}\left(\frac{\sin\tau}{t} - \frac{\partial\tau}{\partial u}\right)S \\ G_1 &= \frac{t^2-h^2}{t^2}\left(\frac{t^2-h^2}{t}\sin\tau + h^2\frac{\partial\tau}{\partial u}\right)S^2 \\ S &= \int\frac{t\,\partial u}{(t^2-h^2)^{\frac{3}{2}}} + \varphi''(h) \end{aligned}\right\} \qquad (89)$$

Sollen u_1, v_1 geodätische Polarcoordinaten sein, so muss zur t_1 unabhängig von v_1, d. i. von h, für einen Wert von u_1 verschwinden. Entspricht diesem Werte die untere Grenze der Integrale in (87) und (88), so muss sein

$$\sqrt{t^2-h^2}\,\varphi''(h) = 0$$

für jedes h, also

$$\varphi(h) = ah + b$$

Gleichzeitig muss u_1 verschwinden; das giebt: $b = 0$. Jetzt ist

$$\frac{t_1}{u_1} = \sqrt{t^2-h^2}\int\frac{t\,\partial u}{(t^2-h^2)^{\frac{3}{2}}} : \int\frac{t\,\partial u}{\sqrt{t^2-h^2}}$$

Der untern Grenze der Integrale entspreche $t = c$; lässt man dann u stetig in die untere Grenze übergehen, so wird

$$\lim\frac{t_1}{u_1} = \frac{1}{\sqrt{c^2-h^2}}$$

Nach §. 32. hat man daher zu setzen:

$$v_1 = \int\frac{\partial h}{\sqrt{c^2-h^2}} = \arcsin\frac{h}{c}; \quad h = c\sin v_1$$

dann werden nach Gl. (87) und (86) die Relationen zwischen (u, v) und (u_1, v_1):

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \int\limits_{t=c} \frac{t\,\partial u}{\sqrt{t^2 - c^2 \sin^2 v_1}} \\ v &= \int\limits_{t=c} \frac{c \sin v_1\,\partial u}{t\sqrt{t^2 - c^2 \sin^2 v_1}} + a \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

§. 49. **Conforme Abbildung der Rotationsflächen.** Zur Auffindung der Abbildungsparameter u_2, v_2, bestimmt durch die Bedingung $e_2 = g_2 = t_2$, $f_2 = 0$, haben wir die Gleichungen zu lösen:

$$\frac{1}{t_2} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial u}\right)^2$$

$$0 = \frac{\partial u_2}{\partial u}\frac{\partial u_2}{\partial v} + \frac{\partial v_2}{\partial u}\frac{\partial v_2}{\partial v}$$

$$\frac{t^2}{t_2} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial v}\right)^2$$

und erfüllen sie durch die Werte:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial u} &= \frac{\cos\varkappa}{\sqrt{t_2}}; & \frac{\partial u_2}{\partial v} &= \frac{t}{\sqrt{t_2}}\sin\varkappa \\ \frac{\partial v_2}{\partial u} &= -\frac{\sin\varkappa}{\sqrt{t_2}}; & \frac{\partial v_2}{\partial v} &= \frac{t}{\sqrt{t_2}}\cos\varkappa \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

Eliminirt man u_2 und v_2 durch Differentiation, so erhält man 2 Gleichungen, die sich leicht zu folgenden verbinden:

$$\frac{t}{2}\frac{\partial \log t_2}{\partial u} - \frac{\partial t}{\partial u} = \frac{\partial\varkappa}{\partial v}; \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \log t_2}{\partial v} + t\frac{\partial\varkappa}{\partial u} = 0$$

Die zweite wird erfüllt durch

$$\log t_2 = 2t\frac{\partial T}{\partial u}; \qquad \varkappa = -\frac{\partial T}{\partial v} \tag{92}$$

Die erste geht alsdann, wenn man

$$\frac{\partial u}{t} = \partial w$$

setzt, über in

$$\frac{\partial^2 T}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial w^2} = \frac{\partial \log t}{\partial w}$$

Das Integral hiervon ist:

$$T = \Phi(w + iv, i) + \Phi(w - iv, -i) + \int \log t\,\partial w$$

woraus nach (92):

$$\tfrac{1}{2}\log t_2 = \Phi'(w+iv, i) + \Phi'(w-iv, -i) + \log t$$
$$\varkappa = -i\Phi'(w+iv, i) + i\Phi'(w-iv, -i)$$

oder, wenn man

$$\Phi'(W, i) = -\tfrac{1}{2}\log 2\varphi'(W, i)$$

setzt:

$$\frac{t}{\sqrt{t_2}} = 2\sqrt{\varphi'(w+iv, i)\,\varphi'(w-iv, -i)}$$

$$\varkappa = \frac{i}{2}\log\frac{\varphi'(w+iv, i)}{\varphi'(w-iv, -i)}$$

$$\cos\varkappa = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varphi'(w+iv, i)}{\varphi'(w-iv, -i)}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varphi'(w-iv, -i)}{\varphi'(w+iv, i)}}$$

$$\sin\varkappa = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\varphi'(w+iv, i)}{\varphi'(w-iv, -i)}} - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\varphi'(w-iv, -i)}{\varphi'(w+iv, i)}}$$

Dies in (91) eingeführt giebt:

$$\partial u_2 = \varphi'(w+iv, i)\,\partial(w+iv) + \varphi'(w-iv, -i)\,\partial(w-iv)$$
$$\partial v_2 = -i\varphi'(w+iv, i)\,\partial(w+iv) + i\varphi'(w-iv, -i)\,\partial(w-iv)$$

und nach Integration, mit Weglassung der Constanten:

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= \varphi(w+iv, i) + \varphi(w-iv, -i) \\ iv_2 &= \varphi(w+iv, i) - \varphi(w-iv, -i) \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

woraus:

$$2\varphi(w \pm iv, \pm i) = u_2 \pm iv_2$$

oder, durch die inverse Function ψ ausgedrückt

$$w \pm iv = \psi(u_2 \pm iv_2, \pm i)$$

Hier ist $w = \int\frac{\partial u}{t}$, und φ oder ψ willkürliche Function.

§. 50. **Abwickelung der Rotationsflächen auf einander.** Ist eine Rotationsfläche, wie bisher, in Parametern der Krümmungslinien u, v gegeben, so muss für jede auf ihr abwickelbare Rotationsfläche, wenn man sie in denselben Parametern darstellt, gleichfalls $e = 1$; $f = 0$; $g = t^2$ sein; allein die u und v brauchen nicht die gleiche geometrische Bedeutung zu haben, mithin auch nicht t die Coordinate der Meridians zu sein. Sind nun auf der zweiten Fläche u', v' die Parameter der Krümmungslinien, und entspricht der Punkt $(u'v')$ dem Punkte (uv), so ist die Bedingung der Abwickelbarkeit

$$\partial s^2 = \partial u^2 + t^2\partial v^2 = \partial u'^2 + t'^2\partial v'^2$$

Beschränken wir uns auf die specielle Lösung, wo die Meridiane

wieder Meridiane, die Parallelkreise wieder Parallelkreise werden, so ist

$$u = u'; \qquad t\partial v = t'\partial v'$$

und da t, t' nur von u abhangen,

$$t' = \frac{t}{c}; \qquad v' = cv; \qquad c \text{ constant};$$

folglich die Gleichungen der zweiten Fläche:

$$x = \frac{t}{c}\cos cv; \qquad y = \frac{t}{c}\sin cv$$

Die dritte Coordinate ergiebt sich aus:

$$\partial z^2 = \partial s^2 - (\partial x^2 + \partial y^2) = \partial u^2 + t^2\partial v^2 - \left(\frac{\partial t^2}{c^2} + t^2\partial v^2\right) = \partial u^2 - \frac{\partial t^2}{c^2}$$

sie ist daher:

$$z = \int\sqrt{\partial u^2 - \frac{\partial t^2}{c^2}} \tag{94}$$

§. 51. **Fläche zweiten Grades. Reduction der Coordinatengleichung.** Die Gleichung einer Fläche 2. Grades ist eine beliebige Gleichung 2. Grades zwischen den cartesischen Coordinaten x, y, z:.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Hyz + 2Jzx + 2Kxy + 2Lx + 2My + 2Nz + D = 0$$

Durch besondere Lage des Axensystems lassen sich die 10 Terme auf höchstens 4 reduciren. Die Relationen zwischen den alten und neuen Coordinaten seien

$$\begin{aligned} x &= lx' + l_1 y' + l_2 z' \\ y &= mx' + m_1 y' + m_2 z' \\ z &= nx' + n_1 y' + n_2 z' \end{aligned}$$

Setzt man

$$\begin{aligned} \lambda &= Ax + Ky + Jz \\ \mu &= Kx + By + Hz \\ \nu &= Jx + Hy + Cz \\ \xi &= Lx + My + Nz \end{aligned}$$

so kann man die Flächengleichung schreiben:

$$\lambda x + \mu y + \nu z + 2\xi + D = 0 \tag{95}$$

Nach Einführung der x', y', z' wird (96)

$$\begin{aligned} \lambda &= (Al + Km + Jn)x' + (Al_1 + Km_1 + Jn_1)y' + (Al_2 + Km_2 + Jn_2)z' \\ \mu &= (Kl + Bm + Hn)x' + (Kl_1 + Bm_1 + Hn_1)y' + (Kl_2 + Bm_2 + Hn_2)z' \\ \nu &= (Jl + Hm + Cn)x' + (Jl_1 + Hm_1 + Cn_1)y' + (Jl_2 + Hm_2 + Cn_2)z' \end{aligned}$$

und Gl. (95) geht über in

$$(\lambda l+\mu m+\nu n)x'+(\lambda l_1+\mu m_1+\nu n_1)y'+(\lambda l_2+\mu m_2+\nu n_2)z'+2\xi+D=0$$

Damit in dieser Gleichung 2. Grades die Producte $y'z'$, $z'x'$, $x'y'$ fehlen, hat man zu setzen:

$$\begin{aligned} \lambda l+\mu m+\nu n &= h x' \\ \lambda l_1+\mu m_1+\nu n_1 &= h_1 y' \\ \lambda l_2+\mu m_2+\nu n_2 &= h_2 z' \end{aligned}$$

woraus:

$$\begin{aligned} \lambda &= h\, l x'+h_1 l_1 y'+h_2 l_2 z' \\ \mu &= h m x'+h_1 m_1 y'+h_2 m_2 z' \\ \nu &= h n x'+h_1 n_1 y'+h_2 n_2 z' \end{aligned}$$

Dies verglichen mit den Werten (96) giebt:

$$\left.\begin{aligned} (A-h)l+Km+Jn &= 0 \\ Kl+(B-h)m+Hn &= 0 \\ Jl+Hm+(C-h)n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (97)$$

nebst 2 analogen Gleichungssystemen, die sich nur durch die Indices bei l, m, n, h unterscheiden; daher gilt das Resultat der Elimination von l, m, n, nämlich

$$\begin{vmatrix} A-h & K & J \\ K & B-h & H \\ J & H & C-h \end{vmatrix} = 0 \qquad (98)$$

auch nach Substitution von h_1, h_2 für h, und h, h_1, h_2 sind Wurzeln derselben kubischen Gleichung. Nach Einsetzung der Wurzeln in Gl. (97) ergiebt sich für jede derselben ein System von Werten der l, m, n, z. B. für h_1 die Werte l_1, m_1, n_1. Multiplicirt man mit diesen einzeln die Gl. (97), so ist die Summe:

$$All_1+Bmm_1+Cnn_1+H(mn_1+nm_1)+J(nl_1+ln_1)+K(lm_1+ml_1)= h(ll_1+mm_1+nn_1)$$

Vertauscht man in dieser Gleichung die beiden Wertsysteme, so bleibt die Linke ungeändert, und nach Subtraction beider Gleichungen erhält man:

$$(h-h_1)(ll_1+mm_1+nn_1)=0 \qquad (99)$$

Sind nun h und h_1 ungleich, so folgt:

$$ll_1+mm_1+nn_1=0$$

Wäre erstlich h nicht reell, so gäbe es eine zweite ungleiche und conjugirte Wurzel h_1, und beiden entsprechend würde man den Gl.

(97) durch conjugirte l, m, n genügen können. Nach Gl. (99) wären dann alle Moduln derselben null, also auch l, m, n selbst, was unmöglich ist. Folglich kann Gl. (98) nur reelle Wurzeln haben.

Ferner zeigt Gl. (99), dass die beiden Geraden, deren Richtungscosinus die l, m, n bezeichnen, normal zu einander sind. Unter Voraussetzung dreier ungleicher Wurzeln h, h_1, h_2 genügt daher ein orthogonales System den Bedingungen, welchem gemäss die Axen der x', y', z' bestimmt werden können.

Sind endlich h, h_1 zwei gleiche Wurzeln, so werden sie durch unendlich kleine Variation irgend eines Coefficienten ungleich. Lässt man nachher die Variation stetig verschwinden, so können die 2 normalen Geraden nicht stetig in einander übergehen. Da alsdann die linearen Gl. (97) 2 verschiedene Lösungen haben, so haben sie unbegrenzt viele; nur müssen die betreffenden Geraden, wofern h_2 ungleich ist, znr Geraden $(l_2 m_2 n_2)$ normal sein.

Die Flächengleichung ist jetzt auf die Form gebracht:

$$hx'^2 + h_1 y'^2 + h_2 z'^2 + 2dx' + 2d_1 y' + 2d_2 z' + D = 0 \qquad (100)$$

Ist nun keiner der Coefficienten h, h_1, h_2 null, so kann man den Anfangspunkt so verschieben, dass (ohne Beziehung zur anfänglichen Bedeutung von x, y, z)

$$x' = x - \frac{d}{h}; \quad y' = y - \frac{d_1}{h_1}; \quad z' = z - \frac{d_2}{h_2} \qquad (101)$$

wird; dann wird

$$hx^2 + h_1 y^2 + h_2 z^2 = P = \frac{d^2}{h} + \frac{d_1^2}{h_1} + \frac{d_2^2}{h_2} - D \qquad (102)$$

Ist P nicht null, so kann man

$$h = \frac{P}{a}; \quad h_1 = \frac{P}{b}; \quad h_2 = \frac{P}{c} \qquad (103)$$

setzen, und erhält:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1 \qquad (104)$$

In diesem Falle heisst die Fläche eine centrale. Die Fläche heisst ein Ellipsoid, einschaliges oder zweischaliges Hyperboloid, jenachdem 3, 2 oder 1 der Grössen a, b, c positiv sind. Grenzfälle, welche krumme Flächen bilden, giebt es folgende. Ist $P = 0$, wo man die Gleichung in der Form schreiben kann

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 0 \qquad (105)$$

so heisst die Fläche ein **Kegel**. Ist eine der Grössen h, h_1, h_2 null, und nicht gleichzeitig bzhw. d, d_1, d_2 null, so heisst die Fläche ein **Paraboloid**; ist hingegen bzhw. d, d_1, d_2 null, fällt also eine Coordinate aus der Gleichung heraus, ein **Cylinder**. Das letztere findet auch statt, wenn zwei der Grössen h, h_1, h_2 null sind, nachdem man die zur dritten gehörige Coordinate nach (106) transformirt, und durch Drehung des Axensystems um die bezügliche Axe die beiden übrigen linearen Terme auf einen reducirt hat. Das Paraboloid und der Cylinder in jenem Falle heissen **elliptisch** oder **hyperbolisch**, jenachdem die 2 nicht verschwindenden Coefficienten h gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben. Im letzten Falle heisst der Cylinder **parabolisch**.

§. 52. **Krümmungslinien auf der Fläche 2. Grades.** Stellt man die Coordinaten folgendermassen in Parametern u, v dar:

$$x^2 = \alpha(u-\alpha_1)(v-\alpha_2);\; y^2 = \beta(u-\beta_1)(v-\beta_2);\; z^2 = \gamma(u-\gamma_1)(v-\gamma_2) \quad (106)$$

so lassen sich die 9 Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ leicht so bestimmen, dass die Gleichung einer centralen Fläche 2. Grades (104) für ungleiche a, b, c erfüllt wird. Es muss dann sein

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=0\\
&\frac{\alpha\alpha_1}{a}+\frac{\beta\beta_1}{b}+\frac{\gamma\gamma_1}{c}=0\\
&\frac{\alpha\alpha_2}{a}+\frac{\beta\beta_2}{b}+\frac{\gamma\gamma_2}{c}=0\\
&\frac{\alpha\alpha_1\alpha_2}{a}+\frac{\beta\beta_1\beta_2}{b}+\frac{\gamma\gamma_1\gamma_2}{c}=1
\end{aligned}\right\} \quad (107)$$

Die ersten 3 Gleichungen geben nach Elimination von α, β, γ

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 \\ 1 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

Dem wird allgemein genügt durch

$$\alpha_2 = \lambda+\mu\alpha_1;\quad \beta_2 = \lambda+\mu\beta_1;\quad \gamma_2 = \lambda+\mu\gamma_1$$

Führt man diese Werte in (106) ein, und schreibt für $\frac{v-\lambda}{\mu}$ wieder v, für $\alpha\mu$, $\beta\mu$, $\gamma\mu$ wieder α, β, γ, so erhält man das Resultat, welches den Werten $\lambda = 0$; $\mu = 1$ entsprechen würde. Jetzt fallen 2 der Gl. (107) zusammen, und es bleibt nur das System:

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=0$$

$$\frac{\alpha\alpha_1}{a}+\frac{\beta\beta_1}{b}+\frac{\gamma\gamma_1}{c}=0$$

$$\frac{\alpha\alpha_1^2}{a}+\frac{\beta\beta_1^2}{b}+\frac{\gamma\gamma_1^2}{c}=1$$

welches durch

$$\alpha=a\frac{\gamma_1-\beta_1}{\delta_1};\quad \beta=b\frac{\alpha_1-\gamma_1}{\delta_1};\quad \gamma=c\frac{\beta_1-\alpha_1}{\delta_1}$$

$$\delta_1=(\beta_1-\gamma_1)(\gamma_1-\alpha_1)(\alpha_1-\beta_1)$$

erfüllt wird. Die Gl. (106) geben differentiirt:

$$2\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{x}{u-\alpha_1};\quad 2\frac{\partial x}{\partial v}=\alpha\frac{u-\alpha_1}{x};\quad \text{etc.}$$

$$4\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}=\alpha;\quad \text{etc. folglich}$$

$$f=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}$$

Damit also das System der (uv) orthogonal sei, hat man zu setzen:

$$a(\gamma_1-\beta_1)+b(\alpha_1-\gamma_1)+c(\beta_1-\alpha_1)=0\quad \text{oder}$$
$$\alpha_1(b-c)+\beta_1(c-a)+\gamma_1(a-b)=0$$

Dem wird allgemein genügt durch

$$\alpha_1=\lambda+\mu a;\quad \beta_1=\lambda+\mu b;\quad \gamma_1=\lambda+\mu c$$

Es hat sich jedoch oben gezeigt, dass man ohne Einbusse an Allgemeinheit $\lambda=0$; $\mu=1$ setzen kann. Dann werden die Gleichungen der Fläche in orthogonalen Parametern u, v:

$$\left.\begin{aligned} x^2&=a\frac{c-b}{d}(u-a)(v-a);\quad y^2=b\frac{a-c}{d}(u-b)(v-b)\\ z^2&=c\frac{b-a}{d}(u-c)(v-c)\\ d&=(b-c)(c-a)(a-b)\end{aligned}\right\}\quad (108)$$

Hieraus ergeben sich die Werte:

$$pt=\frac{dx^2yz}{a}\frac{u-v}{UV};\quad qt=\frac{dxy^2z}{b}\frac{u-v}{UV}\quad (109)$$

$$rt=\frac{dxyz^2}{c}\frac{u-v}{UV}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$U = (u-a)(u-b)(u-c); \quad V = (v-a)(v-b)(v-c) \tag{110}$$

Die Quadratsumme giebt:

$$t = dxyz\,\frac{u-v}{4UV}\sqrt{\frac{uv}{abc}} \tag{111}$$

daher nach Division:

$$p = \frac{x}{a}\sqrt{\frac{abc}{uv}}; \quad q = \frac{y}{b}\sqrt{\frac{abc}{uv}}; \quad r = \frac{z}{c}\sqrt{\frac{abc}{uv}} \tag{112}$$

Ferner findet man:

$$e = \frac{u}{4}\frac{v-u}{U}; \quad g = \frac{v}{4}\frac{u-v}{V} \tag{113}$$

$$E = \frac{u-v}{4U}\sqrt{\frac{abc}{uv}}; \quad F = 0; \quad G = \frac{v-u}{4V}\sqrt{\frac{abc}{uv}} \tag{114}$$

Hiernach sind u, v Parameter der Krümmungslinien. In diesem Falle erhält man die Hauptkrümmungen durch Division der vorstehenden Grössen, nämlich:

$$\frac{1}{\varrho_1} = -\frac{1}{u}\sqrt{\frac{abc}{uv}}; \quad \frac{1}{\varrho_2} = -\frac{1}{v}\sqrt{\frac{abc}{uv}} \tag{115}$$

Die Krümmung der Fläche ist also positiv oder negativ, jenachdem u und v gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben. Damit aber die Ausdrücke, wie schon oben der von t, reell werden, muss uv gleiches Vorzeichen mit abc haben. Dies ergiebt:

Das Vorzeichen der Krümmung ist stets das von abc; sie ist positiv beim Ellipsoid und zweischaligen Hyperboloid, negativ beim einschaligen Hyperboloid.

Nach Gl. (108) ist nun

$$abc = \frac{p^3}{hh_1h_2} \tag{116}$$

Da h, h_1, h_2 die Wurzeln der Gl. (98) sind, so ist

$$hh_1h_2 = \begin{vmatrix} A & K & J \\ K & B & H \\ J & H & C \end{vmatrix} \tag{117}$$

Ferner sind d, d_1, d_2 in (100) als Abkürzungen eingeführt für

$$\left.\begin{aligned} d &= Ll + Mm + Nn \\ d_1 &= Ll_1 + Mm_1 + Nn_1 \\ d_2 &= Ll_2 + Mm_2 + Nn_2 \end{aligned}\right\} \tag{118}$$

Eliminirt man l, m, n zwischen der ersten dieser Gleichungen und den 3 Gl. (97), in welchen man die Terme hl, hm, hn vorher absondert, so kommt:

$$\begin{vmatrix} A\,K\,J & hl \\ K\,B\,H & hm \\ J\,H\,C & hn \\ L\,M\,N & d \end{vmatrix} = 0 \tag{119}$$

Diese Gleichung hat 2 analoge, welche nur in der letzten Verticalreihe durch die Indices 1, 2 unterschieden sind. Addirt man alle drei nach Multiplication mit

$$\frac{d}{h} \quad \frac{d_1}{h_1}, \quad \frac{d_2}{h_2}$$

so kommt, mit Beachtung von (118) und (102):

$$\begin{vmatrix} A\,K\,J & L \\ K\,B\,H & M \\ J\,H\,C & N \\ L\,M\,N & D+P \end{vmatrix} = 0 \tag{120}$$

Entwickelt man hieraus den Wert von P und setzt ihn in Gl. (116) ein, so erhält man:

$$abc = -\begin{vmatrix} A\,K\,J\,L \\ K\,B\,H\,M \\ J\,H\,C\,N \\ L\,M\,N\,D \end{vmatrix}^3 \cdot \begin{vmatrix} A\,K\,J \\ K\,B\,H \\ J\,H\,C \end{vmatrix}^{-4} \tag{121}$$

Hiernach ist das Vorzeichen der Krümmung immer entgegengesetzt dem der Determinante 4. Ordnung, die man nach vorstehender Anordnung aus sämmtlichen Coefficienten der ursprünglichen Gleichung bildet.

Ist diese Determinante 4. Ordnung null, so verschwindet nach (120) auch P, und die Fläche wird ein Kegel. Für diesen Fall kann man 2 der Gl. (107), deren letzte zur Rechten 0 statt 1 hat, durch $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$ erfüllen; die übrigen Bestimmungen bleiben unverändert, und die Gleichungen der Fläche in Parametern der Krümmungslinien lauten, wenn wir $-u^2$ statt u schreiben:

$$\left.\begin{array}{c} x^2 = a\dfrac{b-c}{d}u^2(v-a); \quad y^2 = b\dfrac{c-a}{d}u^2(v-b) \\ z^2 = c\dfrac{a-b}{d}u^2(v \quad c) \end{array}\right\} \tag{122}$$

Die Fundamentalgrössen werden:

$$\left.\begin{array}{l} e = 1; \quad f = 0; \quad g = -\dfrac{u^2 v}{4V}; \quad t = \dfrac{u}{2}\sqrt{-\dfrac{v}{V}} \\ E = 0; \quad F = 0; \quad G = \dfrac{u^2}{4V}\sqrt{\dfrac{abc}{-v}} \end{array}\right\} \tag{123}$$

die Richtungscosinus der Normale:

$$p = \frac{x}{a}\sqrt{\frac{abc}{-v}}; \quad q = \frac{y}{b}\sqrt{\frac{abc}{-v}}; \quad r = \frac{z}{c}\sqrt{\frac{abc}{-v}} \tag{124}$$

die Hauptkrümmungen:

$$\frac{1}{\varrho_1} = 0; \quad \frac{1}{\varrho_2} = -\frac{1}{v}\sqrt{\frac{abc}{-v}} \tag{125}$$

Die Fläche ist also abwickelbar, und die Parameter orthogonal geodätisch.

Ist statt dessen die Determinante 3. Ordnung, d. i. hh_1h_2, null, z. B. $h_2 = 0$, so ist die Fläche ein Paraboloid oder, im besondern Falle, Cylinder. Setzt man $z - \sqrt{c}$, $a\sqrt{c}$, $b\sqrt{c}$, $u\sqrt{c}$, $v\sqrt{c}$ für z, a, b, u, v, und dann $c = \infty$, wie es dem $h_2 = 0$ entspricht, so wird Gl. (104):

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z \tag{126}$$

und die Gl. (108):

$$\left.\begin{array}{c} x^2 = \dfrac{a(u-a)(v-a)}{b-a}; \quad y^2 = \dfrac{b(u-b)(v-b)}{a-b} \\ 2z = u + v - a - b) \end{array}\right\} \tag{127}$$

ferner:

$$\left.\begin{array}{l} p = \dfrac{x}{a}\sqrt{\dfrac{ab}{uv}}; \quad q = \dfrac{y}{b}\sqrt{\dfrac{ab}{uv}}; \quad r = -\sqrt{\dfrac{ab}{uv}} \\ e = \dfrac{u(u-v)}{4(u-a)(u-b)}; \quad g = \dfrac{v(v-u)}{4(v-a)(v-b)} \\ E = \dfrac{v-u}{4(u-a)(u-b)}\sqrt{\dfrac{ab}{uv}}; \quad G = \dfrac{u-v}{4(v-a)(v-b)}\sqrt{\dfrac{ab}{uv}} \\ \dfrac{1}{\varrho_1} = -\dfrac{1}{u}\sqrt{\dfrac{ab}{uv}}; \quad \dfrac{1}{\varrho_2} = -\dfrac{1}{v}\sqrt{\dfrac{ab}{uv}} \end{array}\right\} \tag{128}$$

Für die Fälle der Cylinder, wo die Relationen der Coordinaten bzhw. lauten

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1;\quad x^2=2ay \tag{129}$$

stellen sich letztere in orthogonal geodätischen Parametern der Krümmungslinien bzhw. folgendermassen dar:

$$\left.\begin{array}{c} x^2=a\frac{v-a}{b-a};\quad y^2=b\frac{v-b}{a-b};\quad z=u \\ x^2=2av;\quad y=v;\quad z=u \end{array}\right\} \tag{130}$$

Da indes alle hier besprochenen Probleme auf Abwickelbaren allgemeine Lösung gefunden haben, so können wir die Abwickelbaren 2. Grades, Kegel und Cylinder, ausser Betracht lassen. Dasselbe gilt von den Rotationsflächen 2. Grades, welche in der Gleichungsform (108) nicht mit begriffen sind, die jedoch als Specialitäten in der Theorie der Rotationsflächen keine instructiven Seiten darbieten. Auch von den Paraboloiden brauchen wir nicht besonders zu handeln, da sich durch die oben aufgestellte Substitution und Uebergang zum Grenzwert die Resultate leicht auf sie übertragen lassen.

Für die Krümmungslinien sind noch die Nabelpunkte von Bedeutung. Man findet aus (115), indem man $\varrho_1=\varrho_2$ setzt, die Bedingung $u=v$. Dann aber muss in (108) der constante Coefficient jedes nicht verschwindenden der 3 Ausdrücke positiv sein. Da die Summe der Coefficienten null ist, so ist mindestens einer negativ, folglich eine der Coordinaten, z. B. $y=0$, und man hat:

$$u=v=b$$

Es giebt alsdann entsprechend den Doppelvorzeichen von x und z vier Nabelpunkte auf der Ebene $y=0$.

§. 53. **Confocales dreifach orthogonales Flächensystem 2. Grades.** Lässt man a, b, c, u, v mit einem dritten Parameter w gleichzeitig um gleiche Incremente variiren, oder, was dasselbe ist, substituirt man $a-w$, $b-w$, $c-w$, $u-w$, $v-w$ für a, b, c, u, v, so gehen die Gl. (108) über in

$$\left.\begin{array}{l} x^2=\frac{b-c}{d}(u-a)(v-a)(w-a) \\ y^2=\frac{c-a}{d}(u-b)(v-b)(w-b) \\ z^2=\frac{a-b}{d}(u-c)(v-c)(w-c) \end{array}\right\} \tag{131}$$

Da sie symmetrisch in u, v, w sind, so folgt, dass die oben hergeleiteten Resultate für die Fläche $w = 0$, welche offenbar für die ganze Schar von Flächen $w =$ const. gelten, auch auf die beiden Scharen von Flächen $u =$ const. und $v =$ const. angewandt werden können. Demnach schneiden sich alle 3 Flächenscharen in ihren Krümmungslinien, und dass dies unter rechten Winkeln geschieht, folgt aus der auf alle anzuwendenden Gleichung $f = 0$, der gemäss die Tangenten der Schnittlinien auf einander senkrecht stehen, mithin mit den Normalen einzeln zusammenfallen. Daher sind die Gl. (131) der Ausdruck eines dreifach orthogonalen Flächensystems.

Eliminirt man je 2 Parameter, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a-u}+\frac{y^2}{b-u}+\frac{z^2}{c-u} &= 1 \\ \frac{x^2}{a-v}+\frac{y^2}{b-v}+\frac{z^2}{c-v} &= 1 \\ \frac{x^2}{a-w}+\frac{y^2}{b-w}+\frac{z^2}{c-w} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (132)$$

als Ausdruck der einzelnen 3 Flächenscharen. Die dritte Gleichung ergiebt sich aus (104) durch die genannte Substitution; die andern folgen durch Analogie.

§. 54. **Asymptotische Linien auf Flächen 2. Grades.** Die Gleichung der asymptotischen Richtungen $E\partial u^2 + G\partial v^2 = 0$ wird nach (114):

$$\frac{\partial u^2}{U} = \frac{\partial v^2}{V} \qquad (133)$$

und zerfällt in

$$\frac{\partial u}{\sqrt{U}} + \frac{\partial v}{\sqrt{V}} = 0; \quad \frac{\partial u}{\sqrt{U}} - \frac{\partial v}{\sqrt{V}} = 0 \qquad (134)$$

Die Integrale können wir folgendermassen schreiben:

$$\int_a \frac{\partial u}{\sqrt{U}} + \int_a \frac{\partial v}{\sqrt{V}} = \int_a \frac{\partial u_1}{\sqrt{U_1}}; \quad \int_a \frac{\partial u}{\sqrt{U}} - \int_a \frac{\partial v}{\sqrt{V}} = \int_a \frac{\partial v_1}{\sqrt{V_1}} \qquad (135)$$

wo U_1, V_1 dieselben Functionen von u_1, v_1 sind, wie U von u und V von v, so dass für $v = a$ bzhw. u in u_1 und in v_1 übergeht. Nach dem Additionstheorem elliptischer Functionen, welches sich nach Lagrange's Methode hier besonders einfach herleiten lässt, ist alsdann

(136)

$$\frac{u-v}{\sqrt{(u-a)(v-b)(v-c)} - \sqrt{(v-a)(u-b)(u-c)}} = \sqrt{\frac{u_1-a}{(a-b)(a-c)}}$$

$$\frac{u-v}{\sqrt{(u-a)(v-b)(v-c)}+\sqrt{(v-a)(u-b)(u-c)}}=\sqrt{\frac{v_1-a}{(a-b)(a-c)}} \qquad (137)$$

Die rechten Seiten ergeben sich aus den linken, indem man $v=a$ setzt. Nach demselben Gesetz findet man auch deren Werte, wenn zur Linken a, b, c vertauscht werden: es muss, wenn a in b und in c übergeht, v_1 bzhw. übergehen in

$$c+\frac{(a-c)(b-c)}{v_1-c} \quad \text{und} \quad b+\frac{(a-b)(c-b)}{v_1-b} \qquad (138)$$

Lässt man nun den Punkt (xyz) längs der asymptotischen Linie $v_1=$ const. variiren, so hat man nach (135):

$$\frac{\partial u}{\partial u_1}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{U}{U_1}}; \quad \frac{\partial v}{\partial v_1}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{V}{U_1}}$$

und findet nach Differentiation der Gl. (108):

$$\frac{\partial x}{\partial u_1}=\frac{x}{4\sqrt{U_1}}\left(\frac{\sqrt{U}}{u-a}+\frac{\sqrt{V}}{v-a}\right)$$

das ist vermöge der Gl. (137):

$$\frac{\partial x}{\partial u_1}=x\,\frac{u-v}{4}\sqrt{\frac{(a-b)(a-c)}{U_1(u-a)(v-a)(v_1-a)}}$$

und nach Einsetzung des Wertes (108) von x:

$$\frac{\partial x}{\partial u_1}=\frac{u-v}{4}\sqrt{\frac{a}{U_1(v_1-a)}}$$

Vertauscht man a mit b und c, so geht x in y und z über. Mit Beachtung der Wirkung (138) auf v_1 findet man:

$$\frac{\partial y}{\partial u_1}=\frac{u-v}{4}\sqrt{\frac{b(v_1-c)}{U_1(c-b)(v_1-a)}}; \quad \frac{\partial z}{\partial u_1}=\frac{u-v}{4}\sqrt{\frac{c(v_1-b)}{U_1(b-c)(v_1-a)}}$$

Die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate giebt, übereinstimmend mit dem aus den Fundamentalgrössen resultirenden Werte:

$$\frac{\partial s}{\partial u_1}=\frac{u-v}{4\sqrt{U_1}} \qquad (139)$$

woraus:

$$\frac{\partial x}{\partial s}=\sqrt{\frac{a}{v_1-a}}; \quad \frac{\partial y}{\partial s}=\sqrt{\frac{b(v_1-c)}{(c-b)(v_1-a)}}; \quad \frac{\partial z}{\partial s}=\sqrt{\frac{c(v_1-b)}{(b-c)(v_1-a)}} \qquad (140)$$

Hiernach ist die asymptotische Linie, da ihre Richtung sich als constant erweist, gerade. Ihren Ausgangspunkt können wir noch beliebig wählen; er sei ihr Durchschnitt mit der Krümmungslinie $v = a$, das ist mit der Ebene $x = 0$, wo, wie wir sahen, $u = v_1$ wird. Dies giebt nach (108) die Coordinatenwerte

$$x = 0; \quad y = \sqrt{\frac{b(v_1 - b)}{c - b}}; \quad z = \sqrt{\frac{c(v_1 - b)}{b - c}}$$

Integrirt man jetzt die Gl. (140), so erhält man als Gleichungen der asymptotischen Linie $v_1 =$ const.

$$\left.\begin{aligned} x = s\sqrt{\frac{a}{v_1 - a}}; \quad y &= \sqrt{\frac{b}{c-b}}\left(\sqrt{v_1 - b} + s\sqrt{\frac{v_1 - c}{v_1 - a}}\right) \\ z &= \sqrt{\frac{c}{b-c}}\left(\sqrt{v_1 - c} - s\sqrt{\frac{v_1 - b}{v_1 - a}}\right) \end{aligned}\right\} \quad (141)$$

Sie erzeugt bei variirendem v_1 die Fläche (104), deren Gleichung in der Tat erfüllt wird, wenn man die Vorzeichen innerhalb der binomischen Factoren von y und z entgegengesetzt bestimmt, während im übrigen die Vorzeichen der Wurzelgrössen beliebig sind. Die zweite asymptotische Linie $u_1 =$ const. ist offenbar in gleichem Falle: es ändern sich nur einige Vorzeichen, wenn man u_1 für v_1 substituirt. Um die Fläche in asymptotischen Parametern u_1, v_1 darzustellen, hat man in (108) für u, v ihre aus (136) (137) zu entwickelnden Werte zu setzen, eine Rechnung die durch Zuhülfenahme der Analogen sehr erleichtert wird.

§. 55. **Kürzeste Linien auf Flächen 2. Grades.** Sei s der Bogen, τ der Krümmungswinkel einer Kürzesten, u, v Parameter der Krümmungslinien; dann erhält man durch Differentiation der Gl. (108) längs s:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{u-a}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{v-a}\frac{\partial v}{\partial s}\right); \quad \text{etc.}$$

woraus man leicht berechnet:

$$R = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \frac{1}{b}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 = \frac{u-v}{4}\left\{\frac{1}{V}\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 - \frac{1}{U}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2\right\} \quad (142)$$

oder, da nach (113)

$$\partial s^2 = e\partial u^2 + g\partial v^2 = \frac{u-v}{4}\left(\frac{v\partial v^2}{V} - \frac{u\partial u^2}{U}\right) \quad (143)$$

ist:

$$R = \frac{U\partial v^2 - V\partial u^2}{Uv\partial v^2 - Vu\partial u^2} \quad (144)$$

Differentiirt man zweimal die Gl. (104), so kommt:

$$\frac{x}{a}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\frac{y}{b}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}+\frac{z}{c}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}+R=0 \tag{145}$$

Nun ist, vermöge der Eigenschaft der Kürzesten und nach (112)

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)=p=\frac{x}{a}\sqrt{\frac{abc}{uv}};\quad \text{etc.}$$

und da die Quadratsumme der Analogen $=1$ sein muss,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{uv}{abc} \tag{147}$$

folglich, nach Einführung in (145):

$$R=-\frac{\partial\tau}{\partial s}\sqrt{\frac{uv}{abc}} \tag{148}$$

Differentiirt man jetzt die Gl. (142) (147) und substituirt die Werte (146), so findet man:

$$\frac{\partial R}{\partial \tau}=2\left(\frac{x}{a^2}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{y}{b^2}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial s}\right)\sqrt{\frac{abc}{uv}}=\sqrt{\frac{abc}{uv}}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{uv}{abc}\right)$$

und nach Elimination von $\partial\tau$ mittelst (148):

$$\frac{\partial R}{R}=-\frac{\partial(uv)}{uv}$$

integrirt:

$$Ruv=h$$

Setzt man für R den Wert (144) und entwickelt das Verhältniss $\partial u:\partial v$, so kommt:

$$\sqrt{u}\,\partial u\sqrt{V(v-h)}=\pm\sqrt{v}\,\partial v\sqrt{U(u-h)}$$

daher nach zweiter Integration:

$$\int\partial u\sqrt{\frac{u}{U(u-h)}}=\pm\int\partial v\sqrt{\frac{v}{V(v-h)}} \tag{149}$$

Dies ist die Gleichung der Kürzesten. Für $h=0$ geht sie in die gerade asymptotische Linie über.

§. 56. **Orthogonal geodätische Systeme auf Flächen 2. Grades.** Sind u_1, v_1 die orthogonal geodätischen Parameter, also $e_1=1$; $f_1=0$; $g_1=t_1^2$, so lauten die Bedingungen II. Gl. (1) zufolge der Werte (113) von e, f, g:

$$u\frac{v-u}{4U}=\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2+t_1^2\left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2$$

$$0=\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v}+t_1^2\frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}$$

$$v\frac{u-v}{4U}=\left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2+t_1^2\left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2$$

Nun ist die zum gesuchten Systeme gehörige Schar Kürzester schon aus (149) bekannt; ihre Gleichung lautet:

$$\int\partial u\sqrt{\frac{u}{U(u-h)}}-\int\partial v\sqrt{\frac{v}{V(v-h)}}=\frac{v_1}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{150}$$

woraus:

$$\frac{\partial v_1}{\partial u}=\sqrt{\frac{\varepsilon u}{U(u-h)}};\quad \frac{\partial v_1}{\partial v}=-\sqrt{\frac{\varepsilon v}{V(v-h)}}$$

Dies eingeführt giebt:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2=\frac{u}{U}\left(\frac{v-u}{4}-\frac{\varepsilon t_1^2}{u-h}\right);\quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2=\frac{v}{V}\left(\frac{u-v}{4}-\frac{\varepsilon t_1^2}{v-h}\right)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v}=\varepsilon t_1^2\sqrt{\frac{uv}{UV(u-h)(v-h)}}$$

Das Product der ersten 2 Grössen gleich dem Quadrat der dritten giebt eine lineare Gleichung für t_1^2, aus welcher der Wert

$$\sqrt{\varepsilon}t_1=\tfrac{1}{2}\sqrt{(u-h)(v-h)}$$

hervorgeht. Nach dessen Einsetzung hat man sogleich:

$$\frac{\partial u_1}{\partial u}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{u(h-u)}{U}};\quad \frac{\partial u_1}{\partial v}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{v(h-v)}{V}}$$

und die Gleichung der geodätischen Parallelenschar lautet:

$$\int\partial u\sqrt{\frac{u(h-u)}{U}}+\int\partial v\sqrt{\frac{v(h-v)}{V}}=u_1 \tag{151}$$

Da hier u_1 einen reellen Curvenbogen bezeichnet, so folgt durch Vergleichung der Wurzelausdrücke mit denen in (150), dass ε negativ reell ist. Setzt man $\varepsilon=-\frac{1}{4}$, so wird

$$t_1=\sqrt{(u-h)(h-v)} \tag{152}$$

$$\int\partial u\sqrt{\frac{u}{U(h-u)}}-\int\partial v\sqrt{\frac{v}{V(h-v)}}=2v_1 \tag{153}$$

§. 57. **Conforme Abbildung der Flächen 2. Grades auf der Ebene.** Sind u_1, v_1 die Abbildungsparameter, so ist die Bedingung $e_1 = g_1$; $f_1 = 0$. Dieser kann man schon dadurch genügen, dass man u_1 zur Function von u und v_1 zur Function von v macht, wo u, v Parameter der Krümmungslinien; denn dann wird

$$e = \frac{u}{4}\frac{v-u}{U} = e_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2; \quad g = \frac{v}{4}\frac{u-v}{V} = e_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2$$

also nach einfachster Disposition

$$e_1 = \pm\frac{u-v}{4} \tag{154}$$

$$u_1 = \int \partial u \sqrt{\frac{\mp u}{U}}; \quad v_1 = \int \partial v \sqrt{\frac{\pm v}{V}} \tag{155}$$

§. 58. **Asymptotische Fläche dritten Grades und deren Krümmungslinien.** Die Fläche 3. Grades, deren Gleichung ist

$$xyz = \sqrt{c} \tag{156}$$

und die wir mit dem vorstehenden Namen bezeichnen, ist bemerkenswert, sofern sich aus ihr ein dreifach orthogonales Flächensystem herleiten lässt. Setzt man

$$3m = x^2 + y^2 + z^2; \quad 3n = y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 \tag{157}$$

so sind x^2, y^2, z^2 die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x^6 - 3mx^4 + 3nx^2 - c = 0 \tag{158}$$

in welcher demnach x mit y und z vertauscht werden kann. Gl. (156) differentiirt giebt:

$$yz\,\partial x + zx\,\partial y + xy\,\partial z = 0$$

Demzufolge muss sein:

$$p : q : r = yz : zx : xy$$

woraus mit Anwendung von (157) (156):

$$p = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{c}{3n}}; \quad q = \frac{1}{y}\sqrt{\frac{c}{3n}}; \quad r = \frac{1}{z}\sqrt{\frac{c}{3n}} \tag{159}$$

Differentiirt man die erste dieser Gleichungen, so kommt:

$$\frac{\partial x}{x} + \frac{\partial p}{p} + \frac{\partial n}{2n} = 0 \tag{160}$$

Variirt der Punkt (xyz) längs einer Krümmungslinie, so ist nach II. Gl. (19)

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y}=\frac{\partial r}{\partial z}=-\frac{l}{n}\sqrt{\frac{c}{3n}}=-\frac{l}{n}px$$

wo $l=\frac{n}{\varrho_1}\sqrt{\frac{3n}{c}}$ oder $\frac{n}{\varrho_2}\sqrt{\frac{3n}{c}}$. Hiernach wird Gl. (160)

$$\frac{n\partial x}{x}-lx\partial x+\tfrac{1}{2}\partial n=0$$

woraus nach Multiplication mit $y^2+z^2=3m-x^2$:

$$3mn\frac{\partial x}{x}-nx\partial x-l(y^2+z^2)x\partial x+\tfrac{1}{2}(y^2+z^2)\partial n=0$$

Addirt man die Analogen beider Gleichungen, so kommt:

$$\partial n=l\partial m;\quad (2m-l)\partial n=n\partial m$$

woraus:

$$n=l(2m-l) \tag{161}$$

und nach Elimination von n:

$$l\partial m=2(l-m)\partial l$$

integrirt:

$$l^2(2l-3m)=u \tag{162}$$

Entsprechend den 2 Werten von l

$$l=m\pm\sqrt{m^2-n}$$

wie sie aus (161) hervorgehen, erhält man für jeden Punkt (xyz) 2 Werte der Constanten u, v, und die Gleichungen der 2 Scharen von Krümmungslinien werden nach Einführung in (162):

$$\left.\begin{aligned} m(2m^2-3n)+2(m^2-n)^{\frac{3}{2}}&=u\\ m(2m^2-3n)-2(m^2-n)^{\frac{3}{2}}&=v \end{aligned}\right\} \tag{163}$$

Um jetzt x, y, z in Parametern der Krümmungslinien u, v darzustellen, hat man nach einander die 2 kubischen Gleichungen zu lösen:

$$\left.\begin{aligned} m^3-3\left(\frac{u-v}{4}\right)^{\frac{2}{3}}m+\frac{u+v}{2}&=0\\ (x^2-m)^3-3\left(\frac{u-v}{4}\right)^{\frac{2}{3}}(x^2-m)&=\frac{u+v}{2}+c \end{aligned}\right\} \tag{164}$$

Die 3 Wurzeln der letztern sind x^2, y^2, z^2.

§. 59. **Dreifach orthogonales Flächensystem, dessen eine Schar asymptotische Flächen 3. Grades bilden.** Setzt man in den Gl. (163) (156) für die Constante c die Variabele w und für u, v die mit w variirenden u_1, v_1, so erhält man eine Schar asymptotischer Flächen

$w =$ const. und auf diesen, bei allein variirendem w, 2 Scharen Krümmungslinien, welche 2 Flächen $v =$ const. und $u =$ const. bilden. Letztere Flächen schneiden einander rechtwinklig; durch Bestimmung von u_1, v_1 kann man bewirken, dass sie auch die Fläche $w =$ const. rechtwinklig schneiden. Die Gleichungen der Flächen $u =$ const., $w =$ const. können wir schreiben:

$$M - u_1 = 0; \quad x^2 y^2 z^2 = w$$

wo M die linke Seite der ersten Gl. (163) bezeichnet. Dann verhalten sich die Richtungscosinus der Normale der Fläche $u =$ const. wie

$$\frac{\partial(M-u_1)}{\partial x} : \frac{\partial(M-u_1)}{\partial y} : \frac{\partial(M-u_1)}{\partial z}$$

und die der Fläche $w =$ const. nach (159) wie

$$\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}$$

folglich ist die Bedingung des rechtwinkligen Schnitts:

$$\frac{1}{x}\frac{\partial(M-u_1)}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial(M-u_1)}{\partial y} + \frac{1}{z}\frac{\partial(M-u_1)}{\partial z} = 0 \quad \text{oder}$$

$$\frac{\partial M}{\partial m}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial m}{\partial y} + \frac{1}{z}\frac{\partial m}{\partial z}\right) + \frac{\partial M}{\partial n}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial n}{\partial y} + \frac{1}{z}\frac{\partial n}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial u_1}{\partial w}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{z}\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

das ist nach den Werten (157) (156) von m, n, w:

$$\frac{\partial M}{\partial m} + 2\frac{\partial M}{\partial n} m = 3\frac{\partial u_1}{\partial w} n$$

Durch Differentiation findet man:

$$\frac{\partial M}{\partial m} = 3(2m^2 - n + 2m\sqrt{m^2 - n}); \quad \frac{\partial M}{\partial n} = -3(m + \sqrt{m^2 - n})$$

dies eingeführt giebt:

$$\frac{\partial u_1}{\partial w} = -1$$

integrirt, und nach Analogie:

$$u_1 = u - w; \quad v_1 = v - w$$

Demnach sind die Gleichungen der 3 orthogonalen Flächenscharen:

$$\left.\begin{aligned} m(2m^2-3n)+2(m^2-n)^{\frac{3}{2}}+x^2y^2z^2 &= u \\ m(2m^2-3n)-2(m^2-n)^{\frac{3}{2}}+x^2y^2z^2 &= v \\ x^2y^2z^2 &= w \end{aligned}\right\} \quad (165)$$

deren erste beiden vom 12ten Grade sind.

Anhang.

Uebersicht über die Probleme der Flächentheorie.

Im folgenden sollen diejenigen allgemeinen Probleme nebst ihren speciellen Lösungen zusammengestellt werden, welche im Laufe der vorstehenden Abhandlung zur Besprechung gelangt sind.

I. Darstellung der Schar orthogonaler Trajectorien einer gegebenen Schar von Linien.

Bedingung: $f=0$ §. 22. lineare Gleichung 1. Ordnung.

Specielle Lösungen

1) für die Fälle dargestellter Krümmungslinien s. Probl. II.
2) für die Fälle dargestellter Scharen Kürzester s. Probl. IV.
3) für die Fälle bekannter Abbildungsparameter s. Probl. V.

II. Darstellung des Systems der Krümmungslinien auf gegebener Fläche.

Bedingung: $f=0$; $F=0$ §. 23. höhere Gleichung 1. Ordnung.

Ohne Bedeutung auf Ebene und Kugel.

Lösung unmittelbar vorliegend

1) auf Abwickelbarer §. 34.
2) auf Rotationsfläche §. 46.

Gelöst 3) auf kleinster Fläche §. 42.

4) auf Fläche constanter Summe der Hauptkrümmungsradien §. 44.
5) auf Flächen 2. Grades §. 52.
6) auf der asymptotischen Fläche 3. Grades §. 58.

III. Darstellung des Systems asymptotischer Linien auf gegebener Fläche.

Bedingung: $E=0$; $G=0$ §. 28. höhere Gleichung 1. Ordnung.

Ohne Bedeutung auf abwickelbaren und positiv gekrümmten Flächen.

Gelöst 1) auf kleinster Fläche §. 43.

2) auf Fläche constanter Summe der Hauptkrümmungsradien §. 44.
3) auf Rotationsfläche §. 47.
4) auf Flächen 2. Grades §. 54.

IV. Darstellung des allgemeinen orthogonal geodätischen Systems auf gegebener Fläche.

Bedingung: $e = 1$; $f = 0$ §. 30. 31. höhere Gleichung 2. Ordnung.

Gelöst 1) auf Abwickelbarer (anwendbar auf Ebene) §. 35. 36.
2) auf Rotationsfläche §. 48.
3) auf Flächen 2. Grades §. 56.
4) specielles System von Kürzesten auf Mittelpunktsflächen bei bekannten Krümmungslinien auf der Urfläche.

V. Conforme Abbildung gegebener Fläche auf Ebene.

Bedingung: $e = g$; $f = 0$ §. 33.

Gelöst 1) für Abwickelbare §. 36. 37.
2) für Rotationsfläche §. 49.
3) für Flächen 2. Grades §. 57.

VI. Darstellung der allgemeinsten auf gegebener Fläche abwickelbaren Fläche.

Bedingung: e, f, g gegebene Functionen von u, v §. 17. System höherer Gleichungen 1. Ordnung.

Gelöst 1) auf der Ebene §. 36. 37.
2) Rotationsfläche auf Rotationsfläche §. 50.

VII. Darstellung des allgemeinsten dreifach orthogonalen Flächensystems.

Bedingung: $f_1 = 0$; $f_2 = 0$; $f_3 = 0$ §. 26. System linearer Gleichungen 1. und 2. Ordnung.

Specielles System
1) confocales System 2. Grades §. 53.
2) System asymptotischer Flächen 3. Grades, §. 59.

VIII. Darstellung der allgemeinsten Fläche in Parametern der Krümmungslinien für gegebene Indicatrix der Normale.

Bedingung: 1 lineare Gleichung 2. Ordnung §. 25. Gl. (27).

Gelöst für die Fälle, wo die rechte Seite der Gleichung verschwindet, d. i.
1) wenn die stereographische Projection der gegebenen Indicatrix aus 2 Kreisscharen,
2) aus einer Schar Gerader und paralleler Trajectorien besteht.

Schlussbemerkung.

Die Gestalt, welche der analytische Ausdruck der geometrischen Beziehungen durch die Wahl der Fundamentalgrössen gewonnen hat, zeigt wol deutlich, dass sich dieselben in unmittelbarster Weise den Elementen der Flächentheorie anschliessen. Ich brauche in dieser Hinsicht nur auf die Bedingungen der 3 Haupt-Liniensysteme hinzuweisen, deren jede von den Werten zweier Fundamentalgrössen abhängt. Hierzu kommt noch die Analogie zwischen den Grössen e, f, g und E, F, G, welche in vielen Relationen zu Tage getreten ist. Dass sich die Gleichungen für die Hauptkrümmungen einfacher in den H, H_1, J, J_1 ausdrücken, reicht nicht hin, diesen 4 Grössen den Vorzug im ganzen zuzusprechen; namentlich würde durch ihre Zugrundelegung die Anzahl um 1 vermehrt und die Handhabung mit einer primitiven Relation zwischen den 7 Grössen beschwert werden.

Manchen jedoch gefällt überhaupt eine Entscheidung a posteriori durch die Praxis nicht; hier ist es wichtig die Täuschungen zu enthüllen, denen vorausgehende principielle Bestimmungsgründe häufig verfallen. Von vorn herein wird man gewiss dem Gedanken gern zustimmen, die Flächentheorie mit der Curventheorie auf gemeinsame Basis zu stellen. In der Tat haben manche Bearbeiter der erstern ihre Fundamentalgrössen direct aus den Bestimmungsstücken der Curven auf den Flächen hervorgehen lassen. Wir wollen das Unternehmen nicht aus dem Erfolg beurteilen, der sich nicht gerade günstig stellt. Es ist ein principieller Grund, der ihm entgegensteht. Für die Flächentheorie kommt eine Rotation des begleitenden Axensystems um die Tangente in Anwendung, in der Curventheorie hingegen hat nur eine solche um die Hauptnormale Bedeutung. Dieser Unterschied bewirkt, dass, wenn man beide Theorien in ihren Fundamenten verketten will, jede der andern in der Entwickelung nur hinderlich ist. Das Unternehmen ist also, so sehr es auch bei oberflächlicher Betrachtung für sich einzunehmen geeignet sein mag, gegen die Natur der Sache gerichtet. Wir können zur Berichtigung der Gesichtspunkte der Leitung durch die Praxis nicht entbehren.

Die gegenwärtige Bearbeitung der Flächentheorie vermehrt in keinem Punkte den Umfang des Bekannten. Die Namen der Entdecker der einzelnen Theoreme und Lösungen sind nie genannt, weil sich dies nicht in der Kürze gleichmässig hätte durchführen lassen. Weder die Deductionen noch die Aufstellungsform sind der Leitung der Originalarbeiten gefolgt; an beide stellte der Zweck der Verbindung zu einem einheitlichen Ganzen schon zu bestimmte Forderungen.

Nachweis der Worterklärungen.

XVIII.

Ueber den Feuerbach'schen Kreis.

Von

Emil Hain.

I.

Die Seitenmitten und Höhenfusspunkte eines Dreiecks liegen auf einem Kreise, welcher der Feuerbach'sche Kreis genannt wird.

Sind ABC die Ecken, A' die Seitenmitten und H_a die Höhenfusspunkte des Dreiecks; so hat man in trimetrischen Punktcoordinaten:

$$\begin{array}{llll} A' \equiv & 0 & c & b \\ B' \equiv & c & 0 & a \\ C' \equiv & b & a & 0 \\ H_a \equiv & 0 & \cos\gamma & \cos\beta \\ H_b \equiv & \cos\gamma & 0 & \cos\alpha \\ H_c \equiv & \cos\beta & \cos\alpha & 0 \end{array}$$

wo a und α Seiten und Winkel des Urdreiecks bezeichnen.

Sind x_a die Coordinaten irgend eines Punktes des Feuerbachschen Kreises, so kann man setzen:

$$g_{aa}x_a^2 + g_{bb}x_b^2 + g_{cc}x_c^2 + 2g_{bc}x_bx_c + 2g_{ca}x_cx_a + 2g_{ab}x_ax_b = 0$$

Um die g_{aa} und g_{bc} zu bestimmen, führen wir die Werte für A' und H_a ein und erhalten:

$$g_{bb}c^2 + g_{cc}b^2 + 2g_{bc}bc = 0$$
$$g_{bb}\cos\gamma^2 + g_{cc}\cos\beta^2 + 2g_{bc}\cos\beta\cos\gamma = 0$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{g_{bb}}{g_{bc}} = -\frac{2b\cos\beta}{a}, \quad \frac{g_{cc}}{g_{bc}} = -\frac{2c\cos\gamma}{a}$$

Diese Ausdrücke berechtigen zur Aufstellung des Feuerbach'schen Kreises in der Form:

$$\Sigma a \cos\alpha x_a^2 - \Sigma a x_b x_c = 0$$

Ihre Richtigkeit wird durch Einführung der übrigen Werte der A' und H_a bestätigt.

II.

Um die Coordinaten des Mittelpunktes F des Feuerbach'schen Kreises zu finden, betrachten wir zunächst das Mittendreieck $A'B'C'$. Das Umkreiscentrum desselben ist F. Fällen wir von F auf $B'C'$ und BC Perpendikel, welche in A_1' und A_1 treffen; so ist:

$$A_1'F = \frac{r}{2}\cos\alpha, \quad A_1'F + FA_1 = \frac{F}{a}$$

$$FA_1 = \frac{F}{a} - \frac{r}{2}\cos\alpha = \frac{r}{2}\cos(\beta-\gamma)$$

wo α r F Winkel, Umkreisradius und Fläche des Urdreiecks bezeichnen. Man hat ferner:

$$\Sigma FA_1 = \Sigma\frac{F}{a} - \frac{r}{2}\Sigma\cos\alpha = \tfrac{1}{2}(\Sigma h_a - r - \varrho)$$

wo h_a die Höhen und ϱ den Inkreisradius des Urdreieckes bezeichnen. Für die Coordinatenwerte von F kann man den symmetrischen Factor der FA_1 ausscheiden, so dass:

$$F \equiv \cos(\beta-\gamma) \equiv \cos\alpha + 2\cos\beta\cos\gamma$$
$$\equiv bc(a^2b^2 + a^2c^2 + 2b^2c^2 - b^4 - c^4)$$

Der Feuerbach'sche Punkt ist also ein Symmetriepunkt 6. Dimension.

III.

Die vierfache Summe der Quadrate über den Verbindungsgeraden der Ecken eines Dreiecks mit dem Feuerbach'schen Punkt desselben ist gleich der Summe der Quadrate über den Seiten des Dreiecks vermehrt um das dreifache Quadrat über dem Umkreisradius desselben.

Es ist:

$$\overline{FA}^2 = \overline{FB'}^2 + \overline{AB'}^2 - 2\overline{FB'}.\overline{AB'}\cos FB'A$$

Man hat ferner:

$$FB' = \frac{r}{2}, \quad AB' = \frac{b}{2}.$$

$$\angle B'FC' = 2\alpha, \quad \angle FB'C' = 90^0 - \alpha, \quad \angle FB'A = 90^0 - \alpha + \gamma$$

Somit:

$$F\overline{A'}^2 = \frac{r^2 + b^2 + c^2 - a^2}{4}$$

$$4\Sigma F\overline{A}^2 = 3r^2 + \Sigma a^2$$

IV.

Der Feuerbach'sche Kreis geht durch die Mitten der oberen Höhenabschnitte.

Die Seitennormalen von A, dem Höhenschnitt H und der Mitte A_1 von AH sind:

$$A \equiv \frac{2F}{a} \qquad 0 \qquad 0$$

$$H \equiv 2r\cos\beta\cos\gamma \qquad 2r\cos\gamma\cos\alpha \qquad 2r\cos\alpha\cos\beta$$

$$A_1 \equiv \frac{F}{a} + r\cos\beta\cos\gamma \qquad r\cos\gamma\cos\alpha \qquad r\cos\alpha\cos\beta$$

Setzt man diese Werte für A_1 in die Gleichung des Feuerbach'schen Kreises ein und beachtet man die Ausdrücke:

$$\Sigma a\cos\alpha = \frac{2F}{r} = 2\Sigma a\cos\beta\cos\gamma$$

so erhält man:

$$\Sigma a\cos\alpha x_a^2 = \frac{F^2\cos\alpha}{a} + 3Fr\,\Pi\cos\alpha$$

$$\Sigma a x_b x_c = \frac{Fr\cos\alpha}{a}(b\cos\beta + c\cos\gamma) + 2Fr\,\Pi\cos\alpha$$

Liegt also A_1 auf der Peripherie des Feuerbach'schen Kreises, dann ist:

$$r\Pi\cos\alpha + \frac{F\cos\alpha}{a} = \frac{r\cos\alpha}{a}(b\cos\beta + c\cos\gamma)$$

Diese Gleichung geht über in:

$$r\cos\alpha + r\cos\beta\cos\gamma = \frac{F}{a}$$

$$AH + HH_a = AH_a$$

V.

Die Radical-Axe des Umkreises und des Feuerbach-schen Kreises ist die Harmonikale des Höhenschnittes.

Die Gleichung des Umkreises ist: $\Sigma a x_b x_c = 0$. Somit bezeichnet

$$\Sigma a \cos\alpha x_a^2 - \Sigma a x_b x_c + \lambda \Sigma a x_b x_c = 0$$

einen Kegelschnitt, der durch die Schnittpunkte des Umkreises und des Feuerbach'schen Kreises geht. Weil aber

$$\Sigma a \cos\alpha x_a^2 = \Sigma a x_a \Sigma \cos\alpha x_a - \Sigma a x_b x_c$$

so kann die vorhergehende Gleichung auch noch geschrieben werden:

$$\Sigma a x_a \Sigma \cos\alpha x_a - 2\Sigma a x_b x_c + \lambda \Sigma a x_b x_c = 0$$

Setzen wir nun $\lambda = 2$, so folgt:

$$\Sigma a x_a \Sigma \cos\alpha x_a = 0$$
$$\Sigma a x_a = 0 = \Sigma \cos\alpha x_a$$

Die erste dieser Gleichungen ist die der unendlich entfernten Geraden in der Ebene des Dreiecks, die zweite ist die Gleichung der Harmonikalen des Höhenpunktes; somit ist diese die Verbindungsgerade der beiden endlichen Schnittpunkte beider Kreise.

VI.

Der Ort der Punkte, deren Polaren in Bezug auf den Umkreis und den Feuerbach'schen Kreis einander parallel sind, ist die Centrale dieser Kreise. Zwei Gerade $\Sigma a_1 x_a = 0$ und $\Sigma a_2 x_a = 0$ sind einander parallel, wenn:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

Die Polare des Punktes ξ_a in Bezug auf den Kegelschnitt

$$\Sigma g_{aa} x_a^2 + 2\Sigma g_{bc} x_b x_c = 0$$

ist die Gerade:

$$\Sigma (g_{aa}\xi_a + g_{ab}\xi_b + g_{ac}\xi_c) x_a = 0$$

Somit sind die Polaren von ξ_a in Bezug auf den Umkreis und den Feuerbach'schen Kreis die Geraden:

$$\Sigma(b\xi_c+c\xi_b)x_a=0=\Sigma a_1 x_a$$
$$\Sigma(2a\cos\alpha\,\xi_a-b\xi_c-c\xi_b)x_a=0=\Sigma a_2 x_a$$

Der Ort der Punkte ξ_a, für welche diese Geraden einander parallel sind, ist die Curve:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 2a\cos\alpha\, x_a-a_1 & 2b\cos\beta\, x_b-b_1 & 2c\cos\gamma\, x_c-c_1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} bx_c+cx_b & cx_a+ax_c & ax_b+bx_a \\ 2a\cos\alpha\, x_a & 2b\cos\beta\, x_b & 2c\cos\gamma\, x_c \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$=\Sigma a'a''(a^2x_a^2-bcx_bx_c)=0$$

wo

$$a'=b^2-c^2,\qquad a''=b^2+c^2-a^2$$

Die Determinante wird hier Null für $x_a=\cos\beta\cos\gamma$ und $x_a=\cos\alpha$, weil in beiden Fällen zwei Zeilen gleich werden. Ausserdem ist für $x_a=bc$

$$\Sigma a'a''(a^2x_a^2-bcx_bx_c)=0$$

Folglich liegen der Höhenschnitt H, das Umkreiscentrum U und der Schwerpunkt S mit F auf dieser Curve, d. h. auf einer Geraden. Denn die andere Gerade, welche dieser Gleichung noch angehört, muss die unendlich entfernte der Dreieckebene sein. Man nennt jene die Euler'sche Gerade; ihre Form ist: $aa'a''$. Ferner ist aus den Formen

$$U\equiv\cos\alpha,\qquad F\equiv\cos\alpha+2\cos\beta\cos\gamma$$
$$S\equiv\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma,\qquad H\equiv\cos\beta\cos\gamma$$

ersichtlich, dass U und F, S und H zugeordnete harmonische Punkte sind.

Nach diesem ist also die betrachtete Curve ein System von zwei Geraden. Und zwar findet man:

$$\Sigma a'a''(a^2x_a^2-bcx_bx_c)=\Sigma aa'a''x_a\,.\,\Sigma ax_a$$

weil

$$b'b''+c'c''=a'a''$$

Nun gilt die Gleichung

$$\Sigma g_{aa}x_a^2+2\Sigma g_{bc}x_bx_c=0$$

für ein System von zwei Geraden, wenn:

$$\begin{vmatrix} g_{aa} & g_{ab} & g_{ac} \\ g_{ba} & g_{bb} & g_{bc} \\ g_{ca} & g_{cb} & g_{cc} \end{vmatrix} = \triangle = 0$$

In unserem Fall ist:

$$g_{aa} = 2a'a''a^2, \qquad g_{bc} = -a'a''bc$$

$$\triangle \equiv 3\Pi a'a'' - \Sigma a'^3 a''^3$$

Sind also abc die Seiten eines Dreiecks, so ist:

$$3\Pi(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2) = \Sigma(b^2-c^2)^3(b^2+c^2-a^2)^3$$

Wien, im Januar 1876.

XIX.

Miscellen.

1.

Ein Beitrag zur mechanischen Quadratur.

Zu meiner Abhandlung im 58. Bande N. VI. gebe ich noch einige Ergänzungen.

Nach §. 5. No. 5. ist

1) $$F = F_1 + \frac{1-12\lambda^2}{12} a_2 x^3$$

wegen No. 2. und No. 4. ist also auch:

2) $$\int_0^x f(x)\,dx = \frac{x}{2}(y_0 + y_2) + \frac{1-12\lambda^2}{12} a_2 x^3.$$

Da $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, so ist:

$$2a_2 x = f'(x) - f'(0)$$

mithin auch

3) $$\int_0^x f(x)\,dx = \frac{x}{2}(y_0 + y_2) + \frac{1-12\lambda^2}{12}(f'(x) - f'(0)) \cdot \frac{x^2}{2!}$$

Bezeichnen $y_0, y_2, y_4, y_6 \ldots y_{2n-2}, y_{2n}$ der Reihe nach die Functionswerte:

$$f\left(\frac{h}{2} - \lambda h\right), \quad f\left(\frac{h}{2} + \lambda h\right), \quad \ldots \quad f\left((2n-1)\frac{h}{2} - \lambda h\right),$$

$$f\left((2n-1)\frac{h}{2} + \lambda h\right),$$

so ergiebt sich, wenn $f(x)$ nach Potenzen von x entwickelbar ist, durch wiederholte Anwendung von No. 3. und zwar um so genauer, je kleiner h ist:

$$4)\int_0^{nh} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(y_0+y_2+y_4+y_6+\ldots y_{2n-2}+y_{2n}) + \frac{1-12\lambda^2}{12}(f'(nh)-f'(0))\frac{h^2}{2!}.$$

Für $\lambda=\frac{1}{2}$ und $\lambda=0$ ergeben sich die bekannten Formeln:

$$5)\int_0^{nh} f(x)\,dx = h(\tfrac{1}{2}f(0)+f(h)+f(2h)+\ldots + f(n-1)h)+\tfrac{1}{2}f(nh)) - (f'(nh)-f'(0))\frac{h^2}{12} \quad \text{und}$$

$$6)\int_0^{nh} f(x)\,dx = h(f\left(\frac{h}{2}\right)+f\left(\frac{3h}{2}\right)+f\left(\frac{5h}{2}\right)+\ldots + f\left((2n-1)\frac{h}{2}\right)) + (f'(nh)-f'(0))\frac{h^2}{24}.$$

Ist $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$ so hat man:

$$a_4.x=\frac{f'''(x)-f'''(0)}{4!},$$

es ist also der in §. 2. Nr. 2. für $\varDelta$ gegebene Ausdruck:

$$\varDelta=\frac{3-20(\lambda^2+\mu^2)+240\lambda^2\mu^2}{240}(f'''(x)-f'''(0))\frac{x^4}{4!}$$

und daher nach §. 2. No. 1.

$$7)\int_0^{x} f(x)\,dx = \frac{x}{24(\lambda^2-\mu^2)}((1-12\mu^2)(y_0+y_2)-(1-12\lambda^2)(z_0+z_2)) + \frac{3-20(\lambda^2+\mu^2)+240\lambda^2\mu^2}{240}(f'''(x)-f'''(0))\frac{x^4}{4!}$$

Für $\mu=0$ ergiebt sich die einfachere Formel

$$8)\int_0^{x} f(x)\,dx = \frac{x}{24\lambda^2}(y_0+2(12\lambda^2-1)y_1+y_2)+\frac{3-20\lambda^2}{240}(f'''(x)-f'''(0))\frac{x^4}{4!}.$$

Für $\lambda=\frac{1}{2}$ und $\lambda=\frac{1}{3}$ entstehen:

$$9)\int_0^{x} f(x)\,dx = \frac{x}{6}(f(0)+4f\left(\frac{x}{2}\right)+f(x))-\frac{2}{240}(f'''(x)-f'''(0))\frac{x^4}{4!}$$

und

$$10)\quad \int_0^x f(x)\,dx = \frac{x}{8}\left(3f\left(\frac{x}{6}\right) + 2f\left(\frac{x}{2}\right) + 3f\left(\frac{5x}{6}\right)\right)$$

$$+ \frac{\frac{7}{9}}{240}\left(f'''(x) - f'''(0)\right) \cdot \frac{x^4}{4!}.$$

Durch wiederholte Anwendung der Formeln No. 7. bis 10. erhält man Näherungswerte für $\int_0^{nh} f(x)\,dx$.

Um halbconvergente Reihen für das Integral in No. 4. zu erhalten, kann man setzen:

$$11)\quad \int_0^{nh} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_2 + y_4 + y_6 + \ldots y_{2n}) - \sum_{r>0} \frac{Ar}{(r+1)!}\,Ur\,h^{r+1}$$

worin $Ur = \left(\frac{d^r f(x)}{dx^r}\right)_{x=nh} - \left(\frac{d^r f(x)}{dx^r}\right)_{x=0}$ ist.

Wählt man zur Bestimmung der Coefficienten Ar für $f(x)$ den Ausdruck e^x, so ist:

$$\int_0^{nh} f(x)\,dx = e^{nh} - 1,$$

ferner

$$y_0 + y_2 + y_4 + y_6 + \ldots y_{2n}$$

$$= e^{\frac{h}{2} - \lambda h} + e^{\frac{h}{2} + \lambda h} + e^{\frac{3}{2}h - \lambda h} + e^{\frac{3}{2}h + \lambda h} + \ldots e^{(2n-1)\frac{h}{2} - \lambda h} + e^{(2n-1)\frac{h}{2} + \lambda h}$$

$$= (e^{-\lambda h} + e^{+\lambda h})e^{\frac{h}{2}}(1 + e^h + e^{2h} + \ldots e^{(n-1)h})$$

$$= (e^{\lambda h} + e^{-\lambda h})e^{\frac{h}{2}}\frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1}$$

$$= \frac{e^{\lambda h} + e^{-\lambda h}}{e^{\frac{h}{2}} - e^{-\frac{h}{2}}}(e^{nh} - 1)$$

$$= \frac{\mathfrak{Cos}\,\lambda h}{\mathfrak{Sin}\,\frac{h}{2}}(e^{nh} - 1) \quad \text{und}$$

$$\sum \frac{Ar}{(r+1)!}\,Ur\,h^{r+1} = (e^{nh} - 1)\sum \frac{Ar}{(r+1)!}\,h^{r+1}$$

Es ergiebt sich daher nach No. 11.

$$1 = \frac{h}{2}\frac{\mathfrak{Cos}\,\lambda h}{\mathfrak{Sin}\,\frac{h}{1}} - \Sigma\frac{Ar}{(r+1)!}h^{r+1} \quad r>0$$

und auch

12)
$$\Sigma\frac{Ar}{(r+1)!}h^{r+1} = 1+\frac{h}{2}\frac{\mathfrak{Cos}\,\lambda h}{\mathfrak{Sin}\,\frac{h}{2}}.$$

Da die rechte Seite eine gerade Function von h ist, so hat man auch

13)
$$\Sigma\frac{A_{2r-1}}{(2r)!}h^{2r} = 1+\frac{h}{2}\frac{\mathfrak{Cos}\,\lambda h}{\mathfrak{Sin}\,\frac{h}{2}} \quad r>0$$

Setzt man $\frac{h}{2}\frac{\mathfrak{Cos}\,\lambda h}{\mathfrak{Sin}\,\frac{h}{2}} = V$, so ist A_{2r-1} die $2r$te Ableitung von V für $h=0$.

Aus $h.\mathfrak{Cos}\,\lambda h = 2V\mathfrak{Sin}\,\frac{h}{2}$ ergiebt sich, wenn man die $(2r+1)$te Ableitung bildet und hierin $h=0$ setzt:

$$(2r+1)\lambda^{2r} = 2\left(1\cdot\frac{1}{2^{2r+1}}+(2r+1)_2\frac{A_1}{2^{2r-1}}+(2r+1)_4\frac{A_3}{2^{2r-3}}+\dots \right.$$
$$\left. +(2r+1)_{2r}\frac{A_{2r-1}}{2}\right)$$

oder auch:

14) $$(2r+1)(2\lambda)^{2r} = 1+(2r+1)_2 2^2 A_1+(2r+1)_4 2^4 A_3+\dots$$
$$+(2r+1)_{2r}2^{2r}A_{2r-1}.$$

Für $\lambda=\frac{1}{2}$ erhält man hieraus die Bernoulli'schen Zahlen mit abwechselnden Vorzeichen.

Es lässt sich V auch direct nach Potenzen von h entwickeln.

Aus
$$\frac{h}{2}\cdot\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\frac{h}{2}} = 1+\Sigma(-1)^r\frac{4^r-2}{4^r}\frac{B_{2r-1}}{(2r)!}h^{2r}; \quad r>0 \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{Cos}\,\lambda h = \Sigma\frac{\lambda^{2\varrho}h^{2\varrho}}{(2\varrho)!}$$

ergiebt sich durch Multiplication:

15) $$A_{2r-1} = \lambda^{2r}-(2r)_2\frac{4^1-2}{4}B_1\lambda^{2r-2}+(2r)_4\frac{4^2-2}{4^2}B_3\lambda^{2r-4}+\dots$$
$$+(-1)^r\frac{4^r-2}{4^r}B_{2r-1}.$$

Um die Abhängigkeit der A von λ anzudeuten, kann man statt A_{2r-1} auch $\underset{\lambda}{A_{2r-1}}$ setzen, es würde alsdann

$$\underset{\frac{1}{2}}{A_{2r-1}} = (-1)^{r+1} B_{2r-1} \quad \text{sein.}$$

Nach No. 11. ist nun

$$16) \quad \int_0^{nh} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_2 + y_4 + y_6 \dots y_{2n} - \Sigma \frac{\underset{\lambda}{A_{2r-1}}}{(2r)!} U_{2r-1} h^{2r}; \; r > 0$$

und

$$17) \quad \int_0^{nh} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(z_0 + z_2 + z_4 + z_6 \dots z_{2n}) - \Sigma \frac{\underset{\mu}{A_{2r-1}}}{(2r)!} U_{2r-1} h^{2r}.$$

Bezeichnet man die ersten Glieder der rechten Seiten in No. 16. und 17. durch F_1 und F_2 so ergiebt sich

$$18) \quad \int_0^{nh} f(x)\,dx = \frac{F_1(1-12\mu^2) + F_2(12\lambda^2-1)}{12(\lambda^2-\mu^2)}$$

$$-\frac{1}{12(\lambda^2-\mu^2)} \Sigma(\underset{\lambda}{A_{2r-1}}(1-12\mu^2) + \underset{\mu}{A_{2r-1}}(12\lambda^2-1))\, U_{2r-1} \frac{h^{2r}}{(2r)!} \quad r > 1$$

Der Rest beginnt also mit der vierten Potenz von h.

Es lässt sich leicht nachweisen, dass der Coefficient A_{2r-1} eine Bernoullische Function ist. Da

$$\frac{h}{2} \frac{\mathfrak{Cos}\, \lambda h}{\mathfrak{Sin}\, \frac{h}{2}} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{e^{(\frac{1}{2}+\lambda)h}}{e^h - 1} + \frac{e^{(\frac{1}{2}-\lambda)h}}{e^h - 1}\right]$$

ist, so hat man nach den vom Prof. Dr. Hoppe in seiner Differentialrechnung Capitel 8 gegebenen Definition der Bernoullischen Functionen:

$$\underset{\lambda}{A_{2r-1}} = F_{2r}(\lambda) = \tfrac{1}{2}(\varphi_{2r}(\tfrac{1}{2} + \lambda) + \varphi_{2r}(\tfrac{1}{2} - \lambda)),$$

also auch:

$$F_{2r}(\lambda + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}(\varphi_{2r}(1+\lambda) + \varphi_{2r}(-\lambda))$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned} \varphi_n(1-\lambda) &= (-1)^n \varphi_n(\lambda), \quad \text{also} \\ \varphi_{2r}(1+\lambda) &= \varphi_{2r}(-\lambda) \quad \text{mithin} \\ F_{2r}(\lambda+\tfrac{1}{2}) &= \varphi_{2r}(1+\lambda) \quad \text{und} \\ F_{2r}(\lambda) &= \varphi_{2r}(\lambda+\tfrac{1}{2}). \end{aligned}$$

Kiel im März 1876. **Ligowski.**

2.

Note über lineare Differential-Gleichungen.

Petzval stellt im 1. Bande seines Werkes „Integration der linearen Differential-Gleichungen" und zwar Seite 193 diejenige lineare Differentialgleichung 2ter Ordnung auf, deren allgemeines Integrale

$$y = C_1 e^{\int\varphi_1 dx} + C_2 e^{\int\varphi_2 dx} \tag{1}$$

ist, unter C_1 und C_2 willkürliche Constante und unter φ_1 und φ_2 beliebige Functionen von x verstanden.

Nach Petzval ist nämlich diese Differentialgleichung nachfolgende:

$$(\varphi_2 - \varphi_1)y'' - (\varphi_2^2 - \varphi_1^2 + \varphi_2' - \varphi_1')y' + (\varphi_2^2\varphi_1 - \varphi_1^2\varphi_2 + \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1\varphi_1')y = 0 \quad (2)$$

Ich will nun φ_1 und φ_2 specialisiren, und setze erstens:

$$e^{\int\varphi_1 dx} = e^{m\varphi(x)}, \quad e^{\int\varphi_2 dx} = e^{n\varphi(x)}$$

woselbst m und n constante Zahlen, und $\varphi(x)$ eine beliebige Function von x bezeichnet.

Hieraus folgen zunächst nachfolgende Gleichungen:

$$\int\varphi_1(x)dx = m\varphi(x), \quad \int\varphi_2 dx = n\varphi(x)$$

und sodann:

$$\varphi_1(x) = m\varphi'(x), \quad \varphi_2 = n\varphi'(x)$$

Setzt man diese Werte in (2), so erhält man eine Gleichung, die durch $n - m$ dividirt, folgende Gestalt hat:

$$\varphi'(x).y'' - [(m+n)\varphi'(x).\varphi'(x) + \varphi''(x)]y' + mn[\varphi'(x)]^3.y = 0 \quad (4)$$

deren allgemeines Integrale:

$$y = C_1 e^{m\varphi(x)} + C_2 e^{n\varphi(x)}$$

ist. Man überzeugt sich leicht, dass im Falle

$$m = n$$

ist, der Differentialgleichung:

$$\varphi'(x)y'' - [2m\varphi'(x)\varphi'(x) + \varphi''(x)]y' + m^2[\varphi'(x)]^3 y = 0$$

genüge geleistet wird durch

$$y = e^{m\varphi(x)}[C_1 + C_2\varphi(x)]$$

woselbst wieder C_1 und C_2 willkürliche Constante bedeuten.

Ich setze zweitens

$$e^{\int\varphi_1(x)dx} = [\psi(x)]^m, \quad e^{\int\varphi_2(x)dx} = [\psi(x)]^n$$

Nimmt man beiderseits die Logarithmen, so erhält man:

$$\int\varphi_1(x)\,dx = m\log\psi(x), \quad \int\varphi_2(x)\,dx = n\log\psi(x)$$

und wenn man differentirt, so erhält man:

$$\varphi_1(x) = \frac{m\psi'(x)}{\psi(x)}, \quad \varphi_2(x) = \frac{n\psi'(x)}{\psi(x)}$$

Durch Einführung dieser Werte in die Gleichung (2) erhält man nach einiger Reduction:

$$\psi(x)\,\psi(x)\,\psi'(x)\,y'' - \psi(x)\,[\psi(x)\,\psi''(x) + (m+n-1)\,\psi'(x)\,\psi'(x)]\,y' + mn[\psi'(x)]^3 y = 0 \quad (5)$$

Dieser Gleichung genügt also

$$y = C_1[\psi(x)]^m + C_2[\psi(x)]^n$$

unter $\psi(x)$ eine bestimmte Function von x und unter m und n constante Zahlen verstanden.

Setzt man $m = n$, so geht die Gleichung (5) über in:

$$\psi(x)\,\psi(x)\,\psi'(x)\,y'' - \psi(x)\,[\psi(x)\,\psi''(x) + (2m-1)\,\psi'(x)\,\psi'(x)]\,y' + m^2[\psi'(x)]^3 x = 0$$

und das Integrale dieser Gleichung ist:

$$y = [\psi(x)]^m . [C_1 + C_2 \log\psi(x)]$$

wenn wieder, wie früher, C_1 und C_2 willkürliche Constante bedeuten.

Wien, den 28. März 1876. **Simon Spitzer.**

3.

Beitrag zur Theorie der Cissoide.

Bezeichnen wir mit u_i die Cotangente des Winkels, welchen die Verbindungslinie eines Punktes der Cissoide i und des Coordinatenanfanges mit der x Achse einschliesst, so lassen sich die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Cissoide als rationale gebrochene Functionen des Parameters u_i ausdrücken *), nämlich:

---

*) Archiv d. Math. und Phys. 56. Teil pg. 144.

$$x = \frac{a}{1+u^2}$$
$$y = \frac{a}{u(1+u^2)} \tag{1}$$

Als Gleichung der Verbindungslinie zweier Punkte u_1, u_2 der Cissoide ergab sich uns:

$$u_1 u_2 (u_1 + u_2) y - (1 + u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2) x + a = 0.$$

Vier Punkte u_1, u_2, u_3, u_4 liegen auf einem Kreise, wenn sie der Bedingungsgleichung

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$$

genügen. Für einen Krümmungskreis ist $u_2 = u_3 = u_4 = u$, daher ist der Parameter des Schnittpunktes der Krümmungssehne $\overline{uu_1}$ gleich $-3u$, somit die Gleichung der Krümmungssehne

$$6u^3 y - (1 + 7u^2) x + a = 0 \tag{2}$$

Die Derivation dieser Gleichung nach u ergibt

$$u = \frac{7x}{9y} \tag{3}$$

und setzen wir diesen Wert für u in die Gleichung (2) ein, so erhalten wir nach einiger Umformung

$$y = \sqrt{\frac{343}{243}} \sqrt{\frac{x^3}{a-x}} \tag{4}$$

woraus folgt, dass „die Einhüllende der Krümmungssehnen der Cissoide, wieder eine Cissoide ist und zwar eine Affine der gegebenen“.

Prag, Februar 1876. K. Zahradnik.

Litterarischer Bericht

CCXXXV.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Zweiter Theil. Vom Anfange des XVII. bis Ende des XVIII. Jahrhunderts. Von Dr. Heinrich Suter. Mit zwei lithographirten Tafeln. Zürich 1875. Orell Füssli u. Co. 378 S.

Die Abfassung des Buches giebt als obersten Gesichtspunkt zu erkennen die Charakterisirung des Fortschritts der Wissenschaft in ihren verschiedenen Zweigen und Richtungen. Es ist keine Zusammenstellung der Litteratur und Biographie, in der man etwa jede Notiz nachschlagen könnte. Es berichtet nicht über die einzelnen Arbeiten und Facta als gesonderte Gegenstände, wenn es auch beispielsweise solche vorführt. Biographische Angaben finden sich, ausser dem jedesmal beigefügten Geburts- und Todesjahr, nur bei wenigen hervorragenden Autoren und nur in der Kürze vor. Vielmehr sind diejenigen Leistungen, welche von Folge für die fernere Zeit waren, die also eine Kette von Untersuchungen hervorriefen oder im Entwickelungsgang einen namhaften Fortschritt bezeichneten, ausschliesslicher Gegenstand der Darstellung. Doch, fern von einer Schilderung in allgemeinen Worten, bleibt diese Darstellung stets innerhalb der Materie der Doctrin, welcher die Auffassung des Verfassers nur den verbindenden Gedanken leiht. Dass irgend eine Partie überflüssig lang ausgesponnen wäre, wird man sicher nie finden; ein näheres Eingehen auf manche Arbeiten, auch solche die einen gewissen Ruf in neuster Zeit haben, würde man für wünschenswert erklären können; die Grenzen scheinen in dieser Beziehung so eng als möglich gezogen

zu sein; bei alledem bleibt es eine sehr anerkennenswerte Leistung, dass die Knappheit der Angaben nirgends Unbestimmtheit mit sich führt, nirgends Ergänzung vermissen lässt, um das Mitgeteilte für sich zum deutlichen Verständniss zu bringen; auch fehlt es innerhalb desselben nicht am litterarischen Nachweis. Der gegenwärtige zweite Teil des Werkes setzt den Standpunkt der Wissenschaft im Beginn des behandelten Zeitraums als bekannt voraus, und gruppirt die von da an neu hinzutretenden Entdeckungen in einer der Zeit ihrer Entstehung entsprechenden Reihenfolge. Als vor Descartes'sche werden bezeichnet die Logarithmen, die Inhaltsbestimmungen, die Tangenten der Curven, die Maxima und Minima, die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die Zahlentheorie, die Perspective. Es folgt dann die Cartesische Geometrie, die mathematischen Principien der Naturlehre, die Differentialrechnung. Von dieser an die Entwickelung des höhern Calculs, die Fortschritte der Mechanik, die einzelnen Zweige der reinen Analysis und Geometrie, endlich die Mechanik im 18ten Jahrhundert.

H.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo VIII. Roma 1875. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Der Inhalt der letzten 6 Hefte ist folgender.

7. Heft. B. Boncompagni, über einige Briefe von Evangelista Toricelli, von P. Marin Mersenne und von François du Verdus.

8. Heft. L. Am. Sédillot, grosse Herbstexecution, Briefe an Dr. Ferdinand Hoefer betreffend die mathematischen Wissenschaften der Indier und den Ursprung des Sanskrit.

9. bis 12. Heft. L. C. Béziat, das Leben und die Arbeiten von Johannes Hevelius.

Publicationsverzeichnisse im 8. 10. und 12. Heft. H.

Methode und Principien.

Die Naturgesetze und ihr Zusammenhang mit den Prinzipien der abstrakten Wissenschaften für Naturforscher, Mathematiker, Logiker, Philosophen und alle mathematisch gebildeten Denker. Von Dr. Hermann Scheffler. Erster Theil. Die Theorie der Anschauung oder die mathematischen Gesetze. Mit 26 Figurentafeln. Erste Lieferung. Mit 4 Figurentafeln. Leipzig 1876. Friedrich Förster. 460 S.

Der Verfasser legt sich das mathematische Gebiet, von dessen Inhalt er wol nur durch Lectüre mancherlei äusserliche Kenntniss erhalten hat, zurecht, setzt die Gegenstände gemäss seinem davon erhaltenen Eindruck in Beziehung und giebt den Beziehungen Namen. Der Vortrag ist durchweg imperatorisch absprechend, also wol für Unkundige bestimmt, die geneigt sind sich jedes Urteil dictiren zu lassen. Wissenschaftliche Ergebnisse wird man in dem ganzen voluminösen Buche nicht finden; doch muss man wol einräumen, dass die Abfassungsweise dem Geschmack und der Geistesrichtung zahlreicher Individuen, die sich heutzutage als Philosophen betrachten, entsprechen mag. H.

Leçons d'analyse infinitésimale. Par Paul Mansion, Docteur spécial en sciences mathématiques, Professeur à l'université de Gand. I. Objet de l'analyse infinitésimale. II. Propriété fondamentale des fonctions d'une seule variable ou théorème de Rolle. Gand, Ad. Hoste. Mons, H. Manceaux 1876. 30 S.

Die Schrift lässt etwas anderes erwarten als sie in der Tat bringt. Sie ist keine Grundlegung der Principien der Analysis, keine methodische Bearbeitung des Lehrstoffs, überhaupt kein Ganzes, sondern behandelt nur einzelne Partien aus den Elementen der Functionstheorie, und zwar gerade solche, die von Natur zu einfach sind um eines Aufwandes an Scharfsinn zum Verständniss zu bedürfen. Es wird zuerst der Grund, warum man in der Analysis Grössen als variabel betrachtet, an einigen Beispielen von Maximis und Minimis gezeigt, dann einiges zur Erklärung des Functionsbegriffs aufgeführt, dann die Namen, die Lebenszeit und Nationalität der Entdecker im Gebiete der Infinitesimaltheorie zusammengestellt. Jetzt folgen, ohne jede Erklärung in Betreff der unendlichen Grössen, der Grenzwerte und Differentialquotienten, mit unmittelbarer Anwendung dieser Be-Begriffe, die Sätze über Abhängigkeit des Wachsens der Functionen vom Vorzeichen der Differentialquotienten, schliesslich der Taylorsche Satz mit Beschränkung auf erste Ordnung. Es lässt sich daher nur annehmen, dass die vorliegenden abgesonderten Stücke eines Vortrags aus irgend welchen individuellen Motiven zur Publication ausgewählt sind. H.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Lehrbuch der Arithmetik für Untergymnasien, Unterrealschulen, Volksschullehrer-Seminarien und zum Selbstunterricht. Von Daniel Höhr in Schässburg. Erster Theil. (Für die erste und zweite Klasse). Hermannstadt 1876. S. Filtsch. 152 S.

Das Lehrbuch umfasst ausschliesslich das gemeine Rechnen mit discreten Zahlen ohne Anwendung von Buchstaben. Die Methode ist sichtlich auf Entwickelung und Inanspruchnahme des Selbstdenkens der Schüler eingerichtet. Sie macht zwar nirgends Gebrauch von dem formellen Ausdruck allgemeiner Sätze, Beweise und Gleichungen; gleichwol ist jede specielle Aufstellung beiden derart entsprechend, dass der Schüler im besondern Beispiel stets Schlüsse macht und Gleichungen löst. Der Schluss wird freilich stets zudictirt, doch finden die formellen Mittel der Evidenz Ersatz durch die Einfachheit der vorgeführten Fälle. Auf synthetischen Fortschritt durch Zusammensetzung aus gewonnenen Elementen und durch Schlussketten hat sich das Lehrbuch nicht eingelassen. In der Tat ist dies auch der Sachlage ganz gemäss; vor einem solchen Fortschritt muss der formelle Ausdruck eintreten, was über die gegenwärtigen Grenzen hinaus ein Ueberstreifen in die Algebra sein würde. Man kann nicht aus flüssigem Material ein Gebäude aufführen, aus Specialbetrachtungen ein System bilden, so Viele auch, angeregt durch Beispiele besonders begabter Geister, die ohne die formellen Hülfsmittel ihre Fähigkeiten zu bedeutender Höhe gesteigert haben, in die Illusion verfallen sind, als liesse sich durch eine dem entsprechende Methode ein gleiches oder noch mehr leisten, wie durch das gewöhnliche formelle Verfahren. Das Buch ist in 6 Abschnitte geteilt, die einzeln behandeln die Rechnungen mit Zahlenverbindungen mit Rücksicht auf Rechnungsvorteile, die Teilbarkeit ganzer Zahlen, die 4 Species in Brüchen, erst ohne, dann unter Veränderung der Brucheinheit, die Decimalbrüche, die einfachen Verhältnissrechnungen. Der Vortrag ist klar und leicht verständlich, auch im Sinne höherer Auffassung stets correct. Auf Erörterung der einzelnen Punkte in freier Form folgen Beispiele und Aufgaben, welche letztere indes eine besondere Aufgabensammlung nicht entbehrlich machen sollen, dann mitunter Regeln betreffend verschiedene Wege zu gleichem Resultat. H.

Inleiding tot de Studie der Stereometrie. Door Dr. C. J. Matthes, Hoogleeraar aan het Athenaeum Illustre te Amsterdam. Amsterdam 1876. C. G. van der Post. 32 S.

Die Schrift behandelt 30 Sätze nebst zugehörigen Folgerungen über die Stellung von 1, 2, 3 Ebenen und Geraden zu einander. Die Beweise sind ziemlich kurz gefasst, und der Fortschritt in der Betrachtung ein ziemlich schneller, so dass die Auffassung eben nicht leicht ist, insbesondere da sie nach 8, wol kaum zur Erklärung aller Gegenstände hinreichenden Definitionen durch keine weitere Erörterung unterstützt wird. Eine Ebene wird definirt durch die Bewegung einer Geraden bei unveränderter Richtung längs einer Senkrechten.

Hieran schliessen sich 7 Folgerungen ohne alle Angabe, wie sie daraus hervorgehen sollen. Jede würde für sich genug zu denken geben um nur zu entscheiden, ob sie wirklich daraus folgt. Die Figuren sind weiss auf schwarz in den Text gedruckt. H.

Zweiter Anhang zu der ebenen Geometrie. Von Oberstudienrath Dr. von Nagel, Ritter I. Cl. des k. württemb. Kronordens und des k. württemb. Friedrichsordens. Aufgaben zu Uebungen in geometrischen Berechnungen. Mit 10 Holzschnitten. Zweite neu bearbeitete Auflage. Ulm 1876. Wohler. 50 S.

Die vorliegenden Aufgaben verbinden die Anwendung geometrischer Sätze mit der Uebung im Rechnen und bieten namentlich rücksichtlich des letztern vortreffliche Gelegenheit, das Bewusstsein der Bedeutung und der Erfordernisse zu entwickeln. Die Einteilung schliesst sich allein der Geometrie an, während die arithmetischen Forderungen mannichfaltig sind. Demnach braucht der Schüler die Vorstellungen nicht zu wechseln und die anzuwendenden Sätze nicht weit zu suchen; dagegen ist der Rechnungsansatz und die zum Ziele führende Operation ganz seinem freien Urteil überlassen. Grosse Ansprüche an die Fähigkeiten werden in dieser Beziehung nicht gemacht; dass den Anforderungen auch tatsächlich entsprochen wird, kann man bei diesen Aufgaben sicher sein; gleichwol wird man wol einräumen, dass die Entwickelung des Urteils beim Rechnen oft sehr ein Bedürfniss ist. Da die meisten Aufgabensammlungen das entgegengesetzte Ordnungsprincip befolgen, indem sie Reihen von Beispielen für einerlei Operation aber aus vielerlei verschiedenen Sphären entnommen aufstellen, wo die Uebersetzung der Daten in die arithmetische Form oft die hauptsächlichste und durch Regeln und Anweisung kaum zu mindernde Schwierigkeit macht, wo demnach das Urteil über die Operation vorweggenommen ist, also eine Hauptübung ganz wegfällt, so nimmt in der Tat die gegenwärtige Aufgabensammlung eine sehr berechtigte, durch die übrigen noch nicht genügend vertretene Stellung ein. Die Zahlenwerte der Daten sind grösstenteils willkürlich gewählt, selten aus der Wirklichkeit entnommen, bisweilen theoretisch bestimmt. Auflösungen sind nicht dabei. Den Gesammtumfang der Sätze bildet die elementare Planimetrie. H.

Die Grundlehren der Stereometrie. Von A. Stegmann. Mit 265 Lehrsätzen und Aufgaben zur Uebung und 7 Figurentafeln. Kempten 1876. Jos. Kösel. 88 S.

Das Gegenwärtige ist die Fortsetzung der im vor. J. neu erschienenen „Grundlehren der ebenen Geometrie“ s. litt. Bericht 231. S. 30.

Dass auch auf diesem Felde die Darstellung sich nicht bloss an Vorgefundenes anlehnt, dass vielmehr der Verfasser zur Erfüllung der vielseitigen Anforderungen an correcten und concinnen Ausdruck, Strenge, systematische Ordnung, Uebersichtlichkeit und Einfachheit selbständig mitgewirkt hat, ist unverkennbar. Auch ist es nur zu billigen, dass er auf manche aus einseitigem Princip hervorgehende Neuerungen nicht eingegangen, sondern im ganzen bei der euklidischen Form geblieben ist. Dass aber in irgend einem Punkte eine sichtlich definitive Gestaltung gewonnen sei, die nicht weitere Besserung suchte, lässt sich von der vorliegenden Bearbeitung gewiss nicht sagen. Viele Dinge, jedes für sich von geringem Belang, sind augenfällig nicht so, wie man es verlangen muss. Warum steht Lehrs. 9. getrennt von Lehrs. 2., da doch beide im Grunde dasselbe sagen? Er musste directe Folgerung sein. Im Beweise zu Lehrs. 2. ist die Hülfslinie überflüssigerweise parallel angenommen. Ebenen werden wiederholt der Lage nach verschieden genannt; wodurch könnten sie sich denn sonst unterscheiden? Grössere Desideraten treten bei den Sätzen über den Inhalt der runden Körper und ihrer Oberflächen hervor. Die Cylinder- und Kegelfläche werden durch Rollen auf der Ebene bestimmt. Dies hat keine methodische Schwierigkeit, nur muss man vorher das Rollen ohne Gleiten am Kreise erklären. Hier aber ist auf die Bedingung des Nichtgleitens mit keinem Worte Rücksicht genommen, ja nicht einmal durch die Benennung, wie etwa Rollen, die Vorstellung auf die bestimmte Bewegungsart gelenkt, vielmehr heisst es Bewegung, bei der nach einander verschiedene Punkte zur Berührung kommen, wo also die Gleichheit der Flächenstücke gar nicht daraus folgt. Der Beweis ist demnach ganz lückenhaft. Bei der Bestimmung der Kugelzone soll die Höhe in eine so überaus grosse Anzahl gleicher Teile zerlegt werden, dass die Meridianbogen zwischen den entsprechenden Parallelkreisen und die zugehörigen Sehnen „für einander genommen werden dürfen“. In der Figur seien die Teilbogen „der Anschaulichkeit wegen grösser dargestellt“. Kann man den Schülern solche Albernheiten weiss machen wollen? Wie sich Deductionen, die auf unendlich kleiner Teilung beruhen, streng und einfach geben lassen, ist eine hinreichend bekannte Sache, dass man solche unzählige mal gerügte Fehler in neuen Lehrbüchern nicht mehr erwarten sollte. H.

Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit sechs Decimalstellen. Mit besonderer Rücksicht auf den Schulgebrauch bearbeitet von Dr. C. Bremiker, Professor und Sectionschef im Königl. Geodätischen Institut in Berlin. Vierte durchgesehene und verbesserte Stereotyp-Ausgabe. (Pr. 4,2 Mk.). Berlin 1876. Nicolai. 542 S.

Die Tafeln enthalten die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100000, die der Kreisfunctionen mit Winkelteilung bis auf 10 Secunden ohne Unterschied für kleine und grosse Winkel, die Additions- und Subtractionslogarithmen auf 3 Bruchstellen, neu berechnet, die Länge des Längengrades der Erde für jeden Breitengrad, den Logarithmus des Krümmungsradius der Erde, den Flächeninhalt des Vierecks zwischen 2 Meridianen und 2 Parallelkreisen, die Längen-, Flächen- und Körpermasse, Gewichtmasse, Münzgewichte und Gehalt in allen Ländern. Voraus geht eine ausführliche Anweisung zum logarithmischen Rechnen. Bei Empfehlung des Gebrauchs sechsstelliger Tafeln wird der Grund geltend gemacht, dass überhaupt keine Messung auf mehr als 6 Stellen genau sei, dass daher eine Rechnung mit 7 Stellen das Resultat nicht richtiger machte. Gerade dieser Umstand spricht aber vielmehr für Anwendung von 7 Stellen. Die Rechnung lässt sich relativ zu ihren Daten mit geringer Mühe bis zu beliebiger Genauigkeit führen. Es wäre Verschwendung der kostbaren und unersetzlichen Messungsresultate, wenn man die Messungsfehler mit den in letzter Stelle unvermeidlichen Rechnungsfehlern vermischen und dadurch die Unsicherheit vergrössern wollte. Mindestens eine Stelle mehr zu rechnen, als man genau angeben kann, wird sich stets empfehlen. Was die Empfehlung der vorliegenden Tafeln für den Schulgebrauch betrifft, so scheint dabei wol nur an solche Schulen gedacht zu sein, wo noch 7stellige eingeführt sind, was doch gewiss auf den wenigsten der Fall sein wird. Zum Erlernen der logarithmischen Rechnung sind 5 Stellen vollkommen ausreichend. Diese Zahl empfiehlt sich durch den wesentlich geringern Gesammtumfang der Tafeln. H.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Einleitung in die Lehre von den Determinanten und ihrer Anwendung auf dem Gebiete der niedern Mathematik. Zum Gebrauch an Gymnasien, Realschulen u. andern höhern Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht bearbeitet von Dr. Josef Dickmann, Oberlehrer am Königl. Gymnasium zu Essen. Essen 1876. G. D. Baedeker. 88 S.

Die gegenwärtige Bearbeitung der Determinantenlehre für den Schulgebrauch zeigt manche eigentümliche Seiten, deren Würdigung wol eine Frage von Interesse sein kann. Sie gehört zu denjenigen, welche ihren Ausgang im Speciellen nehmen, und zwar hat sie dies noch consequenter durchgeführt als die andern, hat aber den Hauptnachteil der Specialbetrachtung glücklich vermieden. Denn diese geht

hier nicht aus einem Annehmen an gewohnte Weisen der Schüler hervor, wodurch so häufig das Erlernen neuer Principien vereitelt wird; vielmehr ist durchgängig der specifische Charakter der Determinantentheorie gewahrt, und die specielle Deduction repräsentirt sichtlich die allgemeine. Gleichwol möchte auch so die Wahl der Methode nicht ganz gerechtfertigt sein. Die Allgemeingültigkeit des speciell erwiesenen Satzes wird verstanden, aber die der Determinantentheorie eigenen weitgreifenden, und doch so einfachen und durchschaulichen Schlussweisen kommen nicht zum Bewusstsein; die Deduction führt daran vorbei, und wenn sie auch, wie es teilweise geschehen ist, erwähnt werden, so können sie nicht so zur Beachtung gelangen, als wenn das allgemeine Resultat direct auf kürzestem Wege durch sie gewonnen würde. Der Verfasser räumt nun ein, dass vielleicht manche Herleitungen noch durch einfachere vertreten werden können. Haben wir hierbei nur solche im Sinn, die sich direct auf Determinanten $n$ter Ordnung anwenden lassen, so ist wol vor allen das Theorem der Multiplication ein Beispiel der Art, wo durch Auflösung zweier Gleichungssysteme das Product der Determinanten einfacher gefunden wird, als es hier geschieht. Doch auch die Addition gehört dahin; denn obwol man hier mit Anwendung der Unterdeterminanten sofort zum Ziele gelangt, so kann man auch ein gleiches ohne Reflexion auf dieselben durch ein Schlussverfahren erreichen, das für sich instructiv ist. Wie diese Beispiele, so deutet auch manches andre darauf hin, dass es dem Verfasser überhaupt wenig um Einfachheit zu tun war, dass ihn vielmehr vorgefasste Grundsätze davon zurückhielten. Die einfachen Methoden sind da, und brauchen nur gewählt zu werden; warum es nicht geschieht, ist im einzelnen nicht zu ersehen, aber auch die Tendenz, aus der es sich erklärt, erscheint ganz unmotivirt. Der Verfasser beruft sich im Vorwort auf die Zustimmung aller Schulmänner darin, dass die Determinantenlehre von den Permutionen unabhängig zu machen sei. Ob er irgend ein Urteil der Art aufzuweisen hat, möchte bezweifelt werden, doch liegt wenig daran, wenn es sich wie hier auf nichts gründet. Welchen Erfolg aber hatte die Vermeidung der Permutationen für die gegenwärtige Gestaltung der Doctrin? Die Definition der Determinanten musste bloss deshalb unvollständig aufgestellt, und in Betreff der Vorzeichenbestimmung auf später verwiesen werden, wo sie hernach doch durch Permutation geschieht. Hieraus konnte der Verfasser ersehen, dass seine Tendenz gegen die Natur der Sache gerichtet war. Die Permutation ist so eng mit dem Wesen der Determinanten verknüpft, dass mit ihrer Abtrennung der Auffassung ein Bedeutendes an Deutlichkeit entzogen wird. Auch die vom Verfasser erhobene Frage, an welcher Stelle die Determinantenlehre in den Schulcursus einzufügen sei, entscheidet sich in Anbetracht der Verwandtschaft des Gegen-

standes dahin, dass sie der Lehre von den Combinationen und Permutationen, welche ihre natürliche Vorbereitung bildet, unmittelbar zu folgen hat, mit dem doppelseitigen Gewinn, dass diese, bisher ein ziemlich heterogener Lehrgegenstand ohne recht ersichtlichen Zweck, sich dann erst in ihrer Fruchtbarkeit enthüllt, und ihrerseits die zur Auffassung der Determinantenbildung erforderliche ordnende Anschauung anbahnt. Die Antwort des Verfassers, welcher den Anschluss an die Lehre von den Gleichungen befürwortet, erledigt die Frage nicht. Wie und in welcher Classe sollen dann die Gleichungen getrieben werden, damit ein Anschluss möglich ist? Denn die gewöhnliche Methode, von der abzugehen noch kein Grund vorliegt, enthält nicht das mindeste, was auf Determinanten hindeutete.

Mit Verwerfung der Permutationen bevorzugt der Verfasser den Gebrauch der Unterdeterminanten in den Herleitungen der Sätze. Also wo man auch im ganzen operiren kann, soll man lieber zerspalten! Das heisst doch geradezu den Zweck der Determinanten annulliren, eine Einrichtung treffen und dafür sorgen, dass sie so wenig als möglich zur Geltung komme.

Einen grossen Teil der Schrift nimmt die Behandlung der Gleichungen der 4 niedrigsten Grade ein. Er steht in sehr geringer Verbindung mit der Determinantenlehre, scheint den pädagogischen Gesichtspunkt ganz zu vergessen und zeigt mehr den Charakter einer gelehrten Untersuchung. Doch auch in letzterer Eigenschaft lässt er Zweck und Ziel der vielen formellen Betrachtungen sehr im dunkeln. Was kann uns z. B. veranlassen, die 2 Formen, in denen sich die Auflösung einer quadratischen Gleichung nach x und $\frac{1}{x}$ darstellt, unter eine gemeinsame zu vereinigen? Hat es irgend einen Sinn, dass sie hier die allgemeinere genannt wird?

Den Schluss bilden Anwendungen der Determinanten auf die analytische Geometrie der Ebene. H.

Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. Vorlesungen von Bernhard Riemann. Für den Druck bearbeitet und herausgegeben von Karl Hattendorff. Mit in den Text eingedruckten Holzstichen. Zweite Auflage. Braunschweig 1876. Friedrich Vieweg u. Sohn. 328 S.

Da die in dieser Schrift dargelegte Methode von Dirichlet und Riemann hinreichend bekannt ist, so wird es genügen die Gegenstände zu nennen, über welche die Vorlesungen sich erstrecken. Nach einem historischen Ueberblick über die durch physikalische Fragen hervor-

gerufenen Untersuchungen der partiellen Differentialgleichungen werden zuerst die Principien der Theorie der bestimmten Integrale, dann die Theorie der Fourier'schen Reihen vorgetragen. Es folgen dann die Hauptsätze über die gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen und die Untersuchung der linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung, beide mit einigen Beispielen. Angewandt wird die Theorie auf die Wärmeleitung in homogenen festen Körpern, die Schwingungen elastischer Körper und die Bewegung der Flüssigkeiten. Die erste Frage wird gelöst für eine Anzahl verschiedener Grenzbestimmungen, erst bei linearer Beweguug, dann nach 3 Dimensionen. In Betreff der zweiten wird erst die Lösung für eine gespannte Saite, dann die allgemeine Theorie, dann die Lösungen für einzelne Grenzbestimmungen gegeben. In Betreff der dritten sind es die allgemeinen Bewegungsgleichungen, die Fortpflanzung der Schwingungen in einem incompressibeln Medium und die Bewegung eines festen Körpers in einer unbegrenzten incompressibeln Flüssigkeit, insbesondere die einer Kugel.

H.

Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3. Von Dr. Heinrich Weber, Professor an der Universität zu Königsberg. Berlin 1876. Georg Reimer. 4°. 184 S.

Diese gekrönte Preisschrift behandelt ein abgegrenztes Gebiet aus der Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3. Sie beginnt mit der Untersuchung der Bedingungen sechsfach periodischer Functionen, indem sie die 6 gleichzeitigen Perioden der 3 Argumente auf 3 gleichzeitige und eine gemeinsame Periode reducirt, führt dann die ϑ Functionen von 3 Argumenten ein und untersucht besonders ausführlich die Gruppirungen der Charackteristiken. Der 2te Abschnitt handelt von den algebraischen Functionen vom Geschlecht 3 und ihren Integralen, der 3te von den Abel'schen Functionen, der letzte enthält die Lösungen der 2 Fundamentalprobleme, des Riemannschen Problems und des Jacobi'schen Umkehrproblems. Abgesondert aus dem Zusammenhange würden einzelne Mitteilungen aus dem reichen Inhalt zu schwierig und unzureichend sein. H.

Geometrie.

Elemente der darstellenden Geometrie der ebenen und räumlichen Gebilde. Zunächst für Realschulen. Von Josef Streissler, Professor an der Staats-Oberrealschule und Privat-Docent an der k. k. Universität in Graz. Mit 324 Figuren und 8 Tafeln. Brünn 1876. Carl Winiker. 276 S.

Das vorliegende Lehrbuch bewahrt mehr den exact theoretischen Charakter als es wol sonst bei rein technischem Zwecke der Fall zu sein pflegt. Einesteils sind die Begriffe und Ausdrücke den wissenschaftlichen adäquat, anderntœils werden die theoretischen Kenntnisse in ziemlich grossem Umfang in Anspruch genommen und vorausgesetzt, so dass sich die Bestimmung kund giebt, die darstellende Geometrie auf den vollendeten allgemein theoretischen Cursus der Geometrie folgen zu lassen, den sie nur nach der ausschliesslich constructiven Seite hin weiter entwickelt. Auf einem solchen Standpunkt, wie er hier erreicht sein muss, stellt man indes auch Forderungen an den Lehrgang, in Bezug auf systematische Behandlung, regelrechten Fortschritt, sichtliche Zielpunkte und vollständige Auskunft über alle notwendigen Fragen. Hieran lässt es das Lehrbuch namentlich im Anfang, d. i. in dem vorbereitenden Abschnitt über graphische Operationen in der Ebene, sehr fehlen. Es findet sich kein Wort davon, was erlernt werden soll, welche technische Mittel zu Gebote stehen, und statt jeder Auskunft über das Verfahren nur die kurze Angabe dessen, was das Verlangte nach bekannten Sätzen der Geometrie sein muss. Wie man im allgemeinen eine Curve zeichnet, ist nirgends gesagt; dennoch wird die Construction der Evolute als Mittel zur Auffindung des Berührungspunkts einer Tangente aufgestellt. Allerdings kann man dies in verschiedenem Sinne rechtfertigen; nur sollte über den Sinn kein Zweifel sein. Bei den räumlichen Gebilden liegt die Aufgabe der Darstellung von selbst weit deutlicher vor. Hier sollte man meinen, könnte man nicht in Zweifel sein, welche Fragen von vorn herein zu beantwortet waren. Dennoch sucht man vergeblich nach den elementarsten Dingen, z. B. wie die 2 Projectionen einer Figur in der Zeichnung zu einander liegen sollen. Ueber sehr ausführlichen stereometrischen Betrachtungen wird ganz vergessen, was geschehen soll. Die behandelten Gegenstände sind die Orthogonalprojection der Raumgebilde auf einer, dann auf 2 Ebenen, Ortsveränderung der Raumgebilde, Aufgaben über die gegenseitigen Beziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen, Projectionen begrenzter Ebenen und ihre Merkmale, Strahlenflächen, die Prismenfläche, regelmässige Flächen, die Kegel- und Cylinderfläche, windschiefe Flächen, Rotationsflächen, Schattenconstructionen, perspectivi- Darstellung. H.

Astronomie und Meteorologie.

Der Einfluss der Himmelskörper auf Witterungsverhältnisse. Vortrag gehalten zu Nürnberg und München von Dr. Siegmund Günther. Nürnberg 1876. Hermann Ballhorn. 42 S.

Der Verfasser hat sichtlich Fleiss darauf verwandt recht vollständig und übersichtlich die Resultate zusammenzustellen und vorzuführen, welche auf Entscheidung über die bezeichneten Fragen gerichtet sind. Er teilt sich das Feld im voraus nach den Möglichkeiten ein, und zeigt, dass in der Tat kein denkbarer Causalnexus existirt, der nicht schon namhafte Nachforschungen erfahren hätte. Natürlich waren hier mehr negative als positive Ergebnisse zu berichten. Zu eigener begründeter Kritik war kein Raum, es musste genügen die Kritik der successiv erneuerten Untersuchung zur Geltung zu bringen, und sich dieser gemäss kurz zu erklären. Dem Vortrag angehängt ist der Nachweis der Litteratur nebst reichhaltigen Notizen über dieselbe. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXXXII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Günther, S., vermischte Unters. z. Gesch. d. mathemat. Wiss. 8. Leipzig, Teubner. 9 Mk.

— Ziele u. Resultate d. neueren mathemat. histor. Forschg. 8. Erlangen, Besold. 2 Mk. 80 Pf.

Harms, F., üb. d. Lehre v. Friedrich Heinrich Jacobi. 4. Berlin, Dümmler. 60 Pf.

Jahrbuch üb. d. Fortschritte d. Mathematik, hrsg. v. C. Ohrtmann, F. Müller, A. Wangerin. 6. Bd. J. 1874. 1. Hft. 8. Berlin, G. Reimer. 4 Mk. 80 Pf.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Bardey, E., methodisch geordnete Aufgabensammlg. üb. alle Theile d. Elementar-Arithmetik. 5. Afl. 8. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 70 Pf.

Löbe, M., Sammlg. v. Aufg. aus d. Arithmetik. 1. Hft. 2. Afl. 8. Leipzig, Brandstetter. 75 Pf.

Meyerhofer, R., mathemat.-techn. Lehr- u. Handb. 1. Thl. 1. Lfg. 8. Mannheim, Schneider. 75 Pf.

Thomae, J., Sammlg. v. Formeln, welche bei Anwendg. d. ellipt. u. Rosenhain'schen Functionen gebraucht werden. 4. Halle, Nebert. 3 Mk.

Voigtgast, H., Tafel z. Angabe d. Wochentages vom 1. Janr., v. Jahre 525 ab bis zum J. 1925 nach Christi Geburt. 8. Königsberg, Nürmberger. 75 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Du Bois-Reymond, P., Unters. üb. d. Convergenz u. Divergenz d. Fourier'schen Darstellungsformeln. 4. München, Franz. 4 Mk. 80 Pf.

Günther, S., d. independente Bildungsgesetz d. Kettenbrüche. 4. Wien, Gerold's S. 50 Pf.

Močnik, F., Manuale di aritmetica ad uso dei ginnasi inferiori. Ed. 5. Parte 1. 8. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 80 Pf.

Schmidt, J. P., die Elemente d. Algebra f. höhere Lehranst. 3. Afl. 8. Trier, Lintz. 3 Mk.

Winckler, A., üb. angenäherte Bestimmgn. 8. Wien, Gerold's S. 60 Pf.

Geometrie.

Hablützel, J. J., Lehrb. d. synthet. Geometrie. 2. Bd. 8. Leipzig, Mentzel. 2 Mk. 25 Pf.

Nagel, v., Lehrb. d, Stereometrie z. Gebr. bei d. Unt. in Gymnasial- u. höheren Realschulen. 4. Afl. 8. Ulm, Nübling. 1 Mk. 50 Pf.

Schurig, K., Elemente d. Geometrie. 2. Afl. 8. Plauen, Hohmann. 75 Pf.

Uth, K., Leitf. f. d. Unt. in d. Planimetrie. 8. Cassel, Fischer. 1 Mk.

Weyr, E., üb. d. Abbildg. e. rationalen Raumcurve 4. Ordnung auf e. Kegelschnitt. 8. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

Geodäsie und praktische Geometrie.

Lang, V. v., Construction d. Reflexionsgoniometers. 4. Wien, Gerold's S. 4 Mk.

Widder, M., Netze z. Anfertigen stereometr. Figuren. 2. Afl. 4. München, Kellerer. 35 Pf.

Mechanik.

Schulze, F., üb. d. Oscillation zweier nach d. Newton'schen Gesetze einander abstossenden Punkte, welche auf d. Peripherie e. Kreises zu bleiben gezwungen sind. 4. Jena, Deistung. 1 Mk.

Astronomie und Meteorologie.

Günther, S., d. Einfluss d. Himmelskörper auf Witterungs-Verhältnisse. 8. Nürnberg, v. Ebner. 50 Pf.

Jahrbuch, Berliner astronom., f. 1878 m. Ephemeriden d. Planeten (1) — (147) p. 1876. Red. v. W. Foerster & F. Tietjen. 8. Berlin, Dümmler. 12 Mk.

Vierteljahrsschrift d. astronom. Ges. Hrsg. v. E. Schönfeld & A. Winnecke. 11. J. 1876 .1. Hft. 8. Leipzig, Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.

Physik.

Böddicker, O., Erweitrg. d. Gauss'schen Theorie d. Verschlinggn. m. Anwendgn. d. Electrodynamik. 8. Stuttgart, Spemann. 5 Mk. 50 Pf.

Fortschritte, die, d. Physik i. J. 1871. 27. J. Red. v. B. Schwalbe. 2. Abth. 8. Berlin, G. Reimer. 11 Mk.

Kirchhoff, G., Vorlesgn. üb. mathemat. Physik. Mechanik. 3. Lfg. 8. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Lommel, E., üb. d. Interferenz d. gebeugten Lichtes. 4. Mitthlg. 8. Erlangen, Besold. 30 Pf.

Pfaundler, L., üb. Differential-Luftthermometer. Lex. 8. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 20 Pf.

Recknagel, G., Compendium d. Experimentalphysik nach Jamin's petit traité de physique. 5. Abth. 8. Stuttgart, Meyer & Z. 2 Mk. 40 Pf.

Reis, P., Lehrb. d. Physik. 3. Afl. 8. Leipzig, Quandt & H. 7 Mk. 50 Pf.

Rühlmann, R., Handb. d. mechan. Wärmetheorie. 3. Lfg. 8. Braunschweig, Vieweg & S. 5 Mk. 80 Pf.

Schriften d. physikal.-ökonom. Ges. zu Königsb. 16. J. 1875. 1. Abth. 4. Königsberg, Koch. p. 1. u. 2. Abth. 6 Mk.

Schulze, L. R., d. Buch d. physikal. Erscheinungen. Frei nach A. Guillemin. 7. u. 8. Lfg. 8. Leipzig, Frohberg. à 1 Mk.

Vermischte Schriften.

Annalen, mathemat. Hrsg. v. F. Klein u. A. Meyer. 10. Bd. (4 Hfte.). 1. Hft. 8. Leipzig, Teubner. prcplt. 20 Mk.

Herzog, E., Darstellg. d. Meter-Syst., Ableitg. d. Massgattgn. desselben u. deren Vergleichg. m. d. alten Mass-Syst. 8. Budapest. Leipzig, Haessel. 4 Mk.

Sitzungsberichte d. mathemat.-physikal. Classe d. k. b. Akad. d. Wiss. zu München. 1875. 3. Hft. 8. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Neunundfunfzigster Teil. Viertes Heft.

(Mit einer lithographirten Tafel.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1876.

XX.

Theorie der Kardioide.

Von

K. Zahradnik.

---

1. Die Kardioide *) ist eine Epicykloide, deren Erzeugungskreis denselben Halbmesser hat wie der feste Kreis. Ihre Gleichung ist:

$$(x^2+y^2)^2-4ax(x^2+y^2)=4a^2y^2. \qquad (1)$$

Aus dieser Gleichung erhellt, dass der Anfangspunkt der Coordinaten und die imaginären Kreispunkte Doppelpunkte (u. z. Spitzen) der Kardioide sind; demnach besitzt die Kardioide die Maximalzahl der Doppelpunkte, welche überhaupt eine Curve vierter Ordnung haben kann ohne in Curven niederer Ordnung zu zerfallen, ist somit vom Geschlecht Null, d. h. die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Curve lassen sich als algebraische rationale gebrochene Functionen eines Parameters von demselben Nenner darstellen. Als solcher Parameter ergibt sich der Halbmesser eines Kreises, der die Rückkehrtangente der Kardioide in ihrem reellen Rückkehrpunkte berührt **). Jeder Kreis schneidet die Kardioide in acht Punkten, hat aber die imaginären Kreispunkte mit derselben gemeinschaftlich, was für vier Durchschnittspunkte zählt, ferner geht er durch den reellen Rückkehrpunkt der Cardioide und berührt die Rückkehrtangente in diesem Punkte, was für drei Durchschnittspunkte zählt, zusammen sieben, somit erübrigt bloss ein Durchschnittspunkt, dessen Lage von der Grösse des Halbmessers des Kreises eindeutig abhängt.

---

*) Erschien in Weyr's „Archiv mathematiky a fisiky." Bd. 1. Prag 1875.

**) Diesen Parameter wendete zuerst Dr. Em. Weyr an in seiner Abhandlung „Lemniscate in rationaler Behandlung." K. böhm. Gesellsch. d. Wissenschaften. Prag 1873.

Die Gleichung des besagten Kreises lautet

$$x^2+y^2 = 2vy \tag{2}$$

wo v dessen Halbmesser bedeutet.

Führen wir für x^2+y^2 den Wert in die Gleichung (1) ein, so erhalten wir nach Unterdrückung des gemeinschaftlichen Factors y

$$v^2y - 2avx = a^2y$$

woraus

$$y = \frac{2av}{v^2-a^2}x. \tag{3}$$

Führen wir nun diesen Wert für y in die Gleichung (2), so erhalten wir nach Unterdrückung des gemeinschaftlichen Factors x

$$x\left(\frac{v^2+a^2}{v^2-a^2}\right)^2 = \frac{4av^2}{v^2-a^2}$$

woraus

$$x = \frac{4av^2(v^2-a^2)}{(v^2+a^2)^2} \tag{4}$$

und mit Rücksicht auf Gl. (3) ergibt sich

$$y = \frac{8a^2v^3}{(v^2+a^2)^2} \tag{5}$$

Diese Gleichungen nehmen eine einfachere Form an, wenn wir

$$v = \frac{a}{u} \tag{6}$$

setzen, wir erhalten so

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{4a(1-u^2)}{(1+u^2)^2} \\ y &= \frac{8au}{(1+u^2)^2} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

als die verlangte Gleichung der Kardioide.

Durchschnittspunkte einer Geraden mit der Kardioide.

2. Die Parameter der Durchschnittspunkte einer Geraden

$$mx+ny+1 = 0$$

mit der Kardioide erhalten wir, wenn wir für x und y die Werte aus Gl. (7) in die Gleichung der Geraden einführen, als Wurzeln nachstehender biquadratischen Gleichung:

$$u^4+(2-4am)u^2+8anu+(1+4am) = 0. \tag{8}$$

Zwei der Durchschnittspunkte bestimmen die Lage der Geraden, es müssen demnach zwischen den Parametern der Schnittpunkte zwei Relationen stattfinden, und diese ergeben sich aus Gl. (8). Sie sind

$$\begin{aligned} (u)_1 &= 0 \\ (u)_2 + (u)_4 &= 3 \end{aligned} \tag{9}$$

wo $(u)_k$ Combinationen der Parameter der Schnittpunkte $k$ter Classe bedeutet.

Für $u_3 = u_4 = u$ geht die Secante in eine Tangente über und die Gleichungen (9) nehmen dann nachstehende Form an:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= -2u \\ u_1 u_2 &= 3. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können wir durch nachstehende quadratische Gleichung ersetzen:

$$t^2 + 2ut + 3 = 0 \tag{10}$$

deren Wurzeln die Parameter u_1 und u_2 sind.

Die Gleichung (10) besagt uns, dass die Tangente in einem beliebigen Punkte der Kardioide dieselbe in weiteren zwei Punkten schneidet; dieselben sind entweder reell oder imaginär, je nachdem

$$u \gtrless \sqrt{3}$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (6), je nachdem

$$v \gtrless \frac{a}{\sqrt{3}}$$

ist. Diejenigen Punkte, welche den Parametern $u = \pm\sqrt{3}$ entsprechen, sind Grenzpunkte und sind bestimmt durch den Halbmesser $v = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$; sie sind Berührungspunkte der Doppeltangente, was wir später nachweisen werden.

Die Parameter der unendlich fernen Punkte der Kardioide ergeben sich aus der Gl. (7), wenn wir

$$(1 + u^2)^2 = 0$$

setzen; wir bekommen so

$$u = \pm i$$

zweimal, d. i. die unendlich fernen Punkte der Kardioide sind imaginär und wir können leicht erweisen, dass sie mit den unendlich fernen Kreispunkten zusammenfallen.

Aus Gl. (7) folgt

$$\frac{y}{x}=\frac{2u}{1-u^2}.$$

Für $u=\pm i$ geht diese Gleichung über in

$$\frac{y}{x}=\pm i,$$

was zu erweisen war.

Secante und Tangente.

3. Die Gleichung der Secante als der Verbindungslinie zweier Punkte $u_1 u_2$ der Kardioide ist:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{4a(1-u_1^2)}{(1+u_1^2)^2} & \frac{8au_1}{(1+u_1^2)^2} & 1 \\ \frac{4a(1-u_2^2)}{(1+u_2^2)^2} & \frac{8au_2}{(1+u_2^2)^2} & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Nach kurzer Umformung geht diese Determinante über, mit Beseitigung des gemeinschaftlichen Factors (u_1-u_2) in:

$$\begin{vmatrix} x & y & 4a \\ 1-u_1^2 & 2u_1 & (1+u_1^2)^2 \\ -(u_1+u_2) & 2 & u_1^3+u_1^2u_2+u_1u_2^2+u_2^3+2(u_1+u_2) \end{vmatrix}=0. \quad (11)$$

Für $u_1=u_2=u$ geht die Secante in eine Tangente über und wir erhalten so aus Gl. (11)

$$\begin{vmatrix} x & y & 4a \\ 1-u^2 & 2u & (1+u^2)^2 \\ -u & 1 & 2u^3+2u \end{vmatrix}=0.$$

Multipliciren wir die dritte Zeile dieser Determinante mit $2u$ und subtrahiren dann dieselbe von der zweiten Zeile, so erhalten wir

$$\begin{vmatrix} x & y & 4a \\ 1+u^2 & 0 & (1+u^2)(1-3u^2) \\ -u & 1 & 2u(1+u^2) \end{vmatrix}=0.$$

Hier können wir mit dem Factor $(1+u^2)$ kürzen und wir erhalten so die gesuchte Gleichung der Tangente:

$$(1-3u^2)x+u(3-u^2)y=4a. \quad (12)$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf u vom dritten Grade d. h. aus

einem beliebigen Punkte (xy) kann man zur Kardioide drei Tangenten legen, und die Parameter der Berührungspunkte sind die Wurzeln der Gl. (12) in Bezug auf u. Die Zahl der Tangenten von einem Punkte gibt uns die Classe der Curve; die Kardioide ist somit eine Curve vierter Ordnung und dritter Classe.

Die Richtungsconstante der Tangente ist nach Gl. (12)

$$A = -\frac{1-3u^2}{u(3-u^2)}.$$

Die Tangente ist zur X-Axe parallel, wenn

$$u = \frac{1}{\pm\sqrt{3}}$$

ist, steht senkrecht zu dieser Axe in den Punkten, deren Parameter

$$u = 0, \quad u = \pm\sqrt{3}$$

sind, und da die Gleichung der Tangente für beide letzten Werte sich nicht ändert, nämlich

$$x = -\frac{a}{2},$$

so ist ersichtlich, dass diese zwei Tangenten in eine zusammenfallen, nämlich in eine Doppeltangente, wie wir schon im Art. 2. erwähnt haben.

Asymptoten.

4. Die Asymptote ist eine Tangente im unendlich fernen Punkte der Curve; wir erhalten demnach die Gleichungen der Asymptoten der Kardioide, wenn wir in die Gleichung der Tangente die Parameter der unendlich fernen Punkte einführen. Aus den Gl. (7) folgt

$$u = \pm i$$

als Parameter der unendlich fernen Punkte, und zwar jeder dieser Werte zweimal. Führen wir nun diese Werte in die Gl. (12) ein, so erhalten wir

$$x \pm iy = a$$

als Gleichungen der Asymptoten. Dieselben sind imaginär, aber schneiden sich in einem reellen Punkte auf der X-Axe in der Entfernung a vom Anfangspunkte der Coordinaten, d. h. im Mittelpunkte des Grundkreises.

Normale.

5. Die Gleichung der Normale im Punkte u ist:

$$y - \frac{8au}{(1+u^2)^2} = \frac{u(3-u^2)}{1-3u^2}\left[x - \frac{4a(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\right]$$

oder nach einer kleinen Reduction:

$$[y(1-3u^2) - xu(3-u^2)](1+u^2)^2 + 4au(1+u^2)^2 = 0.$$

Diese Gleichung können wir mit dem gemeinschaftlichen Factor $(1+u^2)$, welcher von den imaginären Kreispunkten herrührt, teilen, und so erhalten wir als Gleichung der Normale:

$$(1-3u^2)y - u(3-u^2)x + 4au = 0. \tag{13}$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf u vom dritten Grade, woraus erhellt, dass man aus einem beliebigen Punkte (x, y) der Ebene der Kardioide an dieselbe drei Normalen fällen kann, und deren Fusspunkte ergeben sich als Wurzeln der Gleichung (13) in Bezug auf u.

Involutionskegelschnitt.

6. Die Tangente T im Punkte u der Kardioide schneidet dieselbe in ferneren zwei Punkten u_1, u_2; die Tangenten dieser Punkte T_1 und T_2 nennen wir zwei conjugirte Tangenten.

Für dieselben können wir sogleich nachstehende Sätze erwähnen, welche sich leicht beweisen lassen*).

Conjugirte Tangenten der Kardioide bilden eine quadratische Involution.

Jedes Paar conjugirter Tangenten bestimmt auf der Doppeltangente zwei Punkte, welche die Berührungspunkte der Doppeltangente harmonisch teilen.

Bewegt sich die Tangente T auf der Kardioide, so ändert der Punkt $(T_1 T_2)$ seine Lage und beschreibt einen Kegelschnitt, den Weyrschen Involutionskegelschnitt. Die Gleichung derselben können wir leicht ableiten. Die Coordinaten des Punktes $(T_1 T_2)$ seien x, y; dann sind die Parameter der Berührungspunkte der aus dem Punkte $(T_1 T_2)$ zur Kardioide gelegten Tangenten gegeben durch die Gleichung (Art. 3.)

$$u^3 + \frac{3x}{y}u^2 - 3u + \frac{4a-x}{y} = 0.$$

*) Grunert „Archiv für Math. und Phys." Bd. 58. pg. 30.

Zwischen den Wurzeln und Coefficienten dieser Gleichung bestehen aber nachstehende Relationen:

$$(u)_1 = -\frac{3x}{y} = u_1 + u_2 + u_3$$
$$(u)_2 = -3 = u_3(u_1 + u_2) + u_1 u_2$$
$$(u)_3 = -\frac{4a - x}{y} = u_1 u_2 u_3$$

Nun ist aber (Art. 2.)

$$u_1 + u_2 = -2u$$
$$u_1 u_2 = 3.$$

Führen wir diese Werte in die obige Gleichung, so erhalten wir:

$$2u - u_3 = \frac{3x}{y}$$
$$u_1 u_3 = 3$$
$$3u_3 = -\frac{4a - x}{y}.$$

Eliminiren wir aus diesen Gleichungen u und u_3, so erhalten wir:

$$5x^2 - 22ax - 27y^2 + 8a^2 = 0$$

als den verlangten Ort des Punktes $(T_1 T_2)$, nämlich eine Hyperbel. Ihre Gleichung vereinfacht sich, wenn wir den Mittelpunkt der Hyperbel zum Anfangspunkte der Coordinaten wählen, wir erhalten so

$$\left(\frac{x}{\frac{9}{5}a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a\sqrt{\frac{3}{5}}}\right)^2 = 1.$$

Der Involutionskegelschnitt bei der Kardioide ist eine Hyperbel, welche durch die Berührungspunkte der Doppeltangente hindurchgeht.

Kubische Involution.

7. Unter einer jeden Richtung können wir drei parallele Tangenten zur Kardioide ziehen. Diese Tangenten schneiden die Doppeltangente der Kardioide in einem vertauschfähigen Punkttripel, denn mit einem solchen der drei Punkte sind die übrigen zwei eindeutig bestimmt. Diese Punkttripel bilden auf der Doppeltangente eine kubische Involution.

Ein jedes solches Punkttripel B_1, B_2, B_3 besitzt die Eigenschaft, dass der mittlere Punkt B_2 die Entfernung der beiden anderen Punkte

B_1, B_2 in der Weise teilt dass sich die Entfernungen $\overline{B_1B_2}$, $\overline{B_2B_3}$ vom Mittelpunkte der Grundkreise unter einem Winkel von 60 Graden projiciren *).

Es ist nämlich die Richtungsconstante der Tangente:

$$\lambda = -\frac{1-3u^2}{u(3-u^2)}$$

Richten wir diese Gleichung nach den Potenzen von u ein, so erhalten wir:

$$u^3 + \frac{3}{\lambda}u^2 - 3u - \frac{1}{\lambda} = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung u_1, u_2, u_3 sind Parameter der Berührungspunkte der Tangenten, welche wir unter einem Winkel, dessen Tangente gleich λ ist, zur Kardioide gezogen haben. Die Tangenten sind demnach auch involutorisch, denn mit dem einen Berührungspunkte u sind vermöge der obigen Gleichung auch die übrigen zwei Berührungspunkte der zu Tu parallelen Tangenten gegeben. Die Relationen, welche zwischen den Parametern solcher drei Berührungspunkte bestehen, ergeben sich unmittelbar aus der obigen Gleichung, sie sind

$$(u)_1 + 3(u)_3 = 0$$
$$(u)_2 = -3$$

Lösen wir diese Gleichungen nach $(u_1 + u_2)$ und $u_1 u_2$ auf, so erhalten wir:

$$u_1 + u_2 = \frac{8u}{1-3u^2}$$

$$u_1 u_2 = \frac{u^2-3}{1+3u^2}$$

aus welchen wir die Gleichung

$$u_1 - u_2 = \frac{2(1+u^2)}{1-3u^2}\sqrt{3}$$

ableiten können. Dieser Gleichungen bedürfen wir zum Nachweise obengenannten Satzes.

Die Tangente im Punkte u der Kardioide schneidet die Doppeltangente im Punkte B. Verbinden wir diesen Punkt mit dem Mittel-

*) Siehe Dr. Em. Weyr: Grundzüge einer Theorie der cubischen Involutionen, Abhandlungen d. k. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. Prag 1874, sowie dessen „Ueber metrische Winkelrelationen der Cardioide" Sitzb. d. k. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. Prag.

punkte des Grundkreises C, so ist die Tangente des Winkels, den die Gerade BC mit der Abscissenaxe bildet, gleich $-u$, wie man sich leicht durch Rechnung überzeugen kann. Eine zur T_u parallele Tangente bestimmt auf der Doppeltangente den Punkt B_2, und die Tangente der Geraden $\overline{B_2C}$ mit der X-Axe ist gleich $-u_2$; ähnlich ist die Tangente der $\overline{B_3C}$ mit der X-Axe gleich $-u_3$. Bezeichnen wir nun den Winkel $B_3CB_2 = \delta$, so ist

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{u_2 - u_1}{1 + u_1 u_2}.$$

Führen wir die Werte für $u_2 - u_1$ und $u_1 u_2$ in diese Gleichung ein, so erhalten wir:

$$\operatorname{tg}\delta = \sqrt{3}$$

daher

$$\delta = 60^0.$$

Ebenso können wir dartun, dass der Winkel $B_2CB_1 = 60^0$, (oder dem Supplementarwinkel 120^0), woraus auch dasselbe für den Winkel B_1CB_3 folgt, womit der erwähnte Satz als bewiesen erscheint.

Evolute.

8. Die Anzahl der Normalen, die wir von einem Punkte auf die Curve fällen können, bestimmt die Classe ihrer Evolute, somit ist die Enveloppe der Normalen bei der Kardioide d. i. ihre Evolute der dritten Classe.

Die Normale N schneidet die benachbarte Normale N' in einem Punkte der Evolute; ist nun die Gleichung der Normalen (13)

$$(1 - 3u^2)y - (3 - u^2)ux + 4au = 0$$

so ist die Gleichung der benachbarten Normalen

$$6uy + (3 - 3u^2)x - 4a = 0. \tag{14}$$

Lösen wir nun diese zwei Gleichungen nach x und y auf, so erhalten wir die Coordinaten des Schnittpunktes

$$x = \frac{4a(1 + 3u^2)}{3(1 + u^2)^2} \qquad y = \frac{8au^3}{3(1 + u^2)^2} \tag{15}$$

als Gleichungen eines veränderlichen Punktes der Evolute der Kardioide, somit die Gleichung der Evolute selbst.

Wir erhalten ihre Gleichung in der Form von $F(x, y) = 0$, wenn

wir aus den Gleichungen (13) und (14) oder aus den Gleichungen (15) den veränderlichen Parameter u eliminiren. Zu diesem Behufe ordnen wir die Gleichungen (13) und (14) nach den Potenzen von u, und wir erhalten so

$$xu^3 - 3yu^2 + (4a - 3x)u + y = 0 \tag{16}$$

$$3xu^2 - 6yu + (4a - 3x) = 0 \tag{17}$$

Multipliciren wir die erste Gleichung mit drei und die zweite mit u, so erhalten wir durch Subtraction

$$-3yu^2 + 2(4a - 3x)u + 3y = 0 \tag{18}$$

eine Gleichung, welche uns die erste der zwei Gleichungen vollständig ersetzt. Eliminiren wir nun aus Gl. (17) und (18) den Parameter u, so erhalten wir

$$\begin{vmatrix} 3x & -6y & 4a-3x & 0 \\ 0 & 3x & -6y & 4a-3x \\ -3y & 2(4a-3x) & 3y & 0 \\ 0 & -3y & 2(4a-3x) & 3y \end{vmatrix} = 0.$$

Nach einfacher Umformung geht diese Determinante über in:

$$\begin{vmatrix} 2a & -3 & 4a-3x \\ (4a-3x)x - 3y^2 & 2a & 0 \\ 0 & 4a-3x & 3y^2 \end{vmatrix} = 0$$

oder aufgelöst:

$$12a^2y^2 + (x[4a - 3x] - 3y^2)([4a - 3x]^2 + 9y^2) = 0.$$

Diese Gleichung der Evolute können wir vereinfachen, wenn wir den Anfangspunkt der Coordinaten in den Doppelpunkt der Evolute verlegen, durch parallele Verschiebung der Y-Axe. Dies geschieht, wenn wir setzen

$$4a - 3x = 3\xi$$

und diesen Wert in die obige Gleichung einführen; wir erhalten so

$$(\xi^2 + y^2)^2 - \frac{4}{3}a\xi(\xi^2 + y^2) = \frac{4a^2y^2}{9}. \tag{19}$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der Gleichung der Kardioide, so erkennen wir, dass die Evolute der Kardioide wieder eine Kardioide ist, für welche der Radius des Grundkreises ein Drittel so gross ist, wie bei der gegebenen Kardioide.

Durchschnitte eines Kreises mit der Kardioide.

Die allgemeine Gleichung des Kreises lautet:

$$x^2+y^2-2px-2qy+m^2=0$$

wo

$$m^2=p^2+q^2-r^2.$$

Die Parameter der Schnittpunkte erhalten wir, wenn wir die Werte für x und y aus Gl. (7) in die Gleichung des Kreises einführen. Ordnen wir das Resultat der Substitution nach den Potenzen von u, so erhalten wir:

$$m^2u^4+(2m^2+8ap)u^2-16aqu+(16a^2-8ap+m^2)=0. \qquad (20)$$

Jeder Punkt schneidet die Kardioide ausser in den imaginären Kreispunkten in ferneren vier Punkten, deren Parameter die Wurzeln der Gleichung (20) sind. Aber schon drei Punkte bestimmen die Lage des Kreises, somit muss zwischen den Parametern der vier Schnittpunkte eine Relation stattfinden, welche uns angibt, wann vier Punkte der Kardioide auf einem Kreise liegen. Dieselbe erhellt schon aus der Gleichung (20), nämlich

$$(u)_1=u_1+u_2+u_3+u_4=0. \qquad (21)$$

Es ist dieselbe Bedingungsgleichung, auf welche wir bei der Cissoide*) gekommen sind, es gelten demnach jene Sätze, die wir unmittelbar aus dieser Gleichung für die Cissoide entwickelt haben, auch für die Kardioide, z. B.

Schneiden wir die Kardioide mit einem Kreise in den Punkten u_1, u_2, u_3, u_4, und durch die Punktepaare u_1, u_2 und u_3, u_4 legen wir zwei andere Kreise, welche die Kardioide in den Punkten v_3, v_4 resp. v_1, v_2 schneiden, so liegen diese neuen vier Schnittpunkte v_1, v_2, v_3, v_4 auf einem Kreise.

Krümmungskreis.

10. Wenn drei der Schnittpunkte zusammenfallen, das ist $u_2=u_3=u_4=u$, geht der Kreis durch drei benachbarte Punkte hindurch, wird zum Krümmungskreise. In diesem Falle geht die Gleichung (21) über in

$$u_1+3u=0. \qquad (22)$$

Vermittelst dieser Gleichung können wir den Krümmungshalbmesser in einem beliebigen Punkte der Kardioide construiren. Nach der

*) Siehe Archiv für Math. und Phys. 56. Bd. pg. 144.

Gleichung (6) ist $u = \frac{a}{v}$, wo v den Halbmesser des dem Punkte u entsprechenden Kreises bezeichnet. Führen wir den Wert für u in die Gleichung (22) ein, so erhalten wir

$$\frac{a}{v_1} + \frac{3a}{v} = 0$$

oder

$$v + 3v_1 = 0$$

woraus

$$v_1 = -\frac{v}{3}$$

Wir verbinden somit den Punkt u mit dem Anfangspunkt der Coordinaten O, und errichten in der Mitte B der Verbindungslinie $\overline{uO}$ eine Senkrechte, welche die Y-Axe im Mittelpunkte S des dem Punkte u entsprechenden Kreises schneidet, demnach ist $\overline{OS} = v$. Beschreiben wir nun einen Kreis vom Halbmesser gleich $\frac{1}{3}\overline{OS}$, der die Rückkehrtangente der Kardioide in ihrem Berührungspunkte berührt, und zwar auf derselben Seite, wo sich der Punkt u befindet, so erhalten wir u_1 als den Schnittpunkt des Krümmungskreises im Punkte u. Die Senkrechte im Mittelpunkte der $\overline{uu_1}$ schneidet die Normale des Punktes u im Mittelpunkte C des gesuchten Krümmungskreises und $\overline{Cu}$ ist der gesuchte Krümmungshalbmesser.

Bezeichnen wir den Punkt u_1 als dem Punkte u conjugirt, so können wir nachstehenden Satz aussprechen:

Die den Schnittpunkten eines Kreises mit der Kardioide conjugirte Punkte liegen wieder auf einem Kreise.

Aus der Gleichung (20) folgt:

$$m^2(u)_2 = 2m^2 + 8ap$$
$$m^2(u)_3 = 16aq$$
$$m^2(u)_4 = 16a^2 - 8ap + m^2.$$

Für einen Krümmungskreis gehen diese Gleichungen über in:

$$(u)_2 = -6u^2 = \frac{2m^2 + 8ap}{m^2}$$

$$(u)_3 = -8u^3 = \frac{16aq}{m^2}$$

$$(u)_4 = -3u^4 = \frac{16a^2 - 8ap + m^2}{m^2}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$m^2 = -\frac{16a^2}{3(1+u^2)^2},$$

$$p = \frac{4a(1+3u^2)}{3(1+u^2)^2} \tag{23}$$

$$q = \frac{8au^3}{3(1+u^2)^2}.$$

Vergleichen wir diese Gleichungen mit den Gleichungen (15), so sehen wir, dass sie gleich sind, was natürlich klar ist, da der geometrische Ort der Mittelpunkte der Krümmungskreise und die Enveloppe der Normalen einer Curve identisch sind.

Rectification der Kardioide.

11. Die Bogenlänge einer Curve ergibt sich nach der Formel

$$s = \int du \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}.$$

Bei der Kardioide haben wir

$$\frac{dx}{du} = -\frac{8au(3-u^2)}{(1+u^2)^3}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{8a(1-3u^2)}{(1+u^2)^3}$$

daher ist

$$\frac{ds}{du} = \frac{8a}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

woraus

$$s = 8a\int \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{8au}{\sqrt{1+u^2}} + C.$$

Nehmen wir das Integral in den Grenzen 0, ∞, so erhalten wir die halbe Bogenlänge der Kardioide, somit wird die ganze Bogenlänge sein

$$s = 2\left|\frac{8au}{\sqrt{1+u^2}}\right|_0^\infty = 16a.$$

Quadratur der Kardioide.

12. Die Fläche einer Curve ergibt sich nach der Formel

$$P = \int y dx$$

demnach für die Kardioide

$$P = -(8a)^2 \int \frac{(3-u^2)u^2\,du}{(1+u^2)^5}.$$

Setzen wir nun

$$J_{m,n} = \int^{*} \frac{u^m\,du}{(1+u^2)^n}$$

so können wir für den Flächenausdruck schreiben:

$$P = -(8a)^2 (3J_{2,5} - J_{4,5}) = -(8a)^2 J.$$

Nun ist

$$J_{m,n} = -J_{m-2,n} + J_{m-2,n-1}$$

$$J_n = \frac{1}{2(n-1)} \frac{u}{(1+u^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} J_{n-1}$$

somit

$$J = -4J_5 + 5J_4 - J_3.$$

Integriren wir in den Grenzen*) ∞, 0, so erhalten wir die halbe Fläche der Kardioide, demnach ist

$$J_n = \frac{2n-3}{2n-2} \Big|_{\infty}^{0} J_{n-1}$$

und für die Kardioide

$$J = \tfrac{1}{4} J_3 = \frac{3}{4.8} \Big|_{\infty}^{0} \operatorname{arctg} u$$

somit

$$J = -\frac{3}{4.8}\,\frac{\pi}{2}$$

und setzen wir diesen Wert in den Ausdruck für P, so erhalten wir

$$P = 3\pi a^2$$

und die Fläche der ganzen Kardioide gleich $6\pi a^2$.

Prag, Februar 1876.

*) Eigentlich müssen wir vom Punkte $u = \sqrt{3}$ bis $u = 0$ integriren und davon das Integral von $u = \sqrt{3}$ bis $u = \infty$ abziehen, wir erhalten somit $J = \int_{\sqrt{3}}^{0} - \int_{\sqrt{3}}^{\infty} = \int_{\infty}^{0}$.

XXI.

Pol und Polare des Dreiecks.

Von

Max Greiner.

Die Grundlagen nachstehender Entwicklungen bilden die bekannten Dreieckssätze:

Verbindet man einen beliebigen Punkt der Ebene mit den Ecken eines Dreiecks und zieht in diesen bezüglich der beiden Dreiecksseiten zu den Verbindenden die vierten harmonischen Linien, so treffen diese die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks in drei Punkten, die einer Geraden angehören. . . . . (1)

Schneidet man die Seiten eines Dreiecks mit einer beliebigen Transversalen und construirt auf jeder Seite bezüglich der Ecken des Dreiecks zu dem Schnittpunkte der Transversalen den vierten harmonischen Punkt, so gehen die Verbindungslinien dieser Punkte mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks durch einen und denselben Punkt. . . . . (2)

Zufolge dieser beiden Sätze entspricht somit bezüglich eines festen Dreiecks jedem Punkte der Ebene eine und nur eine Gerade und jeder Geraden ein und nur ein Punkt.

Es handelt sich nun zunächst darum, zwischen zwei solchen entsprechenden Gebilden eine Beziehung festzustellen. Seien die Gleichungen der festen Dreiecksseiten:

$$A = a_0x + a_1y + a_2z = 0$$
$$B = b_0x + b_1y + b_2z = 0$$
$$C = c_0x + c_1y + c_2z = 0$$

und $x_0 y_0 z_0$ die homogenen Coordinaten eines Punktes, für welchen die Gleichung der entsprechenden Geraden bestimmt werden soll, so ergeben sich zunächst für die Verbindungslinien dieses Punktes mit den Ecken des Dreiecks die Gleichungen:

$$B + \lambda C = 0; \quad C + \mu A = 0; \quad A + \nu B = 0$$

und da sie den Punkt $(x_0 y_0 z_0)$ enthalten, hat man:

$$B_0 + \lambda C_0 = 0; \quad C_0 + \mu A_0 = 0; \quad A_0 + \nu B_0 = 0$$

also sind ihre Gleichungen:

$$BC_0 - CB_0 = 0; \quad CA_0 - AC_0 = 0; \quad AB_0 - BA_0 = 0$$

Die Gleichungen ihrer vierten harmonischen Linien bezüglich der Dreiecksseiten sind demnach:

$$BC_0 + CB_0 = 0; \quad CA_0 + AC_0 = 0; \quad AB_0 + BA_0 = 0$$

Die dem Punkte $(x_0 y_0 z_0)$ entsprechende Gerade muss aber nach Satz (1) durch die Schnittpunkte dieser vierten harmonischen Linien mit den Dreiecksseiten gehen, also muss ihre Gleichung zusammenfallen mit den drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 (BC_0 + CB_0) + \lambda_2 A &= 0 \\ \mu_1 (CA_0 + AC_0) + \mu_2 B &= 0 \\ \nu_1 (AB_0 + BA_0) + \nu_2 C &= 0 \end{aligned}$$

und somit ist:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \mu_1 C_0 = \nu_1 B_0 \\ \mu_2 &= \lambda_1 C_0 = \nu_1 A_0 \\ \nu_2 &= \lambda_1 B_0 = \mu_1 A_0 \end{aligned}$$

folglich:

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{B_0 C_0}{A_0}; \quad \mu_2 = \mu_1 \frac{A_0 C_0}{B_0}; \quad \nu_2 = \nu_1 \frac{A_0 B_0}{C_0}.$$

Führt man diese Werte von $\lambda_2 \mu_2 \nu_2$ in obige Gleichungen ein, so fallen die Gleichungen in die einzige zusammen:

$$AB_0 C_0 + BA_0 C_0 + CA_0 B_0 = 0$$

oder symbolisch:

$$P(0) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Hiermit ist für jeden Punkt der Ebene die Gleichung seiner entsprechenden Geraden festgestellt. In der Möglichkeit der Bestimmung der Grössen λ, μ, ν liegt zugleich auch eine Beweisführung des Satzes (1).

Es ist nun ferner zu untersuchen, wie es sich mit den sämmt-

lichen Punkten verhält, deren entsprechende Geraden durch einen festen Punkt gehen.

Sind $\alpha A+\beta B+\gamma C=0$ und $\alpha' A+\beta' B+\gamma' C=0$ die Gleichungen von irgend zwei Geraden, so stellt die Gleichung:

$$(\alpha+\lambda\alpha')A+(\beta+\lambda\beta')B+(\gamma+\lambda\gamma')C=0$$

eine Gerade dar, die durch den Schnittpunkt der gegebenen Geraden geht. Sei $(x_1 y_1 z_1)$ ihr entsprechender Punkt, so müsste nach (3) ihre Gleichung auch die Form haben:

$$AB_1C_1+BA_1C_1+CA_1B_1=0$$

und somit hat man:

$$kB_1C_1=\alpha+\lambda\alpha'$$
$$kA_1C_1=\beta+\lambda\beta'$$
$$kA_1B_1=\gamma+\lambda\gamma'$$

Durch Elimination der Grössen k und λ ergibt sich hieraus die Gleichung der Ortscurven des Punktes $(x_1 y_1 z_1)$

$$\begin{vmatrix} B_1C_1, & \alpha, & \alpha' \\ A_1C_1, & \beta, & \beta' \\ A_1B_1, & \gamma, & \gamma' \end{vmatrix}=0$$

Oder: $AB(\alpha\beta'-\alpha'\beta)+AC(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)+BC(\beta\gamma'-\beta'\gamma)=0$

Dreht sich also eine Gerade um einen festen Punkt, so beschreiben die entsprechenden Punkte für die zeitweiligen Lagen der Geraden einen Kegelschnitt, der dem festen Dreiecke umschrieben ist. . . (4)

Hat der feste Drehpunkt die Coordinaten $x_0 y_0 z_0$, so ist:

$$\alpha A_0+\beta B_0+\gamma C_0=0$$
$$\alpha' A_0+\beta' B_0+\gamma' C_0=0$$

woraus folgt:

$$A_0=\mu(\beta\gamma'-\beta'\gamma);\quad B_0=\mu(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha);\quad C_0=\mu(\alpha\beta'-\alpha'\beta)$$

Die Gleichung der Ortscurven wird also:

$$ABC_0+BCA_0+ACB_0=0$$

oder symbolisch:

$$\Pi(0)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Es gehört also zu jedem Punkte der Ebene ausser einer Geraden noch ein ganz bestimmter dem Dreieck umschriebener Kegelschnitt.

Sei nun $f(x,y,z)=0$ die Gleichung einer Curve dritter Ordnung, so stellen bekanntlich die Gleichungen:

$$xf'(x_0)+yf'(y_0)+zf'(z_0)=0 \quad \text{und}$$
$$x_0f'(x)+y_0f'(y)+z_0f'(z)=0$$

die erste und zweite Polare des Punktes $(x_0 y_0 z_0)$ bezüglich der Curve dritter Ordnung dar.

Betrachtet man nun das Dreieck als eine Curve der dritten Ordnung, deren Gleichung $f=ABC=0$ ist, so ergibt sich hierfür:

$$f'(x)=ABc_0+ACb_0+BCa_0$$
$$f'(y)=ABc_1+ACb_1+BCa_1$$
$$f'(z)=ABc_2+ACb_2+BCa_2$$

also gehen die Gleichungen der ersten und zweiten Polaren eines Punktes $(x_0 y_0 z_0)$ bezüglich des Dreiecks ABC gerade über in:

$$P(0)=0 \quad \text{und} \quad \Pi(0)=0$$

Man kann demnach die Gerade $P(0)$ die Polare und den Kegelschnitt $\Pi(0)$ den Polkegelschnitt des Punktes (0) bezüglich des Dreiecks nennen.

Mit Anwendung dieser Bezeichnungen lässt sich nun Satz (4) unter Berücksichtigung der Gleichung (5) in folgender Weise aussprechen:

Dreht sich eine Gerade um einen festen Punkt, so beschreibt ihr Dreieckspol den Polkegelschnitt dieses festen Punktes. . . . . . (6)

Ebenso gilt der umgekehrte Satz:

Durchläuft ein Punkt einen dem Dreiecke umschriebenen Kegelschnitt, so dreht sich seine Dreieckspolare um den Dreieckspol dieses Kegelschnitts. . . . . (7)

Sobald eines der entsprechenden Polgebilde des Dreiecks gegeben ist, so lassen sich die beiden andern unzweideutig sowohl auf analytischem Wege als auch constructiv ermitteln. Ist nämlich ein Punkt (0) gegeben, so kann man seine Dreieckspolare mit Hülfe des Satzes (1) construiren; zieht man alsdann durch den Punkt (0) irgend zwei Gerade und bestimmt hierfür nach Satz (2) die Dreieckspole, so ist durch diese und die Ecken des Dreiecks der Polkegelschnitt des Punktes (0) unzweideutig bestimmt.

Die Gleichungen der Polgebilde $P(0)$ und $\Pi(0)$ sind nach (3) und (5) von vornherein bekannt, sobald die Coordinaten des Punktes (0) gegeben sind.

Um zu einer gegebenen Geraden $P(0)$ den Dreieckspol und den Polkegelschnitt zu construiren, wendet man Satz (2) und das eben Erwähnte an. Ist die Gerade durch eine Gleichung:

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$$

gegeben, so braucht man nur zu berücksichtigen, dass im Falle Punkt $(x_0 y_0 z_0)$ ihr Dreieckspol sein soll, ihre Gleichung

$$AB_0 C_0 + BA_0 C_0 + CA_0 B_0 = 0$$

sein muss, folglich:

$$k\alpha = B_0 C_0 ; \quad k\beta = A_0 C_0 ; \quad k\gamma = A_0 B_0 \quad \text{oder}$$

$$\alpha A_0 = \beta B_0 = \gamma C_0$$

woraus sich die Coordinaten des Poles bestimmen lassen. . . . . (8)

Da nun $A_0 = \frac{\gamma}{\alpha} C_0$ und $B_0 = \frac{\gamma}{\beta} C_0$ ist, so geht die Gleichung (5) des Polkegelschnitts über in:

$$\alpha\beta AB + \alpha\gamma AC + \beta\gamma BC = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Ist der Polkegelschnitt gegeben, so ergibt sich constructiv sein Dreieckspol als Schnittpunkt der Dreieckspolaren irgend zweier Punkte desselben. Nach Satz (1) lässt sich dann hierzu die Dreieckspolare construiren.

Im Falle aber der Polkegelschnitt durch eine Gleichung von der Form

$$aBC + bAC + cAB = 0$$

gegeben ist, so folgt aus Gleichung (5):

$$ka = A_0 ; \quad kb = B_0 ; \quad kc = C_0 \quad \text{oder}$$
$$a : b : c = A_0 : B_0 : C_0$$

woraus die Coordinaten des Poles sich ergeben, während für die Gleichung seiner Polaren folgt:

$$Abc + Bac + Cab = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Hiermit ist der Zusammenhang der drei Polgebilde des Dreiecks genugsam erläutert.

Einen weiteren Aufschluss über die gegenseitige Lage der Polgebilde erhält man, wenn man von der Gleichung:

$$\Pi(0) = BCA_0 + ACB_0 + ABC_0 = 0$$

ausgeht und sich hieraus durch partielle Differentiation nach x, y, z die Gleichungen verschafft:

$$\Pi(0)'(x) = A(B_0 c_0 + C_0 b_0) + B(A_0 c_0 + C_0 a_0) + C(A_0 b_0 + B_0 a_0)$$
$$\Pi(0)'(y) = A(B_0 c_1 + C_0 b_1) + B(A_0 c_1 + C_0 a_1) + C(A_0 b_1 + B_0 a_1)$$
$$\Pi(0)'(z) = A(B_0 c_2 + C_0 b_2) + B(A_0 c_2 + C_0 a_2) + C(A_0 b_2 + B_0 a_2)$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit x_0, y_0, z_0 und addirt, so folgt:

$$x_0 \Pi(0)'(x) + y_0 \Pi(0)'(y) + z_0 \Pi(0)'(z)$$
$$= 2(AB_0C_0 + BA_0C_0 + CA_0B_0) = 2P(0)$$

folglich:

$$P(0) = x_0 \tfrac{1}{2}\Pi(0)'(x) + y_0 \tfrac{1}{2}\Pi(0)'(y) + z_0 \tfrac{1}{2}\Pi(0)'(z) = 0$$

Da aber der Ausdruck rechts nichts anderes als die Polare des Punktes (0) bezüglich des Kegelschnitts $\Pi(0)$ darstellt, so folgt:

Die Dreieckspolare eines Punktes ist zugleich die Polare dieses Punktes bezüglich seines Polkegelschnitts. . . . . (11)

Es sind also auch die Verbindungslinien des Poles mit den Schnittpunkten seiner Polaren und seines Polkegelschnitts Tangenten an diesen. . . . . (12)

Um die Gleichung der Tangente in irgend einem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ des Polkegelschnitts zu erhalten, multiplicire man obige drei Gleichungen der Reihe nach mit x_1, y_1, z_1, wodurch folgt:

$$x_1 \Pi(0)'(x) + y_1 \Pi(0)'(y) + z_1 \Pi(0)'(z) = 0 \quad \text{oder}$$
$$A(B_0C_1 + B_1C_0) + B(A_0C_1 + A_1C_0) + C(A_0B_1 + A_1B_0) = 0$$

Man hat also insbesondere für die Tangenten in den Eckpunkten des Dreiecks, da hierfür $C_1 = 0$ und $B_1 = 0$, oder $A_1 = 0$ und $C_1 = 0$, oder $A_1 = 0$ und $B_1 = 0$ sind, die Gleichungen:

$$BC_0 + B_0C = 0; \quad AC_0 + A_0C = 0; \quad AB_0 + A_0B = 0$$

Diese Gleichungen repräsentiren aber nach früherem die in den Dreiecksecken gezogenen vierten harmonischen Linien, welche, wie eben bewiesen, zugleich Tangenten des Polkegelschnitts sind. . . (13)

Sollte die Dreieckspolare eines Punktes diesen Punkt selbst enthalten, so müsste:

$$P_0(0) \equiv 0 \quad \text{oder} \quad 3A_0B_0C_0 \equiv 0$$

sein; dieser Bedingung genügen aber die sämmtlichen Punkte des Dreiecks, und es folgt:

Liegt der Pol auf einer der Dreiecksseiten, so ist seine Polare diese Dreiecksseite selbst. Es kann somit eine Gerade der Ebene nicht mehr als drei Punkte enthalten, deren Polaren durch diese Punkte selbst gehen, und diese sind die Schnittpunkte der Geraden mit den Dreiecksseiten. . . . . (14)

Soll der Polkegelschnitt in ein Linienpaar zerfallen, so hat man die Bedingungen:

$$\Pi(0)'(x) = 0$$
$$\Pi(0)'(y) = 0$$
$$\Pi(0)'(z) = 0$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Grössen A, B, C, so folgt:

$$\begin{vmatrix} B_0c_0+C_0b_0, & A_0c_0+C_0a_0, & A_0b_0+B_0a_0 \\ B_0c_1+C_0b_1, & A_0c_1+C_0a_1, & A_0b_1+B_0a_1 \\ B_0c_2+C_0b_2, & A_0c_2+C_0a_2, & A_0b_2+B_0a_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ oder}$$

$$A_0B_0C_0 \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Da aber die letzte Determinante nicht Null sein kann, solange die Dreiecksseiten sich nicht in einem und demselben Punkte schneiden, so bleibt die Bedingungsgleichung:

$$A_0B_0C_0 = 0$$

welche erläutert, dass nur den Punkten des Dreiecks selbst als Polkegelschnitte Linienpaare zukommen.

Liegt also der Pol (0) z. B. auf der Dreiecksseite A, so ist:

$$A_0 = 0$$

und somit die Gleichung des entsprechenden Polkegelschnitts

$$A(BC_0+B_0C) = 0$$

Es besteht demnach ein solches Linienpaar einerseits aus derjenigen Dreiecksseite, auf welcher der Pol liegt, und andrerseits aus der vierten harmonischen Geraden, die aus der gegenüberliegenden Dreiecksecke gezogen ist. (15)

Den Eckpunkten des Dreiecks entsprechen als Polkegelschnitte die durch sie gehenden Seitenpaare.

Es ist nun ferner zu untersuchen, wie es sich mit den Dreieckspolaren verhält, deren Pole sämmtlich einer Geraden angehören.

Seien $x_0y_0z_0$ und $x_1y_1z_1$ die homogenen Coordinaten irgend zweier Punkte, so sind $x_0+\lambda x_1$, $y_0+\lambda y_1$, $z_0+\lambda z_1$ die Coordinaten eines Punktes ihrer Verbindungslinie; die Gleichung seiner Dreieckspolaren ist somit:

$$A(B_0+\lambda B_1)(C_0+\lambda C_1)+B(A_0+\lambda A_1)(C_0+\lambda C_1)+C(A_0+\lambda A_1)(B_0+\lambda B_1)=0$$

oder

$$AB_0C_0 + BA_0C_0 + CA_0B_0$$
$$+ \lambda(A(B_0C_1 + B_1C_0) + B(A_0C_1 + A_1C_0) + C(A_0B_1 + A_1B_0))$$
$$+ \lambda^2(AB_1C_1 + BA_1C_1 + CA_1B_1) = 0$$

oder der Kürze halber:

$$u_{00} + \lambda u_{01} + \lambda^2 u_{11} = 0$$

Eliminirt man aus dieser und aus der nach λ differentiirten Gleichung:

$$u_{01} + 2\lambda u_{11} = 0$$

die Grösse λ, so ergibt sich als Gleichung der Umhüllungslinie sämmtlicher Dreieckspolaren, die den Punkten der Geraden (0, 1) entsprechen:

$$4u_{00}u_{11} - u_{01}^2 = 0$$

Sei

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$$

die Gleichung der Geraden (0, 1), so ist auch

$$\alpha A_0 + \beta B_0 + \gamma C_0 = 0$$
$$\alpha A_1 + \beta B_1 + \gamma C_1 = 0$$

und somit:

$$k\alpha = B_0C_1 - B_1C_0; \quad k\beta = A_1C_0 - A_0C_1; \quad k\gamma = A_0B_1 - A_1B_0$$

Berücksichtigt man diese Gleichungen bei der Umformung der Gleichung

$$4u_{00}u_{11} - u_{01}^2 = 0$$

so folgt als Gleichung der Umhüllungslinie sämmtlicher Dreieckspolaren, die den Punkten der Geraden ($\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$) entsprechen:

$$\varphi = A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 + C^2\gamma^2 - 2AB\alpha\beta - 2AC\alpha\gamma - 2BC\beta\gamma \quad . \quad . (16)$$

Da aber die sämmtlichen Polaren der Punkte der gegebenen Geraden Tangenten dieser Curve φ sind, so müssen nach (14) auch die Dreiecksseiten selbst, als Polare der Schnittpunkte derselben mit der gegebenen Geraden, Tangenten der Umhüllungscurve sein; demnach folgt der zu (6) reciproke Satz:

Durchläuft der Pol eine Gerade, so berühren seine Dreieckspolaren einen dem Grunddreiecke einbeschriebenen Kegelschnitt. . . . . (17)

Betrachtet man die Gerade ($\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$) als die Polare des Punktes (0), so ist:

$$\alpha = kB_0C_0; \quad \beta = kA_0C_0; \quad \gamma = kA_0B_0$$

und somit:

$$\varphi(0) = A^2B_0^2C_0^2 + B^2A_0^2C_0^2 + C^2A_0^2B_0^2$$
$$- 2A_0B_0C_0(ABC_0 + BCA_0 + ACB_0) = 0 \quad . \quad . (18)$$

Da von einem Punkte aus an einen Kegelschnitt nicht mehr als zwei Tangenten gezogen werden können, so folgt zugleich der Satz:

Auf einer Geraden kann es nicht mehr als zwei Punkte geben, deren Dreieckspolaren durch einen und denselben Punkt gehen. . (19)

Denkt man sich zu den sämmtlichen Punkten einer Geraden G die Polkegelschnitte gezeichnet, so enthält nach (6) jeder derselben die sämmtlichen Pole der durch den jeweiligen Punkt der Geraden G gezogenen Geraden; somit enthält also jeder Kegelschnitt auch den Pol der Geraden G selbst, und da dieselben überdies noch durch die Ecken des Grunddreiecks gehen, so folgt der Satz:

Die Polkegelschnitte der Punkte einer Geraden bilden einen Kegelschnittbüschel, der zu Grundpunkten die Ecken des Dreiecks und den Pol der gegebenen Geraden hat. . . . . (20)

Da aber den Punkten der Geraden G zunächst Polaren entsprechen, die alle den Umhüllungskegelschnitt φ berühren, so folgt:

Die Polkegelschnitte der Tangenten eines dem Grunddreiecke einbeschriebenen Kegelschnitts φ bilden einen Kegelschnittbüschel, der zu Grundpunkten die Ecken des Dreiecks und den dem Kegelschnitte φ entsprechenden Punkt hat. . . . . (21)

Denkt man sich zu den Strahlen eines Strahlbüschels mit dem Mittelpunkte M die Umhüllungskegelschnitte φ gezeichnet, so bilden diese eine Kegelschnittschaar, deren Elemente notwendig die Polare des Punktes M zur Tangente haben müssen, wodurch sich der zu (20) reciproke Satz ergibt:

Die sämmtlichen Umhüllungskegelschnitte, welche den Strahlen eines Strahlbüschels entsprechen, berühren die Seiten eines Vierecks, das aus den Seiten des Grunddreiecks und den Polaren des Büschelmittelpunktes besteht. (22)

Die Pole der Strahlen des Strahlbüschels sind aber die den Umhüllungskegelschnitten entsprechenden Punkte und liegen nach (6) auf dem Polkegelschnitte des Büschelmittelpunktes; somit ergibt sich der zu (21) reciproke Satz:

Die Umhüllungskegelschnitte, die den Punkten eines dem Grunddreiecke umschriebenen Kegelschnitts entsprechen, berühren die Seiten des Grunddreiecks und die Polare des gegebenen Kegelschnitts. (23)

Verschafft man sich zu den vier einer Geraden angehörigen Punkten, deren Coordinaten:

$$x_0,\ y_0,\ z_0;\quad x_1,\ y_1,\ z_1;\quad x_0+\lambda x_1,\ y_0+\lambda y_1,\ z_0+\lambda z_1;$$
$$x_0+\mu x_1,\ y_0+\mu y_1,\ z_0+\mu z_1$$

seien, die Polkegelschnitte, so sind deren Gleichungen:

$$A_0BC + B_0AC + C_0AB = \Pi(0) = 0$$
$$A_1BC + B_1AC + C_1AB = \Pi(1) = 0$$
$$(A_0 + \lambda A_1)BC + (B_0 + \lambda B_1)AC + (C_0 + \lambda C_1)AB = \Pi(0) + \lambda\Pi(1) = 0$$
$$(A_0 + \mu A_1)BC + (B_0 + \mu B_1)AC + (C_0 + \mu C_1)AB = \Pi(0) + \mu\Pi(1) = 0$$

Auch aus diesen Gleichungen ist ersichtlich, dass die Polkegelschnitte der Punkte einer Geraden einen Kegelschnittbüschel bilden, ausserdem folgt aber noch, da das anharmonische Verhältniss der vier Punkte $\frac{\lambda}{\mu}$ ist, und das anharmonische Verhältniss der vier Kegelschnitte oder respective das ihren Tangenten in den Grundpunkten des Büschels ebenfalls $\frac{\lambda}{\mu}$ ist, der Satz:

Das anharmonische Verhältniss von irgend vier Punkten einer Geraden ist gleich dem anharmonischen Verhältnisse der entsprechenden Polkegelschnitte. . . . . (24)

Insbesondere sind auch die Polkegelschnitte von vier harmonischen Punkten in harmonischer Lage. . . . . (25)

Verbindet man den Pol (0) mit den Schnittpunkten der Polaren $P(0)$ und des Polkegelschnitts, so sind die beiden Verbindungslinien $U(0)$ und $V(0)$ nach (12) Tangenten des Polkegelschnitts $\Pi(0)$; somit hat man die Gleichung:

$$\Pi(0) = \lambda U(0)\, V(0) + \mu P^2(0)$$

Setzt man in dieser Gleichung statt xyz die Coordinaten des Pols, dann gehen $\Pi(0)$ und $P(0)$ über in $3A_0B_0C_0$, während $U(0)\,V(0)$ identisch Null wird, da beide Tangenten den Pol (0) enthalten; man hat also zur Bestimmung der Grösse μ die Gleichung:

$$3A_0B_0C_0 = \mu . 9A_0^2B_0^2C_0^2$$

$$\mu = \frac{1}{3A_0B_0C_0}$$

$$\lambda U(0)\, V(0) = \Pi(0) - \frac{P(0)^2}{3A_0B_0C_0}$$

somit ist die Gleichung des Tangentenpaares:

$$T(0) = 3A_0B_0C_0\, \Pi(0) - P(0)^2 = 0$$

oder umgeformt:

$$T(0) = A^2B_0^2C_0^2 + B^2A_0^2C_0^2 + C^2A_0^2B_0^2$$
$$- A_0B_0C_0(ABC_0 + ACB_0 + BCA_0) = 0 \quad . \; . \; . \; (26)$$

Da aber nach (18):

$$\varphi(0) = A^2B_0^2C_0^2 + B^2A_0^2C_0^2 + C^2A_0^2B_0^2 - 2A_0B_0C_0(ABC_0 + ACB_0 + BCA_0) = 0$$

so folgt:

$$\varphi(0) = T(0) - A_0B_0C_0\,\Pi(0) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (27)$$

Zufolge dieser Gleichung muss der Kegelschnitt $\varphi(0)$ durch die Schnittpunkte des Tangentenpaares $T(0)$ mit dem Kegelschnitte $\Pi(0)$ gehen; somit ist $T(0)$ selbst Tangentenpaar des Kegelschnitts $\varphi(0)$.

Es berührt demnach der Umhüllungskegelschnitt eines Punktes die Seiten des Grunddreiecks und den Polkegelschnitt dieses Punktes in den Schnittpunkten desselben mit seinen Dreieckspolaren. . . (28)

Die Dreieckspolare eines Punktes ist also die Kegelschnittspolare dieses Punktes sowohl bezüglich seines Polarkegelschnitts, als auch bezüglich des entsprechenden Umhüllungskegelschnitts. . . . . . (29)

Sind zwei Polkegelschnitte $\Pi(0)$ und $\Pi(1)$ mit ihren entsprechenden Polen (0) und (1) gegeben und denkt man sich für den Kegelschnitt $\Pi(0)$ die Polare des Punktes (1) und für den Kegelschnitt $\Pi(1)$ die Polare des Punktes (0) gezeichnet, so werden die Gleichungen dieser Polaren sein:

$$x_1\,\Pi(0)'(x) + y_1\,\Pi(0)'(y) + z_1\,\Pi(0)'(z) = 0 \quad \text{und}$$
$$x_0\,\Pi(1)'(x) + y_0\,\Pi(1)'(y) + z_0\,\Pi(1)'(z) = 0$$

Diese beiden Gleichungen fallen aber in die einzige zusammen:

$$A(B_0C_1 + B_1C_0) + B(A_0C_1 + A_1C_0) + C(A_0B_1 + A_1B_0) = 0$$

somit folgt:

Zeichnet man zu zwei beliebigen Punkten die Polkegelschnitte und zu jedem Punkte die Kegelschnittspolare bezüglich des ihm nicht entsprechenden Polkegelschnitts, so fallen die beiden Polaren in eine und dieselbe Gerade zusammen. . . . . (30)

In Bisherigem wurden nur die allgemeinen gegenseitigen Beziehungen zwischen den Lagen und Gleichungen der einzelnen Polgebilde erläutert, ohne dabei auf besondere Lagen derselben Rücksicht zu nehmen.

So kann man sich zunächst die Aufgabe vorlegen: Denjenigen Polkegelschnitt zu bestimmen, dessen Mittelpunkt sein entsprechender Dreieckspol ist.

Sei

$$\Pi(0) = ABC_0 + ACB_0 + BCA_0 = 0$$

die Gleichung des gesuchten Kegelschnitts, dessen Mittelpunkt und Dreieckspol zugleich der Punkt (0) sein soll, so hat man die Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}\Pi(0)'(x_0) = A_0B_0c_0 + A_0C_0b_0 + B_0C_0a_0 = 0$$
$$\tfrac{1}{2}\Pi(0)'(y_0) = A_0B_0c_1 + A_0C_0b_1 + B_0C_0a_1 = 0$$

und hieraus ergibt sich:

$$A_0 = \frac{k}{b_0c_1 - b_1c_0}; \quad B_0 = \frac{k}{c_0a_1 - c_1a_0}; \quad C_0 = \frac{k}{a_0b_1 - a_1b_0}$$

also folgt als Gleichung des gesuchten Kegelschnitts:

$$AB(b_0c_1 - b_1c_0)(c_0a_1 - c_1a_0) + AC(b_0c_1 - b_1c_0)(a_0b_1 - a_1b_0)$$
$$+ BC(c_0a_1 - c_1a_0)(a_0b_1 - a_1b_0) = 0$$

oder die symbolische Gleichung:

$$\Pi(s) = 0 \tag{31}$$

Für die Gleichung seiner entsprechenden Polaren folgt aber:

$$P(s) = A(b_0c_1 - b_1c_0) + B(c_0a_1 - c_1a_0) + C(a_0b_1 - a_1b_0) = 0 \tag{32}$$

Nun lässt sich aber leicht beweisen, dass die Gerade $P(s)$ nichts andres als die unendlich ferne Gerade der Ebene ist; denn sei

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$$

die Gleichung derselben, so müssen in ihr die Coefficienten von x und y Null sein; also:

$$\alpha a_0 + \beta b_0 + \gamma c_0 = 0$$
$$\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = 0$$

Durch Elimination der Grössen α, β, γ aus den drei letzten Gleichungen folgt nun die Gleichung der unendlich fernen Geraden:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$$

welche mit Gleichung (32) vollständig zusammenfällt.

Will man sich aber zur unendlich fernen Geraden $P(s)$ den Dreieckspol verschaffen, so hat man nach Satz (2) auf den Seiten des Grunddreiecks sich zu den Schnittpunkten der unendlich fernen Geraden bezüglich der Ecken des Dreiecks die vierten harmonischen Punkte zu zeichnen, die in diesem Falle die Mitten der Dreiecksseiten werden; die Verbindungslinien dieser Punkte mit den Gegen-

ecken des Dreiecks schneiden sich alsdann im gesuchten Pole, der hier nichts andres als der Schwerpunkt des Dreiecks ist. Somit folgt:

Der Dreieckspol der unendlich fernen Geraden ist der Schwerpunkt des Grunddreiecks; oder umgekehrt:

Die Dreieckspolare zu dem Schwerpunkte des Grunddreiecks ist die unendlich ferne Gerade. . . . . (33)

Diese Sätze sind gleichlautend mit denen über Kegelschnitte, da man den Schwerpunkt auch als den Mittelpunkt des Dreiecks ansehen kann.

Die Verbindungslinien der Ecken des Dreiecks mit den auf den Gegenseiten liegenden Schnittpunkten der unendlich fernen Geraden sind parallel diesen Gegenseiten und sind nach (13) die Tangenten des Polkegelschnittes $\Pi(s)$ in den Ecken des Dreiecks, weshalb der genannte Kegelschnitt der an Inhalt kleinste sein muss, der dem Dreiecke umschrieben werden kann. Hieraus folgt zugleich:

Der einem Dreiecke umschriebene Kegelschnitt vom kleinsten Inhalte hat den Schwerpunkt des Dreiecks zum Mittelpunkt. . . (34)

Die Gleichung des dem Schwerpunkte entsprechenden Umhüllungskegelschnittes wird:

$$\begin{aligned}\varphi(s) = {} & A^2(b_0c_1-b_1c_0)^2+B^2(c_0a_1-c_1a_0)^2+C^2(a_0b_1-a_1b_0)^2\\ & -2AB(b_0c_1-b_1c_0)(c_0a_1-a_0c_1)-2AC(b_0c_1-b_1c_0)(a_0b_1-a_1b_0)\\ & -2BC(c_0a_1-c_1a_0)(a_0b_1-a_1b_0)=0\end{aligned}$$

Mit Zuhülfenahme der Gleichungen (31) und (32) folgt hiefür die Gleichung:

$$P(s)^2-4\Pi(s)=0 \quad \text{oder:}$$
$$\Pi(s)-\tfrac{1}{4}P(s)^2=0$$

Nun ist aber $\frac{1}{4}P(s)^2$ eine constante Grösse, da $P(s)=0$ die Gleichung der unendlich fernen Geraden ist; somit ist der dem Schwerpunkte entsprechende Umhüllungskegelschnitt ähnlich seinem Polkegelschnitte und liegt ausserdem mit ihm ähnlich und concentrisch; hat also zum Mittelpunkte ebenfalls den Schwerpunkt des Dreiecks. . . . . . (35)

Für jede durch den Schwerpunkt des Grunddreiecks gehende Gerade ist der Umhüllungskegelschnitt eine Parabel, da unter den Tangenten dieses Kegelschnittes sich auch die Polare des Schwerpunktes oder die unendlich ferne Gerade befinden muss und diese nur Tangente einer Parabel sein kann. Da unter den Strahlen eines Strahlbüschels sich immer ein und nur ein Strahl befindet, der durch den Schwerpunkt des Dreiecks geht, so muss unter den Umhüllungskegel-

schnitten, die den Strahlen dieses Büschels entsprechen, sich immer eine und nur eine Parabel befinden. Sonach folgt unter Berücksichtigung des Satzes (22):

Unter den Kegelschnitten, welche die Seiten eines Vierecks berühren, befindet sich immer eine und nur eine Parabel.

Verlegt man aber den Büschelmittelpunkt des Strahlbüschels nach dem Schwerpunkt des Dreiecks, so entspricht jedem Strahle als Umhüllungskegelschnitt eine Parabel, die die Dreiecksseiten berührt.

Den sämmtlichen Punkten des dem Dreiecke umschriebenen kleinsten Kegelschnittes entsprechen als Polaren die durch den Schwerpunkt gehenden Strahlen und als Umhüllungskegelschnitte die sämmtlichen dem Dreiecke einbeschriebenen Parabeln. . . . . (36)

Den sämmtlich unendlich fernen Punkten der Ebene, die man als der unendlich fernen Geraden angehörig betrachten kann, entsprechen als Dreieckspolaren, die Tangenten des dem Grunddreieck umschriebenen kleinsten Kegelschnittes; und als Polkegelschnitte die sämmtlichen Kegelschnitte eines Büschels, der die Ecken des Grunddreiecks und dessen Schwerpunkt zu Grundpunkten hat. . . . . (37)

Will man nun den geometrischen Ort aller Punkte, deren Polkegelschnitte Parabeln sind, so braucht man blos für die Gleichung:

$$BCA_0 + ACB_0 + ABC_0 = 0$$

in welcher die Coefficienten von x^2, y^2 und xy die folgenden sind:

$$A_0 b_0 c_0 + B_0 a_0 c_0 + C_0 a_0 b_0$$
$$A_0 b_1 c_1 + B_0 a_1 c_1 + C_0 a_1 b_1$$
$$A_0 (b_0 c_1 + b_1 c_0) + B_0 (a_0 c_1 + a_1 c_0) + C_0 (a_0 b_1 + a_1 b_0)$$

die Bedingung aufzustellen:

$$4(A_0b_0c_0 + B_0a_0c_0 + C_0a_0b_0)(A_0b_1c_1 + B_0a_1c_1 + C_0a_1b_1) \\ - (A_0(b_0c_1 + b_1c_0) + B_0(a_0c_1 + a_1c_0) + C_0(a_0b_1 + a_1b_0))^2 = 0$$

Formt man diese Gleichung um, so ergibt sich als Gleichung des Ortes der Punkte (0) gerade:

$$\varphi(s) = 0$$

Den sämmtlichen Punkten des dem Dreiecke einbeschriebenen Kegelschnittes, der den Schwerpunkt des Dreiecks zum Mittelpunkte hat, entsprechen demnach als Polkegelschnitte Parabeln, welche dem Dreiecke umschrieben sind. . . . . (38)

Da aber eine Gerade der Ebene mit dem Kegelschnitte $\varphi(s)$ nicht

mehr als zwei Punkte gemein haben kann, so folgt unter Berücksichtigung des Satzes (20), dass sich in einem Kegelschnittbüschel nicht mehr als höchstens zwei Parabeln befinden können.

Den Punkten jeder Tangente des Kegelschnittes $\varphi(s)$ entsprechen also Polkegelschnitte, welche einen Kegelschnittbüschel bilden, der nur eine einzige Parabel enthält. (39)

Ein derartiger Kegelschnittbüschel hat aber zu Grundpunkten die Ecken des Dreiecks und den Dreieckspol der Tangente des Kegelschnittes $\varphi(s)$, welcher auf der unendlich fernen Geraden liegt; es gehört also nur einem Kegelschnittbüschel mit einem unendlich fernen Grundpunkte eine einzige Parabel an. . . . . (40)

Es ist nun von einiger Wichtigkeit, den Fall zu untersuchen, wenn der Pol in den Höhenschnittpunkt des Dreiecks rückt.

Die Gleichungen der Dreieckshöhen sind:

$$B(a_0c_0+a_1c_1)-C(a_0b_0+a_1b_1)=0 \quad (1)$$
$$C(a_0b_0+a_1b_1)-A(b_0c_0+b_1c_1)=0 \quad (2)$$
$$A(b_0c_0+b_1c_1)-B(a_0c_0+a_1c_1)=0 \quad (3)$$

Seien $x_0y_0z_0$ die Coordinaten des Höhenschnittpunktes, so folgt aus den Gleichungen (1) und (2)

$$B_0=C_0\frac{a_0b_0+a_1b_1}{a_0c_0+a_1c_1}, \quad A_0=C_0\frac{a_0b_0+a_1b_1}{b_0c_0+b_1c_1}$$

somit ist die Gleichung der Dreieckspolaren des Höhenschnittpunktes:

$$AB_0C_0+BA_0C_0+CA_0B_0=0 \quad \text{oder:}$$
$$A(b_0c_0+b_1c_1)+B(a_0c_0+a_1c_1)+C(b_0a_0+b_1a_1)=0$$

oder symbolisch:

$$P(h)=0 \quad . . . . (41)$$

Für die Gleichung des Polkegelschnittes, der dem Höhenschnittpunkte entspricht, folgt somit:

$$\Pi(h)=AB(b_0c_0+b_1c_1)(a_0c_0+a_1c_1)+AC(b_0c_0+b_1c_1)(a_0b_0+a_1b_1)$$
$$+BC(a_0c_0+a_1c_1)(a_0b_0+a_1b_1)=0 \quad . \; . \; (42)$$

Soll nun der geometrische Ort aller jener Punkte bestimmt werden, deren Polkegelschnitte gleichseitige Hyperbeln sind, so ist der Punkt (O) blos so zu wählen, dass in der Gleichung

$$ABC_0+ACB_0+BCA_0=0$$

die Summe der Coefficienten von x^2 und y^2 gleich Null wird, also:

$$(C_0a_0b_0+B_0a_0c_0+A_0b_0c_0)+(C_0a_1b_1+B_0a_1c_1+A_0b_1c_1)=0$$

oder:

$$A_0(b_0c_0+b_1c_1)+B_0(a_0c_0+a_1c_1)+C_0(a_0b_0+a_1b_1)=0$$

Der geometrische Ort der gesuchten Punkte ist somit die Höhenschnittspolare.

Den sämmtlichen Punkten der Höhenschnittspolare entsprechen also als Polkegelschnitte lauter gleichseitige Hyperbeln. . . . . (43)

Diese Hyperbeln müssen aber zufolge des Satzes (20) einen Kegelschnittbüschel bilden, der zu Grundpunkten die Ecken des Dreiecks und den Höhenschnittpunkt hat. Daraus ergibt sich zugleich:

Alle gleichseitigen Hyperbeln, die einem Dreiecke umschrieben sind, gehen sämmtlich noch durch einen vierten Punkt, nämlich durch den Höhenschnittspunkt dieses Dreiecks.

Unter den dem Grunddreiecke umschriebenen Kegelschnitten befindet sich insbesondere auch ein Kreis, dessen Gleichung erhalten wird, wenn man in der allgemeinen Gleichung für die dem Dreiecke umschriebenen Kegelschnitte:

$$\alpha BC+\beta AC+\gamma AB=0$$

den Coefficienten von xy gleich Null und die von x^2 und y^2 einander gleich setzt; folglich:

$$\alpha(b_0c_1+b_1c_0)+\beta(a_0c_1+a_1c_0)+\gamma(a_0b_1+a_1b_0)=0$$
$$\alpha b_0c_0+\beta a_0c_0+\gamma a_0b_0=\alpha b_1c_1+\beta a_1c_1+\gamma a_1b_1$$

Aus diesen beiden Bedingungsgleichungen folgt:

$$\alpha=\mu\begin{vmatrix} a_0c_1+a_1c_0, & a_0b_1+a_1b_0 \\ a_0c_0-a_1c_1, & a_0b_0-a_1b_1 \end{vmatrix}=\mu(a_0^2+a_1^2)(b_0c_1-b_1c_0)$$

$$\beta=\mu\begin{vmatrix} a_0b_1+a_1b_0, & b_0c_1+b_1c_1 \\ a_0b_0-a_1b_1, & b_0c_0-b_1c_1 \end{vmatrix}=\mu(b_0^2+b_1^2)(c_0a_1-c_1a_0)$$

$$\gamma=\mu\begin{vmatrix} b_0c_1+b_1c_0, & a_0c_1+a_1c_0 \\ b_0c_0-b_1c_1, & a_0c_0-a_1c_1 \end{vmatrix}=\mu(c_0^2+c_1^2)(a_0b_1-a_1b_0)$$

Somit erhält man als Gleichung des dem Dreiecke umschriebenen Kreises.

$$K=AB(c_0^2+c_1^2)(a_0b_1-a_1b_0)+AC(b_0^2+b_1^2)(c_0a_1-c_1a_0)$$
$$+BC(a_0^2+a_1^2)(b_0c_1-b_1c_0)=0$$

Die Coordinaten seines Mittelpunktes 0 ergeben sich aus den Gleichungen:

$$K'(x_0) = 0$$
$$K'(y_0) = 0$$

oder:

$$A_0(\beta c_0 + \gamma b_0) + B_0(\alpha c_0 + \gamma a_0) + C_0(\alpha b_0 + \beta a_0) = 0$$
$$A_0(\beta c_1 + \gamma b_1) + B_0(\alpha c_1 + \gamma a_1) + C_0(\alpha b_1 + \beta a_1) = 0$$

worin α, β, γ der Kürze halber wieder vorige Bedeutungen haben. Es werden somit:

$$A_0 = \lambda \begin{vmatrix} \alpha c_0 + \gamma a_0, & \alpha b_0 + \beta a_0 \\ \alpha c_1 + \gamma a_1, & \alpha b_1 + \beta a_1 \end{vmatrix} = \alpha\lambda \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ -\alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

$$B_0 = \lambda \begin{vmatrix} \alpha b_0 + \beta a_0, & \beta c_0 + \gamma b_0 \\ \alpha b_1 + \beta a_1, & \beta c_1 + \gamma b_1 \end{vmatrix} = \beta\lambda \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{vmatrix}$$

$$C_0 = \lambda \begin{vmatrix} \beta c_0 + \gamma b_0, & \alpha c_0 + \gamma a_0 \\ \beta c_1 + \gamma b_1, & \alpha c_1 + \gamma a_1 \end{vmatrix} = \gamma\lambda \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{vmatrix}$$

Substituirt man in diesen Ausdrücken die Werte für α, β, γ und reducirt, so hat man:

$$A_0 = \nu(a_0^2 + a_1^2)(b_0 c_0 + b_1 c_1)\varrho$$
$$B_0 = \nu(b_0^2 + b_1^2)(a_0 c_0 + a_1 c_1)\varrho$$
$$C_0 = \nu(c_0^2 + c_1^2)(a_0 b_0 + a_1 b_1)\varrho$$

wobei der den Grössen A_0, B_0, C_0 gemeinschaftliche Factor ϱ den Wert: $(b_0 c_1 - b_1 c_0)(c_0 a_1 - c_1 a_0)(a_0 b_1 - a_1 b_0)$ hat.

Für die Gleichung der Dreieckspolaren des Kreismittelpunktes M ergibt sich nun:

$$P(m) = \frac{A}{(a_0^2 + a_1^2)(b_0 c_0 + b_1 c_1)} + \frac{B}{(b_0^2 + b_1^2)(a_0 c_0 + a_1 b_1)} + \frac{C}{(c_0^2 + c_1^2)(a_0 b_0 + a_1 b_1)} \quad . \; . \; . \; (44)$$

und für die Gleichung des Polkegelschnittes, der dem Mittelpunkte des dem Dreiecke umschriebenen Kreises entspricht, hat man:

$$\Pi(m) = AB(c_0^2 + c_1^2)(a_0 b_0 + a_1 b_1) + AC(b_0^2 + b_1^2)(a_0 c_0 + a_1 c_1) + BC(a_0^2 + a_1^2)(b_0 c_0 + b_1 c_1) = 0 \quad . \; . \; (45)$$

Betrachtet man nun die Gleichungen der Polkegelschnitte:

$$\Pi(s), \quad \Pi(m), \quad \Pi(h)$$

welche beziehungsweise dem Schwerpunkte, dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises und dem Höhenschnittspunkte des Grunddreiecks entsprechen, so findet sich, dass:

$$\Pi(s) + \Pi(m) = \Pi(h) \text{ ist.}$$

Aus dieser Beziehung geht aber hervor, dass sich diese drei Kegelschnitte ausser in den Eckpunkten des Grunddreiecks noch in einem und denselben vierten Punkte schneiden. . . . . (46)

Es folgt also nach (20) der bekannte Satz:

In jedem Dreiecke gehören der Schwerpunkt, der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises und der Höhenschnittpunkt einer und derselben Geraden an.

Sei nun M der Mittelpunkt des dem Dreiecke umschriebenen Kreises, S der Schwerpunkt und H der Höhenschnittspunkt; seien ferner A_m, B_m, C_m; A_s, B_s, C_s; A_h, B_h, C_h die Werte von A, B, C die sich ergeben, wenn man in ihnen statt der Grössen x, y, z die Coordinaten der Punkte, M, S, H einsetzt, so wird die Gleichung der Geraden MSH:

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ A_s, & B_s, & C_s \\ A_h, & B_h, & C_h \end{vmatrix} = 0$$

Setzt man nun der Kürze halber:

$$b_0c_1 - b_1c_0 = \alpha, \quad c_0a_1 - c_1a_0 = \beta, \quad a_0b_1 - a_1b_0 = \gamma$$
$$b_0c_0 + b_1c_1 = \alpha_1, \quad c_0a_0 + c_1a_1 = \beta_1, \quad a_0b_0 + a_1b_1 = \gamma_1$$

so sind nach Früherem:

$$A_s = \frac{k}{\alpha}, \quad B_s = \frac{k}{\beta}, \quad C_s = \frac{k}{\gamma}$$

$$A_h = \frac{\lambda}{\alpha_1}, \quad B_h = \frac{\lambda}{\beta_1}, \quad C_h = \frac{\lambda}{\gamma_1}.$$

wodurch die Gleichung der Geraden MSH übergeht in:

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C \\ \beta\gamma, & \alpha\gamma, & \alpha\beta \\ \beta_1\gamma_1, & \alpha_1\gamma_1, & \alpha_1\beta_1 \end{vmatrix} = 0$$

oder in:

$$A\alpha\alpha_1(\gamma\beta_1-\gamma_1\beta)+B\beta\beta_1(\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma)+C\gamma\gamma_1(\alpha_1\beta-\alpha\beta_1)=0$$

Sei Punkt 0 nun der Pol der Geraden MSH, so hat man hiefür die Gleichungen:

$$A_0=\frac{\mu}{\alpha\alpha_1(\beta_1\gamma-\beta\gamma_1)};\quad B_0=\frac{\mu}{\beta\beta_1(\gamma_1\alpha-\gamma\alpha_1)};\quad C_0=\frac{\mu}{\gamma\gamma_1(\alpha_1\beta-\alpha\beta_1)}$$

Der Polkegelschnitt $\Pi(q)$, der dem unendlich fernen Punkte Q der Geraden MSH entspricht, geht zufolge (6) und (37) durch den Punkt 0 (als Pol der Geraden MSH) und durch den Schwerpunkt S des Grunddreiecks, so dass seine Gleichung wird:

$$\begin{vmatrix} AB, & AC, & BC \\ A_0B_0, & A_0C_0, & B_0C_0 \\ A_sB_s, & A_sC_s, & B_sC_s \end{vmatrix}=0$$

oder:

$$\begin{vmatrix} AB, & AC, & BC \\ \gamma\gamma_1(\beta\alpha_1-\beta_1\alpha), & \beta\beta_1(\gamma_1\alpha-\gamma\alpha_1), & \alpha\alpha_1(\beta_1\gamma-\beta\gamma_1 \\ \gamma, & \beta, & \alpha \end{vmatrix}=0$$

$$AB\alpha\beta((\alpha\beta_1+\alpha_1\beta)\gamma_1-2\alpha_1\beta_1\gamma)+AC\alpha\gamma((\alpha\gamma_1+\alpha_1\gamma)\beta_1-2\alpha_1\gamma_1\beta)$$
$$+BC\beta\gamma((\beta\gamma_1+\beta_1\gamma)\alpha_1-2\beta_1\gamma_1\alpha)=0$$

Nun ist aber:

$$\alpha\beta_1+\alpha_1\beta=-(c_0^2+c_1^2)\gamma$$
$$\alpha\gamma_1+\alpha_1\gamma=-(b_0^2+b_1^2)\beta$$
$$\beta\gamma_1+\beta_1\gamma=-(a_0^2+a_1^2)\alpha$$

Die Gleichung des Polkegelschnittes $\Pi(q)$ geht somit über in:

$$AB((c_0^2+c_1^2)\gamma_1+2\alpha_1\beta_1)+AC((b_0^2+b_1^2)\beta_1+2\alpha_1\gamma_1)+BC((a_0^2+a_1^2)\alpha_1$$
$$+2\beta_1\gamma_1)=0$$

Da aber nach (45):

$$AB(c_0^2+c_1^2)\gamma_1+AC(b_0^2+b_1^2)\beta_1+BC(a_0^2+a_1^2)\alpha_1=\Pi(m)=0$$

und nach (42):

$$AB\alpha_1\beta_1+AC\alpha_1\gamma_1+BC\beta_1\gamma_1=\Pi(h)=0$$

ist, so wird:

$$\Pi(q)=\Pi(m)+2\Pi(h)=0$$

Nach Vorigem ist aber

$$-\Pi(s)=\Pi(m)-\Pi(h)=0$$

Somit ist das anharmonische Verhältniss des Kegelschnittspaares $\Pi(m)$, $\Pi(h)$ zum Kegelschnittspaare $\Pi(s)$, $\Pi(q)$ gleich $-\frac{1}{2}$; und

folglich ist nach (24) auch das anharmonische Verhältniss der Punktpaare M, H und S, Q gleich $-\frac{1}{2}$; also:

$$(MHSQ) = -\tfrac{1}{2}$$

$$\frac{MS}{HS} : \frac{MQ}{HQ} = -\tfrac{1}{2}$$

Weil aber Q der unendlich ferne Punkt der Geraden MSH ist, so ist:

$$\frac{MQ}{HQ} = 1$$

und somit ergibt sich:

$$\frac{MS}{SH} = \tfrac{1}{2}$$

d. h. in jedem Dreiecke liegt der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkte des dreieckumschriebenen Kreises und dem Höhenschnitte auf einer Geraden und zwar so, dass ersterer von den beiden letzten Entfernungen hat, die im Verhältniss 1 : 2 stehen.

Es soll nun untersucht werden, wie es sich mit den entsprechenden Polen einer Reihe von Polkegelschnitten verhält, welche einander ähnlich sind.

Sei $a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22} + 2a_{01}xy + 2a_{02}x + 2a_{12}y = 0$ die Gleichung eines Kegelschnittes, so besteht für den Winkel ω seiner Asymptoten die Gleichheit:

$$\operatorname{tg}\omega^2 = \frac{4(a_{01}{}^2 - a_{00}a_{11})}{(a_{00}+a_{11})^2} = \lambda$$

Da nun alle Kegelschnitte mit gleichen Asymptotenwinkeln einander ähnlich sind, so müssen für ähnliche Kegelschnitte die Ausdrücke für λ einander gleich sein.

Für den Polkegelschnitt des Punktes 0 hat man aber:

$$a_{00} = A_0b_0c_0 + B_0a_0c_0 + C_0a_0b_0$$
$$a_{11} = A_0b_1c_1 + B_0a_1c_1 + C_0a_1b_1$$
$$2a_{01} = A_0(b_0c_1 + b_1c_0) + B_0(a_0c_1 + a_1c_0) + C_0(a_0b_1 + a_1b_0)$$

und somit ergibt sich als Gleichung für den geometrischen Ort aller Punkte 0, deren Polkegelschnitte einander ähnlich sind:

$$\lambda = [A_0{}^2(b_0c_1 - b_1c_0)^2 + B_0{}^2(c_0a_1 - c_1a_0)^2 + C_0{}^2(a_0b_1 - a_1b_0)^2$$
$$- 2A_0B_0(b_0c_1 - b_1c_0)(c_0a_1 - c_1a_0) - 2A_0C_0(b_0c_1 - b_1c_0)(a_0b_1 - a_1b_0)$$
$$- 2B_0C_0(c_0a_1 - c_1a_0)(a_0b_1 - a_1b_0)] : [A_0(b_0c_0 + b_1c_1) + B_0(a_0c_0 + a_1c_1)$$
$$+ C_0(a_0b_0 + a_1b_1)]^2$$

oder, wenn man die Bezeichnungen von (35) und (41) einführt, so folgt:

$$\varphi_0(s) - \lambda P_0(h)^2 = 0$$

Betrachtet man den Punkt 0 als variabel, so stellt die Gleichung:

$$\varphi(s) - \lambda P(h)^2 = 0 \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (47)$$

die gesuchte Ortscurve dar, welche ein Kegelschnitt ist, der den Umhüllungskegelschnitt $\varphi(s)$, welcher dem Schwerpunkte des Grunddreiecks entspricht, in den Schnittpunkten desselben mit der Höhenschnittspolaren $P(h)$ berührt.

Legt man der Grösse λ nach und nach alle möglichen Zahlenwerte bei, so erhält man lauter Kegelschnitte, deren Punkte die Dreieckspole einer gewissen Gruppe ähnlicher dem Dreiecke umschriebener Kegelschnitte sind.

Jede Gerade der Ebene hat aber mit jedem der Kegelschnitte:

$$\varphi(s) - \lambda P(h)^2 = 0$$

im Allgemeinen zwei Punkte gemein; und da den Punkten einer Geraden Polkegelschnitte zukommen, welche einem Büschel angehören, so folgt der Satz:

Unter den Kegelschnitten eines Büschels gibt es höchstens zwei die derselben Aehnlichkeitsgruppe angehören.

Aus der Gleichung:

$$\frac{4(a_{01}{}^2 - a_{00}a_{11})}{(a_{00} + a_{11})^2} = \lambda$$

geht hervor, dass man für $\lambda = 0$ den Ort aller Punkte erhalten muss, deren Polkegelschnitte Parabeln sind; die Gleichung dieser Ortscurve ist also: $\varphi(s) = 0$ was mit dem in (38) Gefundenen übereinstimmt:

Für $\lambda = \infty$ ist der Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel und folglich

$$P(h) = 0$$

die Gleichung des geometrischen Ortes aller Punkte, deren Polkegelschnitte lauter gleichseitige Hyperbeln sind, was schon in (43) erwähnt wurde. Da jede Gerade der Ebene den Kegelschnitt höchstens in zwei Punkten und die Gerade $P(h)$ blos in einem Punkte treffen kann; so folgt, dass unter den Kegelschnitten eines Büschels, sich höchstens Parabeln und immer eine und nur eine gleichseitige Hyperbel befinden.

Die Tangenten des Kegelschnittes $\varphi(s)$ haben unendlich ferne Punkte zu Dreieckspolen und haben mit dem Kegelschnitte $\varphi(s)$ nur einen einzigen Punkt gemein; daraus geht hervor, dass wenn von den Grundpunkten eines Kegelschnittsbüschels der eine in der Unendlichkeit liegt, so geht durch diese vier Grundpunkte nur eine einzige Parabel. Durch die Richtung, in welcher der unendlich ferne Punkt gelegen ist, ist dann zugleich die Richtung der Parabelaxe gegeben.

Irgend eine feste Gerade G der Ebene wird nun von den Kegelschnitten, welche von der Gleichung: $\varphi(s) - \lambda P(h)^2 = 0$ bei sich stets ändernden λ, vorgestellt werden, in Punktepaaren geschnitten, denen als Polkegelschnitte immer die Kegelschnittpaare einer und derselben Aehnlichkeitsgruppe im Kegelschnittbüschel, der zur Geraden G gehört, entsprechen.

Da aber die durch die Gleichung $\varphi(s) - \lambda P(h)^2 = 0$ repräsentirten Kegelschnitte selbst einen Büschel bilden, so sind die auf der Geraden G von ihnen ausgeschnittenen Punktepaare in Involution. Es folgt somit der Satz:

Die Polenpaare der paarweise auftretenden einander ähnlichen Polkegelschnitte eines und desselben Büschels gehören einer Involution an . . . . (48)

Dieser Involution kommen aber stets zwei Doppelpunkte zu, wovon der eine immer der Schnittpunkt der Geraden G mit der Höhenschnittspolaren $P(h)$ ist, während der zweite als Berührpunkt desjenigen Kegelschnittes erhalten wird, der überdiess noch den Kegelschnitt $\varphi(s)$ in den Schnittpunkten der Höhenschnittspolaren berührt. Den Doppelpunkten entsprechen nur gleichsam Doppelkegelschnitte, wovon der eine immer eine gleichseitige Hyperbel ist, der andere aber einer Aehnlichkeitsgruppe angehört, die von vornherein durch die gegenseitige Lage der vier Grundpunkte bedingt ist.

In Früherem wurde erläutert, dass die Kegelschnittspolare des Punktes 0 bezüglich seines entsprechenden Polkegelschnittes zugleich seine entsprechende Dreieckspolare ist, dass also die Tangenten, welche vom Punkte 0 an den Kegelschnitt $\Pi(0)$ gezogen werden können, denselben in Punkten 1 und 2 berühren, die der Dreieckspolaren $P(0)$ angehören.

Da aber die Punkte 1 und 2 als Berührpunkte des Polkegelschnittes auch diesem angehören, so bestehen die Gleichungen:

$$\Pi_1(0) = A_1 B_1 C_0 + A_1 C_1 B_0 + B_1 C_1 A_0 \equiv 0$$
$$\Pi_2(0) = A_2 B_2 C_0 + A_2 C_2 B_0 + B_2 C_2 A_0 \equiv 0$$

Die Gleichungen der Dreieckspolaren der Punkte 1 und 2 sind aber:

$$A_1B_1C + A_1C_1B + B_1C_1A = 0$$
$$A_2B_2C + A_2C_2B + B_2C_2A = 0$$

Aus diesen und den beiden obigen Gleichungen folgt aber sofort, dass die Polaren der Punkte 1 und 2 auch den Punkt 0 enthalten. . . . . (49)

Die Gerade 0,1 hat aber als Tangente des Kegelschnittes $\Pi(0)$ im Punkte 1 die Gleichung:

$$x_1 \tfrac{1}{2}\Pi(0)'(x) + y_1\tfrac{1}{2}\Pi(0)'(y) + z_1\tfrac{1}{2}\Pi(0)'(z) = 0$$

oder:

$$A(B_0C_1 + B_1C_0) + B(A_0C_1 + A_1C_0) + C(A_0B_1 + A_1B_0) = 0$$

Sei Punkt k der Pol der Linie 0,1, so muss sein

$$A_k = \frac{\lambda}{B_0C_1 + B_1C_0}, \quad B_k = \frac{\lambda}{A_0C_1 + A_1C_0}, \quad C_k = \frac{\lambda}{A_0B_1 + B_0A_1}$$

Da aber Punkt 1 auch auf den Dreieckspolaren des Punktes 0 liegen soll, so ist:

$$P_1(0) = A_1B_0C_0 + B_1A_0C_0 + C_1A_0B_0 \equiv 0$$

und hieraus:

$$B_0C_1 + B_1C_0 = -\frac{A_1B_0C_0}{A_0}$$

$$A_0C_1 + A_1C_0 = -\frac{B_1A_0C_0}{B_0}$$

$$A_0B_1 + A_1B_0 = -\frac{C_1A_0B_0}{C_0}$$

und somit:

$$A_k = -\frac{\lambda A_0}{A_1B_0C_0}; \quad B_k = -\frac{\lambda B_0}{B_1A_0C_0}; \quad C_k = -\frac{\lambda C_0}{C_1A_0B_0}$$

oder:

$$\frac{-A_kB_0C_0}{\lambda} = \frac{A_0}{A_1}; \quad \frac{-B_kA_0C_0}{\lambda} = \frac{B_0}{B_1}; \quad \frac{-C_kA_0B_0}{\lambda} = \frac{C_0}{C_1}$$

Dividirt man die Gleichung:

$$\Pi_1(0) = B_1C_1A_0 + A_1C_1B_0 + A_1B_1C_0 \equiv 0$$

mit der Grösse $A_1B_1C_1$, so folgt:

$$\frac{A_0}{A_1} + \frac{B_0}{B_1} + \frac{C_0}{C_1} \equiv 0$$

und folglich:

$$A_k B_0 C_0 + B_k A_0 C_0 + C_k A_0 B_0 \equiv 0$$

d. h. der Pol k der Geraden 0,1 liegt auf der Dreieckspolaren des Punktes 0. Ganz ebenso lässt sich zeigen, dass der Dreieckspol des Punktes 2 ebenfalls auf der Geraden $P(0)$ liegt.

Nach (41) müssen aber die Dreieckspolaren der Punkte 1 und 2 durch den Punkt 0 gehen, und somit kann unter Berücksichtigung des Satzes (19) der Pol der Geraden 0,1 nur zusammenfallen mit dem Punkte 2 und der Pol der Geraden 0,2 nur zusammenfallen mit dem Punkte 1.

Das Dreieck 0,1,2 hat also die Eigenschaft, dass die Verbindungslinie zweier Eckpunkte die Dreieckspolare des dritten Eckpunktes ist. . . . . (50)

Ist eine Ecke des Dreiecks gegeben, so sind die beiden andern, als die Schnittpunkte der Dreieckspolaren und des Polkegelschnittes vollständig bestimmt.

Der Polkegelschnitt irgend einer Ecke des Dreiecks geht durch die beiden andern Ecken und berührt hierin die beiden Seiten des Dreiecks.

Bekanntlich stellt die Gleichung:

$$A \,.\, B \,.\, C \mp \lambda A'^3 = 0$$

eine Curve dritter Ordnung dar, welche durch die Gerade A' in drei Wendepunkten geschnitten wird, deren Tangenten die Geraden A, B, C sind. Rückt aber die Gerade A' in die Unendlichkeit, so geht die Curvengleichung über in:

$$ABC + \mu = 0$$

worin μ eine Constante bedeutet.

Für diese Curve der dritten Ordnung, die also drei unendlich ferne Wendepunkte hat, gelten nun ganz dieselben Polarbeziehungen wie für das Dreieck ABC, da man hiefür ebenso als Gleichungen der ersten und zweiten Polaren eines Punktes 0 die Gleichungen

$$P(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\Pi}(0) = 0$$

hat, die unabhängig von der Grösse μ sind.

XXII.

Les polygones rayonnés et les polygones étoilés.

Par

Georges Dostor.

---

1. **Définition.** Nous donnerons le nom de polygone rayonné à tout polygone composé alternativement d'angles saillants et d'angles rentrants, et tels que les côtés de ces angles sont deux par deux en ligne droite.

Tels sont les polygones *ABCDE* (fig. 1) et *ABCDEF* (fig. 2)

2. Chaque côté du polygone rayonné joint les sommets de deux angles saillants, en passant par les sommets de deux angles rentrants qui leur sont contigus.

Ainsi, dans le polygone rayonné *ABCDE* (fig. 1), la droite *AB*, joignant les sommets des angles saillants *A* et *B*, en passant par les sommets *a* et *b* des deux angles rentrants contigus, est un côté du polygone.

De même dans le polygone *ADCDEF* (fig. 2), les droites *AB* et *EF* sont des côtés.

3. Un polygone rayonné a autant de côtés que d'angles saillants et que d'angles rentrants.

Quand nous parlerons des sommets ou des angles d'un polygone rayonné, nous n'entendrons parler que des angles saillants de ce polygone, abstraction faite des angles rentrants, à moins d'avis contraire.

4. Il est évident que, si l'on parcourt, dans le même sens, le contour d'un polygone rayonné, on trouvera un même nombre p de

sommets à droite de chaque côté et aussi un même nombre q de sommets à gauche de chaque côté; et, si n designe le nombre des côtés de ce polygone, on aura $n = p + q + 2$.

Dans le pentagone rayonnè $ABCDE$ (fig. 1), on a $p = 1$ et $q = 2$; et dans l'hexagone rayonné $ABCDEF$ (fig. 2), p est égal à 1 et q est égal à 3.

5. Un polygone rayonné est dit de l'espèce e, lorsque le plus petit des deux nombres p et q est égal à $e-1$.

6. Si l'un des deux nombres p et q est nul, l'autre sera égal à $n-2$, et l'on aura $e = 1$; dans ce cas le polygone sera convexe. Donc les polygones convexes sont de première espèce. Les angles rentrants y sont égaux chacun à deux angles droits.

7. Au moyen d'un polygone convexe $abcdefg$... (fig. 3) de n côtés, on peut avoir tous les polygones rayonnés de n côtés.

8. Le polygone convexe est de première espèce.

Pour obtenir le polygone rayonné de deuxième espèce ayant n côtés, en suivant le périmètre dans le même sens, on prolonge les côtés de deux en deux, jusqu'à leurs intersections mutuelles.

Ainsi les côtés ab et cd se coupent en A', les côtés cd et ef en B'; les côtés ef et ga se rencontrent en C', les côtés ga et ab en D'; et ainsi de suite.

Si le polygone convexe donné a un nombre impair de côtés, c'est-à-dire si n est premier avec 2, tous les côtés de ce polygone aurons été prolongés dans les deux sens, et, après avoir déterminé n intersections de deux côtés adjacents à un même troisième côté, on sera revenu au premier point d'intersection obtenu.

Si, au contraire, le nombre n est pair, comme le cas se présente dans la figure 2, on partira du premier côté ab de l'hexagone $abcdef$, et l'on prolongera les côtés de deux en deux, ce qui fournira les trois sommets A, B et C; puis on partira de même du second côté bc en effectuant des prolongements analogues, ce qui donne les trois autres sommets D, E et F.

9. On obtient le polygone rayonné de troisième espèce ayant n côtés, en prolongeant de trois en trois les côtés du polygone convexe de n côtés jusqu'à leurs intersections mutuelles. Ainsi les côtés ab et de se coupent en A; les côtés de et ga se rencontrent en B; ga et cd se coupent en C; et ainsi de suite.

Si le nombre n des côtés du polygone convexe est premier avec

3, tous les côtés de ce polygone auront été prolongés dans les deux sens, et, après avoir déterminé n intersections de deux côtés adjacents à deux côtés contigus, on sera revenu au premier point d'intersection obtenu.

Si, au contraire, le nombre n est divisible par 3, comme cela se présente pour l'ennéagone, on fera les prolongements indiqués, en partant d'abord du premier côté, puis du second et enfin du troisième côté. On trouvera ainsi que l'ennéagone rayonné de troisième espèce (fig. 4) se compose de trois triangles, dont les neuf sommets terminent les neuf rayons d'une étoile.

10. On obtiendra les polygones rayonnés de n côtés, qui sont d'une espèce supérieure à la troisième, en prolongeant, dans les deux sens, les côtés du polygone convexe de 4 en 4, de 5 en 5, ... de $\frac{n-2}{2}$ en $\frac{n-2}{2}$ ou de $\frac{n-1}{2}$ en $\frac{n-1}{2}$ suivant que n est pair ou impair.

11. On voit ainsi, d'après ces constructions, qu'il y a autant d'espèces de polygones de n côtés, qu'il existe de nombres entiers inférieurs à la moitié de n ou de $n+1$, suivant que n est pair ou impair. La première espèce de ces polygones est le polygone convexe de n côtés.

Il y a 2 espèces de pentagones, 2 espèces d'hexagones, 3 d'heptagones, 3 d'octogones, 4 d'ennéagones et de décagones, et ainsi de suite.

12. Il est aisé de s'assurer que le polygone, ayant n côtés, de l'espèce p, peut s'obtenir au moyen du polygone, ayant n côtés, de l'espèce $p-1$, en prolongeant dans ce dernier les côtés de deux en deux, dans les deux sens.

Ainsi le polygone $ABCDEFG$ (fig. 3) s'obtient aussi, en prolongeant de deux en deux les côtés du polygone $A'B'C'D'E'F'G'$ de l'espèce immédiatement inférieure d'une unité. En effet les côtés $A'B'$ et $C'D'$ se coupent en C; $C'D'$ et $E'F'$ en B; $E'F'$ et $G'A'$ en A; $G'A'$ et $B'C'$ en G; $B'C'$ et $D'E'$ en F; $D'E'$ et $F'G'$ en E; $F'G'$ et $A'B'$ en D.

13. On voit encore que les sommets des angles saillants du polygone d'une espèce quelconque sont les sommets des angles rentrants du polygone de l'espèce immédiatement supérieure.

Dans le polygone $A'B'C'D'E'F'G'$ (fig. 3), les sommets A', B', C', ... des angles saillants sont les sommets des angles rentrants du polygone $ABCDEFG$ de l'espèce immédiatement supérieure.

14. **Théorème I.** La différence des angles saillants de deux polygones rayonnés, ayant le même nombre de côtés mais étant de deux espèces consécutives, est constante et égale à quatre angles droits.

Désignons par S_{p-1} et S_p les sommes des angles saillants des deux polygones consécutifs de n côtés $A'B'C'\ldots$ et $ABC\ldots$ (fig. 3), que nous supposerons l'un de l'espèce $p-1$ et l'autre de l'espèce p.

Tirons les droites AF, FD, DB, ...; nous formons un polygone convexe de n côtés $AFDB\ldots$; sur les côtés de ce polygone s'appuient les n triangles AFE', FDB', DBF', ... dont les angles au sommet, E', B', F', ... sont égaux aux angles saillants de l'espèce $p-1$; nous avons donc

$$S_{p-1} = 2n \text{ droits} - (E'AF + E'FA + B'FD + B'DF + \ldots).$$

Mais la somme des angles entre parenthèses égale la somme des angles du polygone convexe $AFDB\ldots$ de n côtés, moins la somme des angles saillants du polygone rayonné $ABCD\ldots$ de l'espèce p; elle égale par suite

$$(2n-4) \text{ droits} - S_p.$$

On a donc

$$S_{p-1} = 2n \text{ droits} - [(2n-4) \text{ droits} - S_p],$$

d'où on tire

$$\text{(I)} \qquad S_{p-1} - S_p = 4 \text{ angles droits.}$$

15. **Corollaire.** Dans tout polygone rayonné, la différence entre la somme des angles rentrants et celle des angles saillants est constante et égale à quatre angles droits.

16. **Théorème II.** Dans tout polygone de n côtés et de l'espèce p, la somme S_p des angles (angles saillants) est égale à autant de fois deux angles droits, qu'il y a d'unités dans le nombre de côtés diminué du double nombre de l'espèce.

Par l'égalité (I) nous avons

$$S_p = S_{p-1} - 4 \text{ angles droits};$$

donnant à p successivement les valeurs 2, 3, ... p_{-1}, p et observant que $S_1 = (2n-4)$ droits, on forme les égalités

$$S_2 = (2n-4) \text{ droits} - 4 \text{ droits},$$

$$S_3 = S_2 - 4 \text{ droits},$$

. . . .

$$S_p = S_{p-1} - 4 \text{ droits}.$$

Ajoutant ces $p-1$ égalités membre à membre et réduisant, on obtient la valeur

$$S_p = (2n-4) \text{ droits } - 4(p-1) \text{ droits } = (2n-4p) \text{ droits},$$

ou

(II) $$S_p = 2(n-2p) \text{ angles droits.}$$

17. **Corollaire.** Si n est pair, l'espèce la plus élevée sera marquée par le nombre $\frac{n-2}{2}$; donc on aura

(III) $$S_{\frac{1}{2}(n-2)} = 2[n-(n-2)] \text{ droits } = 4 \text{ angles droits};$$

et si n est impair, l'espèce la plus élevée sera marquée par le nombre $\frac{n-1}{2}$; par suite il viendra

(IV) $$S_{\frac{1}{2}(n-1)} = 2[n-(n-1)] \text{ droits } = 2 \text{ angles droits.}$$

Il s'ensuit que La somme des angles du polygone rayonné de l'espèce la plus élevée, parmi ceux d'un même nombre de côtés, est égale à quatre ou à deux angles droits, suivant que le nombre des côtés du polygone est pair ou impair.

Ainsi la somme des angles du triangle, du pentagone de 2ème espèce, de l'heptagone de 3ème espèce, de l'ennéagone de 4ème espèce, etc. est égale à deux angles droits.

18. **Théorème III.** Dans tout polygone rayonné, la somme des angles extérieurs, qu'on obtient en prolongeant les côtés dans le même sens, est égale à autant de fois quatre angles droits qu'il y a d'unités dans l'espèce du polygone rayonné.

En effet la somme des angles, tant extérieurs que saillants, est égale à autant de fois deux angles droits que le polygone a de sommets ou de côtés; mais, si le polygone, supposé de n côtés, est de l'espèce p, la somme des angles saillants sera

$$S_p = 2(n-2p) \text{ angles droits};$$

on a par suite, pour la somme S des angles extérieurs

$$S = 2n \text{ angles droits } - 2(n-2p) \text{ angles droits}$$

ou

$$S = (2n-2n+4p) \text{ angles droits};$$

donc

(V) $$S = p \text{ fois } 4 \text{ angles droits.}$$

Dans le pentagone de 2ème espèce, la somme des angles extérieurs est de huit angles droits.

§ II. Les polygones rayonnées réguliers.

19. **Théorème I.** Dans un polygone rayonné régulier de n côtés et de l'espèce p, chaque angle saillant est égal à l'excès de deux angles droits sur $\frac{4p}{n}$ angles droits; et chaque angle rentrant est égal à l'excès de deux angles droits sur $\frac{4(p-1)}{n}$ angles droits.

Car les n angles saillants sont égaux entre eux et leur somme est égale à $(2n-4p)$ angles droits; de même les n angles rentrants sont égaux entre eux et leur somme est égale à $2n-4(p-1)$ angles droits.

20. **Corollaire.** Dans un polygone rayonné régulier, la différence entre un angle rentrant et un angle saillant est égal à l'angle au centre du polygone régulier.

21. **Théorème II.** La surface du polygone régulier de n côtés et de l'espèce p est

$$\text{(VI)} \qquad P = nR^2 . \frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{p}{n}\pi}{\cos\frac{p-1}{n}\pi}.$$

Joignons le centre O à un sommet A de ce polygone (fig. 5) et aux deux sommets voisins A' et E' du polygone régulier de n côtés et de l'espèce $p-1$, qui sont situés sur les côtés issus du sommet A dans le polygone de l'espèce p. La surface de notre polygone se composera de n quadrilatères tels que $AA'OE'$ ou de $2n$ triangles tels que $AA'O$. Nous avons donc

$$P = 2n . AA'O.$$

Or, dans le triangle $AA'O$, le côté AO est égal au rayon R du cercle circonscrit au polygone donné; l'angle OAA' est la moitié de l'angle $A'AE$ ou la moitié de la $n^{\text{ème}}$ partie de $(n-2p)\pi$, de sorte que

$$OAA' = \frac{\pi}{2} - \frac{p}{n}\pi;$$

et l'angle AOA' est la moitié de la $n^{\text{ème}}$ partie de quatre angles droits ou égal à $\frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$. La surface de notre triangle $AA'O$ est ainsi égale à

$$\tfrac{1}{2}R^2 \frac{\sin AOA' . \sin OAA'}{\sin AA'O} = \tfrac{1}{2}R^2 \frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{p}{n}\pi}{\cos\frac{p-1}{n}\pi};$$

donc on a

$$P = nR^2 . \frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{p}{n}\pi}{\cos\frac{p-1}{n}\pi}.$$

22. **Corollaire I.** Le rayon r du cercle inscrit dans notre polygone rayonné régulier est évidemment égal à $R\sin OAA' = R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{p}{n}\pi\right) = R\cos\frac{p}{n}\pi$; par conséquent nous avons aussi

(VII) $$P = nRr . \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{p-1}{n}\pi}.$$

23. **Corollaire II.** Le demi-côté $\frac{a}{2} = \frac{AB}{2}$ du polygone régulier étant égal à $R\cos OAA' = R\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{p}{n}\pi\right) = R\sin\frac{p}{n}\pi$, il vient encore

(VIII) $$P = \tfrac{1}{2}naR . \frac{\sin\frac{\pi}{n}\cot\frac{p}{n}\pi}{\cos\frac{p-1}{n}\pi}.$$

24. **Corollaire III.** On déduit de là que

(IX) $$P = \tfrac{1}{2}nar . \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{p}{n}\pi\cos\frac{p-1}{n}\pi} = nr^2\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{p}{n}\pi\cos\frac{p-1}{n}\pi} = \tfrac{1}{4}na^2\frac{\sin\frac{\pi}{n}\cot\frac{p}{n}\pi}{\sin\frac{p}{n}\pi\cos\frac{p-1}{n}\pi}$$

§ III. Les polygones étoilés.

25. **Definition.** Parmi les polygones rayonnés, les uns se composent de polygones convexes distincts, d'autres au contraire ont un périmètre.

Selon l'usage, nous donnerons le nous de polygone étoilé à tout polygone rayonné dont les côtés forment une suite continue, tels qu'en les parcourant dans le même sens, on revienne au sommet de départ, après avoir passé par tous les autres sommets et une seule fois par chacun d'eux.

Tels sont le pentagone (fig. 1), l'heptagone (fig. 3)

26. **Théorème I.** Etant donnée une courbe convexe divisée en n parties consécutives aux points 0, 1, 2, 3, ... (fig. 6.), lorsqu'on joint ces points par des droites, de p en p, à partir de l'un d'eux, de 0 par exemple, on formera un polygone étoilé si les nombres n et p sont premiers entre eux et l'on n'en formera qu'un.

En effet, si, à partir du point 0, on joint les points de division de p en p, jusqu'à ce qu'on ait tiré n droites, on aura franchi successivement des nombres de division de la courbe exprimés par

(1) $$p,\quad 2p,\quad 3p,\quad \ldots\quad np.$$

Pour trouver les points de division par les quels on aura passé, il suffira évidemment de supprimer, dans chacun de ces n nombres, le plus grand multiple de n qui y soit contenu; les restes obtenus marqueront les points de division de la courbe qu'on aura reliés. Or je dis que les n restes ainsi obtenus sont tous différents.

Car soient r et r' deux quelconques de ces restes; les deux nombres correspondants de la série (1) seront de la forme

$$\alpha p = \beta n + r, \quad \alpha' p = \beta' n + r'.$$

Si les deux restes r et r' pouvaient être égaux, on aurait

$$\alpha p - \alpha' p = \beta n - \beta' n \quad \text{ou} \quad (\alpha - \alpha')p = (\beta - \beta')n,$$

et le produit $(\alpha - \alpha')p$ serait ainsi divisible par n; or n est premier avec p, par suite il diviserait la différence $\alpha - \alpha'$, ce qui est impossible, puisque α et α' sont moindres que n.

Donc les n restes de la suite (1) sont tous différents; et, comme il sont moindres que n, ils sont formés par les n nombres entiers 0, 1, 2, 3, ... $(n-1)$ inférieurs à n, pris dans un certain ordre. Ainsi, en joignant les n points de division de notre courbe, de p en p, par une ligne brisée continue, on aura passé par tous ces n points et une seule fois par chacun d'eux; donc le polygone résultant sera étoilé et de l'espèce p.

27. **Corollaire I.** Il est évident que le périmètre de notre polygone étoilé sous-tend np divisions de la courbe, ou p fois la courbe elle-même.

28. **Corollaire II.** Si les nombres n et p avaient un diviseur commun d, on verrait, par un raisonnement analogue, que le polygone, formé en les points de p en p, n'a que $\frac{n}{d}$ côtés et que son périmètre sous-tend $\frac{p}{d}$ la courbe.

29. **Théorème II.** Il existe autant de polygones étoilés de n côtés, qu'il y a d'unités moins une dans la moitié du nombre qui exprime combien il y a de nombres entiers inférieurs à n et premiers avec lui.

Soient, en effet, $1, a, b, c, \dots n-c, n-b, n-a, n-1$ les nombres entiers, qui sont inférieurs à n et premiers avec lui. Divisons une courbe fermée convexe en n parties, et joignons les points de division de 1 à 1, de a en a, de b en b, ... de $n-1$ à $n-1$. Chacun des nombres $1, a, b, \dots (n-1)$ étant premier avec n, on obtiendra de la sorte autant de polygones à périmètre continu, qu'il y a de nombres entiers, inférieurs à n et premiers avec lui.

Mais ces polygones sont deux à deux de même espèce. Car le polygone, qu'on obtient en joignant les points de division de p en p, a $p-1$ sommets d'une part de chacun de ces côtés et $n-p-1$ sommets du côté opposé; et le polygone qu'on obtient en joignant les points de division de $n-p$ à $n-p$, a aussi $n-p-1$ sommets d'une part de chacun de ces côtés et par suite $p-1$ sommets d'autre part; donc ces deux polygones sont de même espèce.

Or deux de ces polygones sont convexes; parsuite, si α exprime combien il y a de nombres inférieurs à n et premiers avec lui, il existera autant de polygones étoilés ayant n côtés qu'il y a d'unités dans $\frac{\alpha-2}{2}=\frac{\alpha}{2}-1$.

On trouve ainsi qu'il y a 1 pentagone étoilé, 2 heptagones étoilés, 1 octogone étoilé, 2 ennéagones étoiles, 1 décagone étoilé, etc.

§ IV. Les polygones étoilés réguliers.

30. Considérons un polygone régulier de n côtés et de l'espèce p; ce polygone sera étoilé si p est premier avec n. Le côté C de ce polygone, exprimé en valeur du rayon R du cercle circonscrit sera

$$C=2R\sin\frac{p}{n}\pi. \tag{X}$$

Cette formule nous donnera les côtés des polygones réguliers étoilés de 5, 8, 10, 12, 16, 20 et 24 côtés.

31. **Pentagone régulier étoilé.** Nous avons $n=5$ et $p=2$; il viendra donc pour la valeur du côté

$$C=2R\sin\frac{2\pi}{5}=2R\sin 72^0=\tfrac{1}{2}R\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

On trouvera ensuite la surface P de ce pentagone au moyen de la formule (VI), qui donne

$$P = 5R^2 . \frac{\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}} = 5R^2 . \frac{\sin 36^0 \cos 72^0}{\cos 36^0} = \frac{5}{4}R^2 . \frac{\sin 36^0}{\cos^2 36^0},$$

ou

$$P = \frac{5}{16}R^2\sqrt{50-22\sqrt{5}}$$

32. **Octogone régulier étoilé.** Puisque $n=8$ et $p=3$, on a

$$C = 2R\sin\frac{3\pi}{8} = 2R\cos\frac{\pi}{8} = R\sqrt{2+\sqrt{2}};$$

$$P = 8R^2 . \frac{\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}}{\cos\frac{2\pi}{8}} = 8R^2 . \frac{\sin^2\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{4}} = 4R^2(\sqrt{2}-1).$$

33. **Décagone régulier étoilé.** On a ici $n=10$, $p=3$; par suite

$$C = 2R\sin\frac{3\pi}{10} = 2R\sin 54^0 = \tfrac{1}{2}R(\sqrt{5}+1);$$

$$P = 10R^2 . \frac{\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{5}} = 10R^2 . \frac{\sin 18^0 \cos 54^0}{\cos 36^0} = 10R^2 . \frac{\sin 18^0 \sin 36^0}{\cos 36^0}$$

ou

$$P = 5R^2 . \frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2(\sqrt{5}+1)} = \frac{5}{2}R^2\sqrt{50-22\sqrt{5}}.$$

Appelons C_5 et C_{10} les côtés du pentagone et du décagone étoilés, qui sont inscrits dans le même cercle de rayon R. Nous avons

$$C_5^2 = R^2 . \frac{10+2\sqrt{5}}{4} = R^2 + R^2 . \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = R^2 + R^2 . \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$$
$$= R^2 + C_{10}^2.$$

Donc le côté du pentagone régulier étoilé est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont les deux côtés de l'angle droit sont le rayon et le côté du décagone régulier étoilé.

Si nous représentons de même par P_5 et P_{10} les surfaces de ces deux polygones, nous aurons

$$P_{10} = 10R^2 . \frac{\sin 18^0 \sin 36^0}{\cos 36^0}, \quad P_5 = 5R^2 . \frac{\sin 36^0 \sin 18^0}{\cos 36^0},$$

de sorte que $P_{10} = 2P_5$. Donc

La surface du décagone régulier étoilé est double de la surface du pentagone régulier étoilé.

§ V. Les polygones réguliers convexes d'un nombre pair de côtés.

34. **Théorème.** L'aire d'un polygone régulier convexe d'un nombre pair de côtés est égale au périmètre du polygone régulier convexe d'un nombre de côtés deux fois moindre et inscrit dans le même cercle, multiplié par la moitié du rayon de ce cercle.

Soit AB (fig. 7) le côté du polygone régulier de $2n$ côtés inscrit dans le cercle O. Tirons les rayons AO et BO et menons l'apothême OI. La surface P de ce polygone sera

$$P = 2nAB \times \frac{OI}{2} = nAB \times OI.$$

Menons la corde AC perpendiculaire sur le rayon BO, qu'elle coupe en D. Les deux triangles rectangles ABD et BIO étant semblables, nous avons l'égalité

$$\frac{AB}{BO} = \frac{AD}{OI},$$

qui donne

$$AB \times OI = AD \times BO = AC \times \frac{BO}{2}.$$

Il viendra par suite

$$P = nAC \times \frac{BO}{2},$$

où nAC est le périmètre du polygone régulier inscrit de n côtés et BO le rayon de ce cercle. Notre proposition se trouve donc démontrée.

35. Ce théorème fournit immédiatement l'expression de la surface des polygones réguliers convexes de 6, 8, 10, 12, 16, 20 et 24 côtés.

Surface de l'hexagone régulier. Nous avons $n = 3$ et $AC = R\sqrt{3}$; par conséquent il vient

$$P_6 = \tfrac{3}{2}R^2\sqrt{3}.$$

Surfaces de l'octogone régulier. Posant $n = 4$ et $AC = R\sqrt{2}$. nous avons

$$P_8 = 2R^2\sqrt{2}.$$

Surface du décagone régulier. Pour $n = 5$, nous avons $AC = \frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, de sorte que

$$P_{10} = \frac{5}{4}R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Surface du dodécagone régulier. Si $n = 6$, il viendra $AC = R$ et par suite

$$P_{12} = 3R^2.$$

Polygone régulier de 16 côtés. $n = 8$ donne $AC = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$; on a donc

$$P_{16} = 4R^2\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Polygone régulier de 20 côtés. Pour $n = 10$, on a $AC = \frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1)$, de sorte que

$$P_{20} = \frac{5}{2}R^2(\sqrt{5}-1).$$

Polygone régulier de 24 côtés. Si $n = 12$, on aura $AC = \sqrt{2-\sqrt{3}}$; par suite il viendra

$$P_{24} = 6R^2\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

XXIII.

Beitrag zur Theorie der Unterdeterminanten.

Von

F. Hoza.

---

1) Bekanntlich lässt sich jede Determinante $n$ten Grades in Teilproducte zerlegen, deren jedes aus 2 Unterdeterminanten besteht, wovon erstere den Grad k und letztere $(n-k)$ besitzt. Z. B.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{44} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{34} & a_{35} \\ a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{34} & a_{35} \\ a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{24} & a_{25} \\ a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{24} & a_{25} \\ a_{44} & a_{45} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{24} & a_{25} \\ a_{34} & a_{35} \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{23} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{34} & a_{35} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \end{vmatrix}.$$

Führt man eine kürzere Bezeichnungsweise ein, nach Art jener, deren sich Sylvester bedient, indem man die Indices in 2 Reihen schreibt, oben die der Colonnen und unten die der Zeilen, so lautet die frühere Formel

$$\begin{vmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\1\,2\,3\,4\,5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}4\,5\\4\,5\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}4\,5\\3\,5\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,5\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}4\,5\\3\,4\end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix}1\,2\,3\\1\,3\,4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}4\,5\\2\,5\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1\,2\,3\\1\,3\,5\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}4\,5\\2\,4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1\,2\,3\\1\,4\,5\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}4\,5\\2\,3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1\,2\,3\\2\,3\,4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}4\,5\\1\,5\end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix}1\,2\,3\\2\,3\,5\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}4\,5\\1\,4\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1\,2\,3\\2\,4\,5\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}4\,5\\1\,3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1\,2\,3\\3\,4\,5\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}4\,5\\1\,2\end{vmatrix}.$$

Hieraus ist das Bildungsgesetz der Partialproducte ersichtlich.

Die oberen Indices folgen in natürlicher Ordnung, die unteren aber bilden Combinationen der $k$ten und $(n-k)$ten Classe der Elemente 1, 2, 3 ... n.

Die Anzahl sämmtlicher Teilpunkte ist

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Das Vorzeichen richtet sich nach der Anzahl der Inversionen sämmtlicher unteren Indices, dieselben als eine Complexion betrachtet.

Diese, wie allgemein bekannt, von Laplace herrührende Entwickelung, lässt sich jedoch verallgemeinern, indem man die oberen Indices auf dieselbe Weise combinirt, wie die unteren.

Auch für das Vorzeichen jedes Teilproductes lässt sich eine allgemeinere Regel aufstellen, die auch dann gilt, wenn die oberen Indices nicht in natürlicher Ordnung folgen. Unseres Wissens ist eine solche Verallgemeinerung noch nicht versucht worden und daher dürfte die nachfolgende Abhandlung als eine wesentliche Vervollständigung der Laplace'schen Zerlegungsformel günstige Aufnahme erwarten.

2) Es sei eine Determinante $n$ten Grades

$$\varDelta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1\,2\,3\,\dots\,n \\ 1\,2\,3\,\dots\,n \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Betrachten wir ein beliebiges Element a_{pq}, welches in der $p$ten Zeile und $q$ten Colonne liegt.

Entwickelt man $\varDelta_n$ nach Elementen der $p$ten Zeile oder $q$ten Colonne, so erhält man bekanntlich

$$\Delta_n = \Sigma(-1)^{p+q} . a_{pq} . \Delta_{n-1}. \qquad (2)$$

Hier bedeutet Δ_{n-1} jene Unterdeterminante erster Ordnung und $(n-1)$ten Grades, welche entsteht, wenn in Δ_n sowohl die $p$te Zeile als auch $q$te Colonne weggelassen wird. Das Summenzeichen Σ bezieht sich auf Summanden, welche dadurch gebildet werden, dass einer von den Indices pq constant ist, während der andere alle Werte von 1 bis n der Reihe nach durchläuft. Die Anzahl aller Summanden ist daher n und ihre Vorzeichen werden durch $(-1)^{p+q}$ bestimmt, wobei $(p+q)$ die Anzahl aller Zeilen und Colonnen bedeutet, welche man durchschreiten müsste, um vom ersten Elemente a_{11} bis zum Elemente a_{pq} zu gelangen, wozu aber auch die Zeilen und Colonnen zu rechnen sind, in denen a_{11} und a_{pq} liegen.

3) Auf ähnliche Weise lässt sich auch Δ_{n-1} entwickeln. Zu diesem Zwecke wählen wir uns aus Δ_n ein beliebiges Element a_{rs} heraus, welches mit a_{pq} weder in der nämlichen Zeile noch Colonne liegt und bestimmen, in der wievielten Zeile und Colonne von Δ_{n-1} dieses Element erscheint. Wäre $p > r$, so hätte die Weglassung der $p$ten Zeile auf die Anzahl der Zeilen, welche in Δ_{n-1} zwischen dem ersten Elemente und a_{rs} liegen, keinen Einfluss. Wäre jedoch $p < r$, so stünde in Δ_{n-1} das Element a_{rs} in der $(r-1)$ten Zeile, weil zwischen der ersten und $r$ten Zeile eine weggelassen wurde. Dasselbe gilt bezüglich der Colonnen. Hieraus ist ersichtlich, dass wenn die Indices pr eine Folge bilden, d. h. in natürlicher Ordnung folgen, die Anzahl der Zeilen um 1 vermindert werden muss und wenn die Indices qs eine Folge bilden, dass die Anzahl der Colonnen um 1 vermindert werden muss. Bezeichnet daher α die Anzahl der Folgen in den Complexionen pr und qs, so muss

$$\Delta_{n-1} = \Sigma(-1)^{r+s-\alpha} . a_{rs} . \Delta_{n-2}. \qquad (3)$$

Hier bedeutet Δ_{n-2} jene Unterdeterminante 2ter Ordnung und $(n-2)$ten Grades, welche aus Δ_{n-1} entsteht, wenn man jene Zeilen und Colonnen weglässt, in denen das Element a_{rs} vorkommt. Auch kann man Δ_{n-2} unmittelbar aus Δ_n erhalten, wenn man jene Zeilen und Colonnen weglässt, welche durch die Elemente a_{pq} und a_{rs} gehen.

4) Nun sind wir auch im Stande die Frage zu beantworten: Welches ist die Summe aller Glieder einer vollständig entwickelten Determinante Δ_n, in denen zwei beliebige Elemente a_{pq} und a_{rs} als Factoren vorkommen? Die verlangte Summe folgt aus den Formeln (2) und (3) und hat den Wert

$$S_2 = (-1)^m . a_{pq} . a_{rs} . \Delta_{n-2}, \qquad (4)$$

wo

$$m = p + q + r + s - \alpha.$$

So z. B. ist in der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{15} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{51} & \dots & a_{55} \end{vmatrix}$$

die Summe jener Glieder, welche die Elemente $a_{32}a_{45}$ enthalten, gleich

$$(-1)^{12} a_{32} a_{45} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix},$$

oder die Summe jener Glieder, welche $a_{33}a_{51}$ enthalten, gleich

$$(-1)^{11} a_{33} a_{51} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}.$$

5) Eine weitere Frage wäre, wie viele solche Summen S_2 überhaupt aus Δ_n möglich sind. Gewiss so viele, als Producte $a_{pq}.a_{rs}$ so gebildet werden können, dass p verschieden sei von r und q von s. Hierbei kann p mit q sowie r mit s auch gleich sein. Die Indices pr und qs bilden daher Combinationen der Elemente 1, 2, 3, ... n zur 2ten Classe. Da jede solche Combination sowohl für pr als auch qs gesetzt werden kann und weil es erlaubt ist, sämmtliche Combinationen, die an Stelle von pr oder qs stehen, umzukehren (zu variiren), so ist die Anzahl aller möglichen Producte $a_{pq}.a_{rs}$ gleich $2\binom{n}{2}^2$.

Entwickelt man die Determinante Δ_{n-2}, so erhält man $(n-2)!$ Glieder, welche mit $a_{pq}.a_{rs}$ multiplicirt und den entsprechenden Vorzeichen versehen, die Summe S_2 geben. Solcher Summen sind aber $2\binom{n}{2}^2$, folglich entsprechen sie

$$2\binom{n}{2}^2.(n-2)! = \binom{n}{2}.n!$$

Gliedern der ursprünglichen Determinante Δ_n. Hieraus ist ersichtlich, dass wir auf diese Weise $\binom{n}{2}$mal mehr Glieder erhalten, als durch unmittelbare Entwickelung von Δ_n. Wählen wir eine beliebige Combination pr aus, behalten dieselbe constant und lassen qs alle möglichen Variationen durchlaufen, so erhalten wir $2\binom{n}{2}$ Werte für S_2 und hiermit zusammen

$$2\binom{n}{2}.(n-2)! = n!$$

von einander verschiedene Glieder der Determinante Δ_n, die also zusammen Δ_n geben müssen. Daher lässt sich Δ_n in Teilproducte von der Form S_2 zerlegen. Nun können aber die constanten Indices, seien es pr oder qs, auf $\binom{n}{2}$ verschiedene Arten gebildet werden, folglich sind $\binom{n}{2}$ verschiedene Entwicklungen von Δ_n in Teilproducte S_2 möglich. Endlich können wir noch bemerken, dass die Summe aller S_2 jedes Glied von Δ_n $\binom{n}{2}$mal enthalten muss.

6) Betrachten wir pr als constant, so werden je zwei Werte von S_2 sich bloss durch die Ordnung der Indices qs also bloss durch das Vorzeichen unterscheiden und können vereinigt werden, wodurch die Summe

$$T_2 = (-1)^m \begin{vmatrix} a_{pq} & a_{ps} \\ a_{rq} & a_{rs} \end{vmatrix} . \Delta_{n-2} = (-1)^m \begin{vmatrix} q & s \\ p & r \end{vmatrix} . \Delta_{n-2} \qquad (5)$$

entsteht. Dasselbe gilt, wenn qs als constant angesehen werden. Solcher Summen T_2 gibt es daher $\binom{n}{2}^2$, von denen $\binom{n}{2}$ genügen, um alle Glieder der Determinante Δ_n zu bilden. Es lässt sich also Δ_n auf $\binom{n}{2}$ Arten in Teilproducte von der Form T_2 zerlegen, indem man die constanten Indices, seien es pr oder qs, aus den Elementen 1, 2, 3, ... n combinirt und jede solche Combination mit allen Combinationen derselben Elemente der Reihe nach zu $\begin{vmatrix} q & s \\ p & r \end{vmatrix}$ vereinigt. Z. B.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix},$$

oder

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix},$$

oder

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Solcher Entwicklungen sind $\binom{4}{2} = 6$ möglich. Aus diesem Beispiele ist ersichtlich, wie praktisch unsere Regel für das Vorzeichen jedes Teilproductes ist, indem dasselbe bloss aus den Indices der ersten Unterdeterminante folgt. Auch muss bemerkt werden, dass dieses Vorzeichen auch aus der zweiten Unterdeterminante auf gleiche Weise folgen würde, wie später allgemein nachgewiesen werden soll.

7) Beschränken wir uns bei der Entwicklung der Determinante Δ_n bloss auf solche Arten der Entwicklung, bei denen die Indices pr und qs in natürlicher Ordnung folgen, so wird immer $\alpha = 2$ sein und setzen wir

$$i_2 = p + q + r + s,$$

so muss

$$\Delta_n = \Sigma(-1)^{i_2} . \begin{vmatrix} q & s \\ p & r \end{vmatrix} . \Delta_{n-2}. \tag{6}$$

Aus dieser Formel ersieht man, dass das Vorzeichen jedes Teilproductes bloss von der Summe i_2 der Indices der Determinante $\begin{vmatrix} q & s \\ p & r \end{vmatrix}$ abhängt.

8) Kehren wir nun zur Formel (4) zurück und versuchen die Unterdeterminante Δ_{n-2} zu zerlegen. Diese Determinante entsteht bekanntlich dadurch, dass man in Δ_n jene Zeilen und Colonnen weglässt, in denen die Elemente a_{pq} und a_{rs} vorkommen. Es sei nun a_{tu} ein beliebiges Element von Δ_n, jedoch so gewählt, dass es mit keinem der beiden Elemente a_{pq}, a_{rs} in einer Reihe liegt.

Um Δ_{n-2} nach der Formel (2) zerlegen zu können, ist es notwendig zu wissen, in der wievielten Zeile und Colonne von Δ_{n-2} das Element a_{tu} vorkommt. Wäre $p > r > t$ und $q > s > u$, d. h. bildeten die Complexionen prt und qsu keine Folgen, so hätte das Weglassen der $p$ten und $r$ten Zeile, sowie der $q$ten und $s$ten Colonne keinen Einfluss auf die Position des Elementes a_{tu}. Wenn jedoch diese Complexionen auch Folgen enthalten, so entspricht jeder solchen Folge, die bezüglich der letzten Indices t oder u stattfindet, eine Verminderung der Anzahl der Zeilen oder Colonnen um 1. Wenn z. B. $p < t$ wäre, so würde zwischen der ersten und $t$ten Zeile die $p$te Zeile fehlen. Dasselbe kann man von den Colonnen sagen. Bezeichnen wir daher mit β die Anzahl der Folgen in den Complexionen prt und qsu bezüglich der letzten Elemente t und u, so stellt $t + u - \beta$ die Anzahl der Zeilen und Colonnen der Unterdeterminante Δ_{n-2} dar, welche vom ersten Elemente an bis zum beliebigen a_{tu} vorhanden sind. Daher kann nach der Formel (2)

$$\Delta_{n-2} = \Sigma(-1)^{t+u-\beta} . a_{tu} . \Delta_{n-3} \tag{7}$$

gesetzt werden, wobei Δ_{n-3} jene Unterdeterminante 3ter Ordnung und $(n-3)$ten Grades bedeutet, welche aus Δ_{n-2} entsteht, wenn man jene Reihen weglässt, in denen a_{tu} vorkommt. Δ_{n-3} kann auch unmittelbar aus Δ_n durch Weglassung jener Reihen, in denen a_{pq}, a_{rs} und a_{tu} vorkommen, gebildet werden. Das Summenzeichen Σ bezieht sich auf solche Summanden, welche entstehen, wenn einer von den Indices tu constant ist und der andere alle Werte mit Ausnahme der gleichnamigen Indices in a_{pq} und a_{rs} nacheinander annimmt. Wenn z. B. t constant ist, so kann u alle Werte von 1 bis n mit Ausnahme von q und s annehmen. Jedenfalls enthält also die Summe Σ hier immer $(n-2)$ Summanden.

9) Bezeichnen a_{pq}, a_{rs}, a_{tu} drei beliebige verschiedenen Zeilen und Colonnen angehörige Elemente der Determinante Δ_n, so ist die Frage, welches die Summe jener Glieder dieser vollständig entwickelten Determinante ist, in denen alle drei Elemente als Factoren vorkommen. Aus der Vereinigung der Formeln (2), (3) und (7) folgt die verlangte Summe

$$S_3 = (-1)^{i_3-\lambda_3} a_{pq} a_{rs} a_{tu} \Delta_{n-3}, \tag{8}$$

wenn

$$i_3 = p+q+r+s+t+u$$

und

$$\lambda_3 = \alpha + \beta.$$

i_3 bedeutet also die Summe der Indices der gegebenen Elemente und λ_3 die Anzahl sämmtlicher Folgen in den Complexionen *prt* und *qsu*.

So z. B. wäre die Summe jener Glieder der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{15} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{51} & \dots & a_{55} \end{vmatrix}$$

darzustellen, in denen die Elemente $a_{23} a_{52} a_{35}$ als Factoren vorkommen. Die Summe

$$i_3 = 20$$

und

$$\lambda_3 = 4,$$

folglich ist

$$S_3 = + a_{23} a_{52} a_{35} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Auf gleiche Weise erhielten wir die Summe jener Glieder, in denen die Elemente $a_{21} a_{32} a_{54}$ vorkommen:

$$S_3' = - a_{21} a_{32} a_{54} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{15} \\ a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}.$$

10) Fragen wir nach der Anzahl aller Summen S_3 hinsichtlich der Determinante Δ_n, so ist leicht einzusehen, dass dieselbe gleich ist der Anzahl aller möglichen Producte $a_{pq}.a_{rs}.a_{tu}$. Da die Anzahl der Combinationen von n Elementen 1, 2, 3, ... n zur 3ten Classe gleich ist $\binom{n}{3}$ und jede solche Combination sowohl für die Indices prt als auch qsu gesetzt werden kann, und weil entweder die ersten oder die zweiten Indices nebstdem auch permutirt (variirt) werden können, so erreicht die gesuchte Anzahl die Höhe $3!\binom{n}{3}^2$.

Entwickelt man Δ_{n-3}, so erhält man $(n-3)!$ Glieder, daher repräsentirt jedes S_3 im Ganzen $(n-3)!$ verschiedene Glieder von Δ_n und sämmtliche S_3 enthalten also

$$3!\binom{n}{3}^2(n-3)! = \binom{n}{3}n!$$

Glieder aus der Determinante Δ_n. Da letztere bloss $n!$ Glieder enthält, so müssen, wie später bewiesen werden wird, auf diese Weise immer $\binom{n}{3}$ gleiche Glieder zum Vorschein kommen. Es ist hiermit der Schluss nahegelegt, die Determinante Δ_n lasse sich auf $\binom{n}{3}$ Arten in Teilproducte von der Form S_3 zerlegen.

11) Nehmen wir an, die Indices prt und qsu folgen in natürlicher Ordnung, so muss sein

$$\lambda_3 = 6$$

und

$$S_3 = (-1)^{i_3}.a_{pq}\,a_{rs}\,a_{tu}\,\Delta_{n-3}. \tag{9}$$

Permutirt man entweder prt oder qsu und zwar durch successive Vertauschung, so ändert sich bei jedesmaliger Vertauschung zweier Indices die Anzahl der Folgen um eine ungerade Zahl, folglich entspricht jeder Vertauschung eine Veränderung des Vorzeichens.

Vereinigt man aber sämmtliche so erhaltenen Producte S_2, so erhält man

$$T_3 = (-1)^{i_3}\begin{vmatrix} a_{pq} & a_{ps} & a_{pu} \\ a_{rq} & a_{rs} & a_{ru} \\ a_{tq} & a_{ts} & a_{tu} \end{vmatrix}\Delta_{n-3}$$

$$= (-1)^{i_3}\begin{vmatrix} q & s & u \\ p & r & t \end{vmatrix}\Delta_{n-3}. \tag{10}$$

T_3 repräsentirt die Summe von $3!$ Producten von der Form S_3. Die Anzahl aller möglichen T_3 ist daher $\binom{n}{3}^2$.

Weil nun $\varDelta_{n-3}$ bei vollständiger Entwickelung $(n-3)!$ Glieder enthält, so kommen in T_3 im Ganzen $3!(n-3)!$ verschiedene Glieder von $\varDelta_n$ vor, und weil

$$3!\binom{n}{3}.(n-3)! = n!,$$

so genügen $\binom{n}{3}$ solche Teilproducte T_3 zur vollständigen Entwickelung von $\varDelta_n$. Folglich muss sein

$$\varDelta_n = \Sigma(-1)^{i_s}.\begin{vmatrix} q\,s\,u \\ p\,r\,t \end{vmatrix} \varDelta_{n-3} \tag{11}$$

wo das Summenzeichen Σ sich auf Summanden bezieht, welche entstehen, wenn eine Zeile der Indices, entweder qsu oder prt, constant ist, während die andere alle Combinationen der 3ten Classe der Elemente 1, 2, 3 ... n der Reihe nach durchläuft.

Da nun die constanten Indices auf $\binom{n}{3}$ Arten aus den Elementen 1, 2, 3 ... n combinirt werden können, so stellt die Formel (11) im Ganzen $\binom{n}{3}$ verschiedene Entwicklungsarten von $\varDelta_n$ dar, d. h. $\varDelta_n$ lässt sich auf $\binom{n}{3}$ Arten in Teilproducte von Unterdeterminanten 3ter und $(n-3)$ter Classe zerlegen.

So ist z. B.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\1\,2\,3\,4\,5\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix}2\,3\,5\\1\,2\,3\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}1\,4\\4\,5\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}2\,3\,5\\1\,2\,4\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}1\,4\\3\,5\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2\,3\,5\\1\,2\,5\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}1\,4\\3\,4\end{vmatrix}\\ &+ \begin{vmatrix}2\,3\,5\\1\,3\,4\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}1\,4\\2\,5\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}2\,3\,5\\1\,3\,5\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}1\,4\\2\,4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2\,3\,5\\1\,4\,5\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}1\,4\\2\,3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}2\,3\,5\\2\,3\,4\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}1\,4\\1\,5\end{vmatrix}\\ &+ \begin{vmatrix}2\,3\,5\\2\,3\,5\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}1\,4\\1\,4\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}2\,3\,5\\2\,4\,5\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}1\,4\\1\,3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2\,3\,5\\3\,4\,5\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}1\,4\\1\,2\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Diese Entwicklung enthält $\binom{5}{3} = 10$ Teilproducte und könnte auf 10 verschiedene Arten geschehen. Die Bestimmung des Vorzeichens aus der Summe der Indices ist höchst einfach und daher für die praktische Berechnung geeignet. Auch ersieht man aus dem angeführten Beispiele, dass das Vorzeichen ebenso aus der Summe der Indices des zweiten Factors jedes Teilproductes folgt. Denn die Summe sämmtlicher Indices ist stets eine gerade Zahl, folglich müssen die Summen in den Factoren zugleich entweder gerade oder ungerade Zahlen sein.

12) Durch fortgesetzte Zerlegung erhält man auf gleiche Weise

$$\Delta_{n-3} = \Sigma(-1)^{v+x-\gamma} . a_{vx} . \Delta_{n-4}. \tag{12}$$

Hier bedeutet a_{vx} ein beliebiges Element der Determinante Δ_n, jedoch darf dasselbe mit keinem der Elemente a_{pq}, a_{rs}, a_{tu}, denen eben Δ_{n-3} entspricht, in derselben Reihe liegen. Δ_{n-4} ist jene Unterdeterminante 4ter Ordnung und $(n-4)$ten Grades, welche aus Δ_n durch Weglassung der $p$ten, $r$ten, $t$ten und $v$ten Zeile nebst der $q$ten, $s$ten, $u$ten und $x$ten Colonne entsteht. γ bedeutet die Anzahl Folgen in den Complexionen $prtv$ und $qsux$ bezüglich der letzten Elemente v und x. Das Summenzeichen Σ bezieht sich auf Summanden, welche entstehen, wenn einer von den Indices v,x constant ist, während der andere alle Werte von 1 bis n, mit Ausnahme der entsprechenden Indices von a_{pq}, a_{rs} und a_{tu}, der Reihe nach annimmt. Wäre z. B. v constant, so würde x die Werte 1, 2, 3, ... n mit Ausnahme von q, s, u annehmen.

13) Wählen wir uns aus den Elementen von Δ_n vier beliebige jedoch verschiedenen Zeilen und Colonnen angehörige Elemente a_{pq}, a_{rs}, a_{tu} und a_{vx} aus, so muss die Summe jener Glieder von Δ_n, welche dieselben als Factoren enthalten, durch

$$S_4 = (-1)^{i_4-\lambda_4} . a_{pq}\, a_{rs}\, a_{tu}\, a_{vx}\, \Delta_{n-4} \tag{13}$$

dargestellt werden, wobei

$$i_4 = p+q+r+s+t+u+v+x$$

und
$$\lambda_4 = \alpha+\beta+\gamma.$$

λ_4 bedeutet die Anzahl sämmtllicher Folgen in den Compensionen $prtv$ und $qsux$.

So ist z. B. für die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{18} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{81} & \cdots & a_{88} \end{vmatrix}$$

die Summe jener Glieder, in denen die Elemente a_{25}, a_{43}, a_{17} und a_{62} als Factoren vorkommen:

$$S_4 = (-1)^{24} a_{25}\, a_{43}\, a_{17}\, a_{62} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} & a_{36} & a_{38} \\ a_{51} & a_{54} & a_{56} & a_{58} \\ a_{71} & a_{74} & a_{76} & a_{78} \\ a_{81} & a_{84} & a_{86} & a_{88} \end{vmatrix}.$$

14) Wie gross ist die Anzahl aller möglichen Producte S_4? Sie beträgt, wie leicht zu erweisen

$$4!\binom{n}{2}^2.$$

Da Δ_{n-4} aus $(n-4)!$ Gliedern besteht, so repräsentiren alle S_4 im Ganzen

$$4!\binom{n}{4}^2 (n-4)! = \binom{n}{4} . n!$$

Glieder der entwickelten Determinante Δ_n. Weil aber Δ_n bloss $n!$ Glieder enthält, so werden je $\binom{n}{4}$ gleiche Glieder vorkommen, woraus man schon schliessen könnte, dass Δ_n auf $\binom{n}{4}$ Arten in Teilproducte von der Form S_4 zerlegt werden kann. Nehmen wir an, die Indices *prtv* und *qsux* folgen in natürlicher Ordnung auf einander. Dann ist λ_4 jedenfalls eine gerade Zahl und in Folge dessen wird

$$S_4 = (-1)^{\lambda_4} a_{pq} a_{rs} a_{tu} a_{vx} \Delta_{n-4}. \tag{14}$$

15) Durch blosse Permutation der ersten oder zweiten Indices ändert aber S_4 bei jedesmaliger Vertauschung zweier Indices das Vorzeichen. Folglich müssen alle auf diese Weise gebildeten S_4 die Summe

$$T_4 = (-1)^{\lambda_4} . \left| \begin{matrix} qsux \\ prtv \end{matrix} \right| . \Delta_{n-4} \tag{15}$$

geben. Da $4!$ Producte von der Form S_4 ein Product von der Form T_4 geben, so ist die Anzahl aller T_4 gleich $\binom{n}{4}^2$. Weil ferner ein Teilproduct T_4 entwickelt

$$4!(n-4)!$$

Glieder von Δ_n liefert und weil

$$4!\binom{n}{4} . (n-4)! = n!,$$

so reichen $\binom{n}{4}$ solche Teilproducte T_4 hin, um alle Glieder von Δ_n zu bilden. Folglich muss sein

$$\Delta_n = \Sigma(-1)^{\lambda_4} . \left| \begin{matrix} qsux \\ prtv \end{matrix} \right| \Delta_{n-4} \tag{16}$$

wo das Summenzeichen Σ sich auf Summanden bezieht, welche entstehen, wenn eine Zeile der Indices constant ist, während die andere alle Combinationen der 4ten Classe der Elemente $1, 2, 3 \dots n$ der Reihe nach durchläuft. Ihre Anzahl ist $\binom{n}{4}$, d. h. so viel als gerade nötig ist. Da die constanten Indices auf $\binom{n}{4}$ verschiedene Arten

combinirt werden können, so sind $\binom{n}{4}$ verschiedene Entwicklungen nach (16) möglich.

Z. B.

$$\begin{vmatrix}1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\\1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1\,2\,3\,4\\3\,4\,6\,7\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}5\,6\,7\\1\,2\,5\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1\,2\,3\,5\\3\,4\,6\,7\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}4\,6\,7\\1\,2\,5\end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix}1\,2\,3\,6\\3\,4\,6\,7\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}4\,5\,7\\1\,2\,5\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1\,2\,3\,7\\3\,4\,6\,7\end{vmatrix} \begin{vmatrix}4\,5\,6\\1\,2\,5\end{vmatrix}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

Die Anzahl aller Teilproducte ist

$$\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35$$

und auf ebensoviel Arten könnte die Zerlegung geschehen.

Das Vorzeichen jedes Teilproductes folgt sowohl aus den Indices des ersten als auch aus denen des zweiten Factors, denn die Summen dieser Indices müssen in beiden Factoren zugleich entweder gerade oder ungerade Zahlen sein.

16) Wenn wir auf diese Weise in der Zerlegung fortfahren würden, kämen wir zu folgenden allgemein giltigen Resultaten:

a) Die Summe jener Glieder der entwickelten Determinante $n$ten Grades Δ_n, welche k beliebige aus verschiedenen Zeilen und Colonnen genommene Elemente

$$a_{pq},\quad a_{rs},\quad a_{tu},\ \ldots\ a_{yz}$$

als Factoren enthalten, ist

$$S_k = (-1)^{i_k - \lambda_k} . a_{pq} a_{rs} a_{tu} \ldots a_{yz} . \Delta_{n-k} \tag{17}$$

wobei

$$i_k = p+q+r+s+t+u+\ldots+y+z.$$

λ_k bedeutet die Anzahl aller Folgen, welche in den Complexionen $prt \ldots y$ und $qsu \ldots z$ stattfinden.

Δ_{n-k} ist jene Unterdeterminante $k$ter Ordnung und $(n-k)$ten Grades, welche aus Δ_n entsteht, wenn man jene Zeilen und Colonnen weglässt, in denen die Elemente a_{pq}, a_{rs}, $a_{tu} \ldots a_{yz}$ vorkommen.

b) Die Anzahl aller möglichen Summen S_k beträgt $k!\binom{n}{k}^2$.

c) Alle diese Summen S_k enthalten im Ganzen

$$k!\binom{n}{k}^2.(n-k)! = \binom{n}{k}n!$$

Glieder der entwickelten Determinante Δ_n, also $\binom{n}{k}$ mal mehr, als in Δ_n vorkommen.

d) Wenn die Indices $prt\ldots y$ und $qsu\ldots z$ in natürlicher Ordnung aufeinander folgen, so bedeutet λ_k stets eine gerade Zahl und

$$\dot{S}_k = (-1)^{\dot{\lambda}_k}.a_{pq}a_{rs}a_{tu}\ldots a_{yz}\Delta_{n-k} \qquad (18)$$

e) Lässt man die einen Indices constant und permutirt die andern, so entspricht jeder Vertauschung zweier Indices eine Aenderung des Vorzeichens, und vereinigt man alle so erhaltenen Werte von S_k, so entsteht

$$T_k = (-1)^{\dot{\lambda}_k}\begin{vmatrix} qsu & \ldots & z \\ prt & \ldots & y \end{vmatrix}.\Delta_{n-k} \qquad (19)$$

f) Die Anzahl aller möglichen T_k ist $\binom{n}{k}^2$, weil $k!$ Summanden von der Form S_n zu einer Summe T_k vereinigt werden.

g) Zur vollständigen Entwicklung der Determinante Δ_n genügen $\binom{u}{k}$ Teilproducte von der Form T_k, weil

$$k!\binom{n}{k}\cdot(n-k)! = n!$$

h) Folglich muss sein

$$\Delta_n = \Sigma(-1)^{\dot{\lambda}_k}.\begin{vmatrix} qsu & \ldots & z \\ prt & \ldots & y \end{vmatrix}.\Delta_{n-k} \qquad (20)$$

wobei Σ eine Summe von $\binom{n}{k}$ Summanden darstellt, die gebildet werden, wenn eine Zeile der Indices constant ist, während die andere alle Combinationen $k$ter Classe der Elemente 1, 2, 3 ... n durchläuft.

i) Weil die constanten Indices auf $\binom{n}{k}$ verschiedene Arten combinirt werden können, so gibt es nach obiger Formel $\binom{n}{k}$ verschiedene mögliche Entwicklungen.

k) Da der erste Factor $\begin{vmatrix} qsu & \ldots & z \\ prt & \ldots & y \end{vmatrix}$ eine Unterdeterminante $k$ten Grades ist, so kann

$$\Delta_n = \Sigma(-1)^{i_k} \Delta_k \Delta_{n-k} \qquad (21)$$

gesetzt werden, wo Δ_k eine beliebige Unterdeterminante $k$ten Grades und Δ_{n-k} die adjuncte Unterdeterminante $(n-k)$ten Grades bedeutet, welche aus Δ_n entsteht, indem man jene Reihen weglässt, die in Δ_k erscheinen. i_k bedeutet die Summe der Indices von Δ_k.

1) Weil aber die Ordnung beider Factoren umgekehrt werden kann, so kann man unter i_k auch die Summe der Indices von Δ_{n-k} verstehen. Das Vorzeichen jedes Teilproductes resultirt also sowohl aus dem ersten, als auch aus dem zweiten Factor des Teilproductes, was auch aus dem Grunde folgt, dass die Summen der Indices beider Factoren zugleich gerade oder ungerade Zahlen sein müssen, weil die Summe aller Indices stets eine gerade Zahl ist.

17) Um also eine Determinante $n$ten Grades in Teilproducte aus je einer Unterdeterminante $k$ten und einer $(n-k)$ten Grades zu zerlegen, bilde man aus den Indices 1, 2, 3 ... n eine beliebige Combination $k$ter Classe. Diese setze man entweder als erste oder zweite Indices der Unterdeterminante $k$ten Grades und behalte sie constant in allen Teilproducten.

Die constanten Indices der Unterdeterminante $(n-k)$ten Grades erhält man, wenn man alle Indices, die in der früheren Combination nicht vorkommen, in natürlicher Ordnung in dieselbe Zeile des zweiten Factors setzt.

Die variablen Indices des ersten Factors bilden alle Combinationen $k$ter Classe sämmtlicher Indices. Die variablen Indices des zweiten Factors enthalten immer alle übrigen Indices, die in der ersten Combination nicht vorkommen, in der natürlichen Ordnung.

Das Vorzeichen jedes Teilproductes ist + oder —, jenachdem die Summe sämmtlicher Indices eines der beiden Factoren eine gerade oder ungerade Zahl ist.

XXIV.

Ueber Unterdeterminanten einer adjungirten Determinante.

Von

F. Hoza.

Der folgende Satz wurde ursprünglich von Jacobi gefunden aber von Borchardt allgemein bewiesen *). Ich erlaube mir diesen Beweis auf eine Art zu reproduciren, die, meiner Ansicht nach, Anfängern besser entsprechen dürfte.

Satz. Jede Unterdeterminante Δ_r' des $r$ten Grades einer adjungirten Determinante Δ' ist gleich der $(r-1)$ten Potenz der ursprünglichen Determinante Δ multiplicirt mit jener Unterdeterminante Δ_{n-r} derselben, welche bei deren Entwickelung als Coefficient der Unterdeterminante $r$ten Grades Δ_r auftritt.

Beweis. Es sei gegeben die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und ihre adjungirte

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

wo

$$A_{ki} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ki}}.$$

Bilden wir aus Δ und Δ' Unterdeterminanten $r$ten Grades, indem wir r beliebige Zeilen $p_1, p_2 \dots p_r$ und Colonnen $q_1, q_2 \dots q_r$ auswählen, so erhalten wir

---

*) Siehe Baltzer, Determinanten, 1875, S. 58. Vergleiche auch Günther, Determinantentheorie, 1875, S. 77.

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{p_1q_1} & a_{p_1q_2} & \dots & a_{p_1q_r} \\ a_{p_2q_1} & a_{p_2q_2} & \dots & a_{p_2q_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p_rq_1} & a_{p_rq_2} & \dots & a_{p_rq_r} \end{vmatrix}$$

und

$$\Delta_r' = \begin{vmatrix} A_{p_1q_1} & A_{p_1q_2} & \dots & A_{p_1q_r} \\ A_{p_2q_1} & A_{p_2q_2} & \dots & A_{p_1q_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{p_rq_1} & A_{p_rq_2} & \dots & A_{p_rq_r} \end{vmatrix}$$

Nach dem Laplaceschen Determinantensatze ist nun

$$\Delta'_r = \left|\begin{array}{ccc|cccccc} A_{p_1q_1} & \dots & A_{p_1q_r} & A_{p_1 1} & \dots & A_{p_1(q_1-1)} & A_{p_1(q_1+1)} & \dots & A_{p_1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \mathrm{I} & & & & \mathrm{II} & & & \\ A_{p_rq_1} & \dots & A_{p_rq_r} & A_{p_r 1} & \dots & A_{p_r(q_1-1)} & A_{p_r(q_1+1)} & \dots & A_{p_rn} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0\ 1 & \dots & 0 & 0 & & 0 \\ & \mathrm{III} & & & & \mathrm{IV} & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & 1 \end{array}\right|$$

Die mit I bezeichnete Abteilung enthält die Elemente von Δ_r' in r Zeilen und Colonnen; II enthält die in diesen r Zeilen fehlenden Elemente von Δ' in natürlicher Ordnung und besteht daher bloss aus $(n-r)$ Colonnen; III enthält in $(n-r)$ Zeilen und r Colonnen lauter Nullen, und IV besteht aus $(n-r)$ Zeilen und ebenso viel Colonnen von Nullen, bloss die Diagonale dieser Abteilung enthält lauter Einheiten.

$$\pm \Delta = \left|\begin{array}{cc|cccc} a_{p_1q_1} & \dots a_{p_1q_r} & a_{p_1 1} & \dots a_{p_1(q_1-1)} & a_{p_1(q+1)} & \dots a_{p_1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathrm{I} & & & \mathrm{II} & & \\ a_{p_rq_1} & \dots a_{p_rq_r} & a_{p_r 1} & \dots a_{p_r(q_1-1)} & a_{p_r(q_1+1)} & \dots a_{p_rn} \\ \hline a_{1q_1} & \dots a_{1q_r} & a_{11} & \dots a_{1(q_1-1)} & a_{1(q_1+1)} & \dots a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathrm{III} & & & \mathrm{IV} & & \\ a_{(p_1-1)q_1} & \dots a_{(p_1-1)q_r} & a_{(p_1-1)1} & \dots a_{(p_1-1)(q_1-1)} & a_{(p_1-1)(q_1+1)} & \dots a_{(p_1-1)n} \\ a_{(p_1+1)q_1} & \dots a_{(p_1+1)q_r} & a_{(p_1+1)1} & \dots a_{(p_1+1)(q_1-1)} & a_{(p_1+1)(q_1+1)} & \dots a_{(p_1+1)n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{nq_1} & \dots a_{nq_r} & a_{n1} & \dots a_{n(q_1-1)} & a_{n(q_1+1)} & \dots a_{nn} \end{array}\right|$$

Die Abteilung I enthält die Elemente von Δ_r und IV die Elemente der adjungirten Unterdeterminante Δ_{n-r}. Die Anzahl der Zeilen und Colonnen jeder Abteilung stimmt mit der Anzahl in der gleichnamigen Abteilung von Δ_r' überein.

Durch Multiplication der beiden Determinanten Δ_r' und $\pm\Delta$ erhält man, indem man jede Zeile der letzteren successive mit allen Zeilen der ersteren multiplicirt:

$$\pm\Delta\Delta_r' = \left|\begin{array}{cccc|cccc} \Delta & 0 & \dots & 0 & a_{p_1 1} & a_{p_1 2} & \dots & a_{p_1 n} \\ 0 & \Delta & \dots & 0 & a_{p_2 1} & a_{p_2 2} & \dots & a_{p_2 n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \Delta & a_{p_r 1} & a_{p_r 2} & \dots & a_{p_r n} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}\right|$$

Nach dem Laplaceschen Determinantensatze muss daher sein

$$\pm\Delta\Delta_r' = (\Delta)^r . \Delta_{n-r}$$

und

$$\pm\Delta_r' = (\Delta)^{r-1} . \Delta_{n-r}.$$

Königgräz am 8. Mai 1876.

XXV.

Ueber das Multiplicationstheorem zweier Determinanten *n* ten Grades.

Von

F. Hoza.

Wenn man 2 Determinanten *n* ten Grades

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{array}\right|$$

und

$$\varDelta' = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ . & . & . \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \, b_2 \, b_3 \, \dots \, b_n \\ 1 \;\, 2 \;\, 3 \, \dots \, n \end{vmatrix}$$

mit einander multiplicirt, so erhält man wieder eine Determinante $n$ten Grades

$$\varDelta'' = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ . & . & . \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 \, c_2 \, c_3 \, \dots \, c_n \\ 1 \;\, 2 \;\, 3 \, \dots \, n \end{vmatrix},$$

in welcher c_{pq} im Allgemeinen auf 4 verschiedene Arten gebildet werden kann *).

Beschränken wir uns bloss auf die erste Art, da die übrigen aus ihr folgen, so muss sein

$$c_{pq} = a_{p_1} b_{q_1} + a_{p_2} b_{q_2} + a_{p_3} b_{q_3} + \dots + a_{pn} b_{qn}.$$

Wir wollen nun versuchen auf combinatorischen Wege darzutun, dass

$$\varDelta'' = \varDelta . \varDelta'.$$

Entwickelt man die einzelnen Elemente der Determinante $\varDelta''$, so erhält man

$$\varDelta'' = \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + \dots + a_{1n} b_{1n} & \dots & a_{11} b_{n1} + a_{12} b_{n2} + \dots + a_{1n} b_{nn} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{12} + \dots + a_{2n} b_{1n} & \dots & a_{21} b_{n1} + a_{22} b_{n2} + \dots + a_{2n} b_{nn} \\ . \; . \; . \; . \; . \; . & . \; . \; . & . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{n1} b_{11} + a_{n2} b_{12} + \dots + a_{nn} b_{1n} & \dots & a_{n1} b_{n1} + a_{n2} b_{n2} + \dots + a_{nn} b_{nn} \end{vmatrix}$$

Diese Determinante enthält n Colonnen, wovon hier nur die erste und $n$te aufgeschrieben wurde. Jede dieser Colonnen besteht aus n Teilcolonnen. Um nun $\varDelta''$ in einfache Determinanten zu zerlegen, nehmen wir aus jeder grossen Colonne nur eine der Teilcolonnen und betrachten diese n Teilcolonnen als Colonnen einer Teildeterminante $\varDelta_k$, deren allgemeine Form:

$$\varDelta_k = \begin{vmatrix} a_{1k_1} . b_{1k_1} & a_{1k_2} . b_{2k_2} & \dots & a_{1k_n} . b_{nk_n} \\ a_{2k_1} . b_{1k_1} & a_{2k_2} . b_{2k_2} & \dots & a_{2k_n} . b_{nk_n} \\ . \; . \; . & . \; . \; . & . \; . & . \; . \; . \\ a_{nk_1} . b_{1k_1} & a_{nk_2} . b_{2k_2} & \dots & a_{nk_n} . b_{nk_n} \end{vmatrix}$$

ist, so dass

$$\varDelta'' = \Sigma \varDelta_k.$$

---

*) Baltzer, Determinanten, 1875. S. 49.

Die Determinante enthält in ihren Colonnen gemeinschaftliche Factoren, die man herausheben kann, wodurch man erhält

$$\Delta_k = b_{1k_1} b_{2k_2} \dots b_{nk_n} \begin{vmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \dots & a_{1k_n} \\ a_{2k_1} & a_{2k_2} & \dots & a_{2k_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{nk_1} & a_{nk_2} & \dots & a_{nk_n} \end{vmatrix}$$

$$= b_{1k_1} b_{2k_2} \dots b_{nk_n} \begin{vmatrix} a_{k_1} & a_{k_2} & \dots & a_{k_n} \\ 1 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

Die Indices $k_1 k_2 \dots k_n$ sind Variationen $n$ter Classe, mit beliebiger Wiederholung, 1, 2, ... n.

Die Anzahl solcher Variationen ist n^n, folglich muss Δ'' aus n^n Teildeterminanten von der Form Δ_k bestehen.

Unter den Variationen $(k_1 k_2 \dots k_n)$ sind erstens solche, in denen sich kein Element wiederholt. Das sind blosse Permutationen und ihre Anzahl beträgt $n!$

Jede solche Permutation kann aus der ursprünglichen Complexion

$$1,\ 2,\ 3,\ \dots\ n$$

durch successive Vertauschung von zwei Elementen gebildet werden.

Der ersten Complexion entspricht die Determinante

$$\Delta_{gh} = b_{11} b_{22} \dots b_{gg} \dots b_{hh} \dots b_{nn} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_g & \dots & a_h & \dots & a_n \\ 1 & 2 & \dots & g & \dots & h & \dots & n \end{vmatrix}$$

Vertauscht man g mit h, so erhält man

$$\Delta_{hg} = b_{11} b_{22} \dots b_{gh} \dots b_{hg} \dots b_{nn} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_h & \dots & a_g & \dots & a_n \\ 1 & 2 & \dots & g & \dots & h & \dots & n \end{vmatrix}$$

$$= - b_{11} b_{22} \dots b_{gh} \dots b_{hg} \dots b_{nn} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_g & \dots & a_h & \dots & a_n \\ 1 & 2 & \dots & g & \dots & h & \dots & n \end{vmatrix}$$

$$= - b_{11} b_{22} \dots b_{gh} \dots b_{hg} \dots b_{nn} . \Delta.$$

Jeder Vertauschung entspricht also bloss eine Veränderung des Vorzeichens des Productes $b_{1k_1} b_{2k_2} \dots b_{nk_n}$.

Addirt man nun alle so erhaltenen Teildeterminanten, so kann man Δ als gemeinschaftlichen Factor herausheben und bekommt zur Summe der andern Factoren die Determinante Δ'.

Folglich wird die Summe jener Δ_k, die durch blosse Permutation entstehen, durch

$$\Delta_k' = \Delta . \Delta'$$

dargestellt werden.

Zweitens betrachten wir solche Teildeterminanten Δ_k, welche den übrigen Variationen $(k_1 k_2 \ldots k_n)$ entsprechen. In jeder solchen Variation sind wenigstens 2 gleiche Elemente

$$k_l = k_m$$

und die entsprechende Teildeterminante

$$\Delta_{k_l k_m} = b_{1k_1} b_{2k_2} \ldots b_{lk_l} \ldots b_{mk_m} \ldots b_{nk_n} \begin{vmatrix} a_{k_1} & a_{k_2} & \ldots & a_{k_l} & \ldots & a_{k_m} & \ldots & a_{k_n} \\ 1 & 2 & \ldots & l & \ldots & m & \ldots & n \end{vmatrix}.$$

Sei nun

$$\Delta_k'' = \Sigma \Delta_{k_l k_m},$$

so muss sein

$$\Delta'' = \Delta_k' + \Delta_k'' = \Delta\Delta' + \Delta_k''.$$

Jede Determinante von der Form

$$\begin{vmatrix} a_{k_1} & a_{k_2} & \ldots & a_{k_l} & \ldots & a_{k_m} & \ldots & a_{k_n} \\ 1 & 2 & \ldots & l & \ldots & m & \ldots & n \end{vmatrix}$$

enthält aber 2 gleiche Colonnen, welche den Elementen a_{k_l} und a_{k_m} entsprechen, folglich ist dieselbe $= 0$ und

$$\Delta_{k_l k_m} = 0,$$

somit auch

$$\Delta_k'' = 0,$$

woraus folgt, dass

$$\Delta'' = \Delta\Delta' \text{ *)}.$$

Königgräz am 7. Mai 1876.

---

*) Siehe Salmon-Fiedler, Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transform. Leipzig 1863, S. 15.
und Günther, Lehrbuch der Determinantentheorie, Erlangen 1875, S. 61.



XXVI.

Beispiel der Bestimmung einer Fläche aus der Indicatrix der Normale.

Von

R. Hoppe.

---

§. 1.

Die Richtungscosinus p, q, r der Normale einer gesuchten Fläche seien in Parametern der Krümmungslinien u, v bestimmt durch

$$p \pm q = \sqrt{(1 \mp u)(1 \pm v)}; \quad r = \sqrt{uv}$$

Die Werte von p, q, r als Coordinaten eines mit u, v variirenden Punkts gedacht, stellen auf der Kugelfläche

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1$$

ein orthogonales Curvensystem dar; denn erstlich ist

$$p^2 + q^2 = \tfrac{1}{2}(p+q)^2 + \tfrac{1}{2}(p-q)^2 = 1 - uv = 1 - r^2$$

und ferner findet man:

$$\frac{\partial(p \pm q)}{\partial u}\frac{\partial(p \pm q)}{\partial v} = -\tfrac{1}{4}; \qquad \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v} = \tfrac{1}{4}$$

woraus:

$$\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v} + \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v} = \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{4} = 0$$

Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, so werden nach N. XVII. §. 25. die Hauptkrümmungsradien der gesuchten Fläche ϱ_1, ϱ_2 durch die Gleichungen bestimmt:

$$\frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial u} \frac{\partial \log R_1}{\partial v} = \frac{\partial \varrho_1}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial R_1}{R_1 R_2 \partial v} \tag{1}$$

$$\varrho_2 = \varrho_1 + \frac{\partial \varrho_1}{\partial v} R_1 : \frac{\partial R_1}{\partial v} \tag{2}$$

wo

$$R_1^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2; \quad R_2^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2$$

gesetzt ist, und nach Integration der Gl. (1) ist die Fläche dargestellt durch

$$x = -\int \left(\varrho_1 \frac{\partial p}{\partial u} \partial u + \varrho_2 \frac{\partial p}{\partial v} \partial v \right)$$

nebst analogen Ausdrücken für y, z.

Im vorliegenden Falle findet man die Werte:

$$R_1^2 = \frac{1}{4u} \frac{u+v}{1-u^2}; \qquad R_2^2 = \frac{1}{4v} \frac{u+v}{1-v^2}$$

woraus:

$$\frac{\partial R_1}{R_1 \partial v} = \frac{1}{2} \frac{1}{u+v}; \qquad \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\partial R_1}{R_1 R_2 \partial v} = -\frac{3}{2} \frac{1}{u+v}$$

und die Gl. (1) (2) lauten:

$$\frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial u \partial v} + \frac{1}{2} \frac{1}{u+v} \frac{\partial \varrho_1}{\partial u} + \frac{3}{2} \frac{1}{u+v} \frac{\partial \varrho_1}{\partial v} = 0 \tag{3}$$

$$\varrho_2 = \varrho_1 + 2(u+v) \frac{\partial \varrho_1}{\partial v} \tag{4}$$

Der Gl. (3) kann man durch homogene ganze Functionen jedes Grades genügen. Um sie für solche Lösungen einzurichten, setzen wir

$$u = vw$$

dann geht sie über in

$$v \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial v \partial w} - w \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial w^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{w+1} \left\{ 3v \frac{\partial \varrho_1}{\partial v} - (5w+1) \frac{\partial \varrho_1}{\partial w} \right\} = 0$$

Ihre Lösung hat die Form

$$\varrho_1 = v^n W = v^n w_1 (a + b w_2) \tag{5}$$

wo W, w_1, w_2 Functionen von w bezeichnen, und n eine positive ganze Zahl oder 0 sein mag. Nach Einführung erhält man:

$$\{2w(w+1) w_1'' - [(2n-5) w + 2n - 1] w_1' - 3n w_1\} (a + b w_2)$$
$$+ \left\{ 2w(w+1) \left(\frac{w_2''}{w_2'} + 2 \frac{w_1'}{w_1} \right) - [(2n-5) w + 2n - 1] \right\} b w_1 w_2' = 0$$

also zur successiven Bestimmung von w_1 und w_2:

$$2w(w+1)w_1'' = [(2n-5)w+2n-1]w_1'+3nw_1 \tag{6}$$

$$\frac{w_2''}{w_2'}+2\frac{w_1'}{w_1} = \frac{(2n-5)w+2n-1}{2w(w+1)} \tag{7}$$

Da für $a=1$, $b=0$, W und w_1 identisch werden, so muss auch sein

$$2w(w+1)W'' = [(2n-5)w+2n-1]W'+3nW$$

Gl. (7) giebt integrirt:

$$w_2 = \int \frac{\sqrt{w}\,\partial w}{(w+1)^2 w_1^2}$$

Gl. (6) wird erfüllt durch

$$w_1 = \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k (n)_k \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\,\Gamma(n-k+\frac{3}{2})}{\Gamma(n+2)}w^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k (n)_k w^{n-k}\int_0^1 (1-t)^{k-\frac{1}{2}} t^{n-k+\frac{1}{2}}\partial t$$

$$= \int_0^1 \{t(w+1)-1\}^n \partial t \sqrt{\frac{t}{1-t}}$$

wo $(n)_k$ den Binomialcoefficienten bezeichnet. Jeder solchen ganzen Function $n$ten Grades w_1 entspricht dann ein logarithmisches Integral w_2; aus beiden setzt sich das entsprechende W zusammen, und hieraus geht durch Superposition der allgemeinste Ausdruck des ersten Hauptkrümmungsradius

$$\varrho_1 = \sum_{n=0}^{n=\infty} v_1^n w_1(a+bw_2) \tag{8}$$

enthaltend zwei unendliche Reihen willkürlicher Constanten a, b, gleichgeltend zwei willkürlichen Functionen einer Variabeln, hervor.

Um ϱ_2 zu finden, hat man erst die Gl. (4), welche für unabhängige u, v gilt, auf unabhängige v, w zu reduciren. Hierbei geht $\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}$ über in

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} - \frac{w}{v}\frac{\partial \varrho_1}{\partial w} = \frac{n\varrho_1}{v} - \frac{w}{v}\frac{\partial \varrho_1}{\partial w}$$

gültig für die homogene Speciallösung. Dem Werte (5) entspricht daher

$$\varrho_2 = (2nw+2n+1)\varrho_1 - 2w(w+1)\frac{\partial \varrho_1}{\partial w}$$

$$= v^n\{[(2nw+2n+1)w_1 - 2w(w+1)w_1'](a+bw_2) - 2bw(w+1)w_1w_2'\}$$

Berechnet man den Wert der mit a multiplicirten Klammer, die wir mit w_2 bezeichnen, so findet man:

$$w_2 = (2nw+2n+1)w_1 - 2w(w+1)w_1'$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k (n)_k \frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})\Gamma(n-k+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+2)} w^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k (n)_k w^{n-k} \int_0^1 (1-t)^{k+\frac{1}{2}} t^{n-k-\frac{1}{2}} \partial t$$

$$= \int_0^1 \{t(w+1)-1\}^n \partial t \sqrt{\frac{1-t}{t}}$$

und der zum Werte (8) von ϱ_1 gehörige Wert des zweiten Hauptkrümmungsradius ist

$$\varrho_2 = \sum_{n=0}^{n=\infty} v^n \{w_3(a+bw_2) - 2bw(w+1)w_1 w_2'\} = \sum_{n=0}^{n=\infty} v^n W_1$$

wo die a, b in ϱ_2 mit den a, b in ϱ_1 identisch sind.

§. 2.

Die Coordinaten ergeben sich leicht, wenn man zu den unabhängigen v, w übergeht. Hier wird

$$-\partial(x \pm y) = \varrho_1 \frac{\partial(p \pm q)}{\partial u} \partial u + \varrho_2 \frac{\partial(p \pm q)}{\partial v} \partial v$$

$$= \varrho_1 \sqrt{1 \pm v}\, \partial \sqrt{1 \mp u} + \varrho_2 \sqrt{1 \mp u}\, \partial \sqrt{1 \pm v}$$

$$= \varrho_1 \sqrt{1 \pm v}\, \partial \sqrt{1 \mp vw} + \varrho_2 \sqrt{1 \mp vw}\, \partial \sqrt{1 \pm v}$$

$$= \mp \frac{\varrho_1 w - \varrho_2 \pm (\varrho_1 + \varrho_2) vw}{2\sqrt{(1 \mp vw)(1 \pm v)}} \partial v \mp \tfrac{1}{2} \varrho_1 v \partial w \sqrt{\frac{1 \pm v}{1 \mp vw}}$$

$$= \mp \tfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \frac{(Ww - W_1)v^n \pm (W + W_1) wv^{n+1}}{\sqrt{(1 \mp vw)(1 \pm v)}} \partial v + Wv^{n+1} \partial w \sqrt{\frac{1 \pm v}{1 \mp vw}} \right\}$$

Sei zur Abkürzung

$$S_n = \int_0 \frac{v^n \partial v}{\sqrt{(1 \mp vw)(1 \pm v)}}$$

dann lautet das Integral:

$$x \pm y = \pm \tfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \{(Ww - W_1) S_n \pm (W + W_1) S_{n+1}\}$$

Dass keine Function von w hierzu zu addiren bleibt, ergiebt die partielle Differentiation nach w.

Zur Bestimmung von S_n ergiebt sich die recurrente Formel:

$$v^n Q - n S_{n-1} \pm \frac{2n+1}{2}(w-1) S_n + (n+1) w S_{n+1} = 0$$

wo $Q = \sqrt{(1 \mp vw)(1 \pm v)}$. Eliminirt man $S_1, S_2, \ldots S_{n-1}$, so kommt:

$$\begin{vmatrix} Q \pm \frac{w-1}{2} S_0 & w & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ vQ - S_0 & \pm 3\frac{w-1}{2} & 2w & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ v^2 Q & -2 & \pm 5\frac{w-1}{2} & 3w & \ldots & 0 & 0 \\ v^3 Q & 0 & -3 & \pm 7\frac{w-1}{2} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ v^{n-2} Q & 0 & 0 & 0 & \ldots & \pm(2n-3)\frac{w-1}{2} & (n-1)w \\ v^{n-1} Q + nwS_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & -(n-1) & \pm(2n-1)\frac{w-1}{2} \end{vmatrix} = 0$$

und zwar ist

$$S_0 = \mp \frac{2}{\sqrt{w}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 \mp vw}{w(1 \pm v)}}$$

In gleicher Weise ergiebt sich:

$$\begin{aligned} -\partial z &= \varrho_1 \frac{\partial r}{\partial u} \partial u + \varrho_2 \frac{\partial r}{\partial v} \partial v \\ &= \varrho_1 \sqrt{v}\, \partial \sqrt{u} + \varrho_2 \sqrt{u}\, \partial \sqrt{v} \\ &= \varrho_1 \sqrt{v}\, \partial \sqrt{vw} + \varrho_2 \sqrt{vw}\, \partial \sqrt{v} \\ &= \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} \sqrt{w}\, \partial v + \frac{\varrho_1 v}{2\sqrt{w}} \partial w \\ &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \frac{W + W_1}{2} \sqrt{w} \,.\, v^n \partial v + v^{n+1} \frac{W \partial w}{2\sqrt{w}} \right\} \end{aligned}$$

und nach Integration:

$$z = -\sum_{n=0}^{n=\infty} v^{n+1} \frac{W + W_1}{n+1} \frac{\sqrt{w}}{2} \,.$$

Da der Coefficient von ∂w den Factor v^{n+1} hat, so ist ersichtlich, dass zum Integral keine Function von w hinzutreten kann.

§. 3.

Die Fundamentalgrössen der im vorigen dargestellten Fläche sind

$$e=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=R_1^2\varrho_1^2$$

$$g=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=R_2^2\varrho_2^2$$

$$E=\frac{e}{\varrho_1}=R_1^2\varrho_1;\qquad G=\frac{g}{\varrho_2}=R_2^2\varrho_2$$

und $f=0$; $F=0$. Geht man zu den Parametern $u_1=x$, $v_1=y$ über, wo die Functionsdeterminante den Wert hat

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=rt$$

so dass

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\varrho_2}{rt}\frac{\partial q}{\partial v};\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\varrho_1}{rt}\frac{\partial q}{\partial u}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\varrho_2}{rt}\frac{\partial p}{\partial v};\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\varrho_1}{rt}\frac{\partial p}{\partial u}$$

wird, so entsprechen den neuen Parametern die Fundamentalgrössen

$$e_1=e\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+g\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\varrho_1\varrho_2}{rt}\right)^2\left\{\left(R_1\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2+\left(R_2\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2\right\}$$

$$g_1=e\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+g\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\varrho_1\varrho_2}{rt}\right)^2\left\{\left(R_1\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2+\left(R_2\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2\right\}$$

$$E_1=E\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+G\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=\frac{\varrho_1\varrho_2}{(rt)^2}\left\{\varrho_2\left(R_1\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2+\varrho_1\left(R_2\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2\right\}$$

$$G_1=E\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+G\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=\frac{\varrho_1\varrho_2}{(rt)^2}\left\{\varrho_2\left(R_1\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2+\varrho_1\left(R_2\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2\right\}$$

woraus:

$$\begin{vmatrix}e_1 & g_1\\ E_1 & G_1\end{vmatrix}=\frac{(\varrho_1\varrho_2)^3}{(rt)^4}\begin{vmatrix}R_1^2 & \varrho_2R_1^2\\ R_2^2 & \varrho_1R_2^2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2 & \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2\\ \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 & \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(\varrho_1\varrho_2)^3}{(rt)^3}R_1^2R_2^2(\varrho_1-\varrho_2)\left(\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}+\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v}\right)$$

Nun ist

$$2\left(\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}+\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v}\right)=\frac{\partial(p+q)}{\partial u}\frac{\partial(p+q)}{\partial v}+\frac{\partial(p-q)}{\partial u}\frac{\partial(p-q)}{\partial v}=\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}=0$$

folglich

$$\begin{vmatrix} e_1 & g_1 \\ E_1 & G_1 \end{vmatrix}=0$$

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien für die Parameter x, y, in denen sie früher ausschliesslich aufgestellt zu werden pflegte, lautet:

$$\begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ e_1 & f_1 \end{vmatrix}\partial x^2-\begin{vmatrix} G_1 & E_1 \\ g_1 & e_1 \end{vmatrix}\partial x\partial y+\begin{vmatrix} F_1 & G_1 \\ f_1 & g_1 \end{vmatrix}\partial y^2=0$$

daher entspricht die hier dargestellte Fläche dem von Fuchs in Crelle's Journal, Bd. 58. behandelten Falle, wo das Mittelglied der Differentialgleichung null ist. Er stellt die Gleichung der Fläche durch ein bestimmtes Integral dar, welches als Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}-\frac{1}{t}\frac{\partial\omega}{\partial t}$$

die Grösse

$$\omega=-\frac{px+qy+rz}{r}$$

bestimmt, woraus dann die einzelnen Coordinaten durch partielle Differentiation gefunden werden (vergl. Crelle J. Bd. 58. Seite 369.). Der gegenwärtige Reihenausdruck der Fläche, welcher zu dem eben genannten Integralausdruck in keiner so nahen Beziehung steht, dass sich einer aus dem andern auf kurzem Wege ableiten liesse, hat das besonders für sich, dass er die Coordinaten direct in Parametern der Krümmungslinien darstellt, und die Werte der Hauptkrümmungsradien, die sich aus jenem nur durch sehr umständliche Rechnung ergeben, auf die leichteste Weise als

$$\varrho_1,\ \varrho_2=\frac{\partial z}{\partial r}\ \text{bzhw. für constantes } v,\ u$$

zu entnehmen gestattet.

Bei der Methode des citirten Aufsatzes musste zur Bestimmung der Krümmungslinien von den Parametern x, y auf neue Parameter übergegangen werden. Es ist bemerkenswert, dass auch in diesen das Mittelglied der Differentialgleichung null wird. Sei nämlich

$$\frac{p}{r}=\cot u_2;\quad \frac{q}{r}=\cot v_2$$

woraus:

$$\frac{1}{r^2}=\cot^2 u_2+\cot^2 v_2+1=\frac{1-\cos^2 u_2\cos^2 v_2}{\sin^2 u_2\sin^2 v_2} \tag{9}$$

dann wird

$$v-u=\frac{(p+q)^2-(p-q)^2}{2}=2pq$$

daher

$$(v+u)^2=4(p^2q^2+r^2)=4(p^2+r^2)(q^2+r^2)=\frac{4r^4}{\sin^2u_2\sin^2v_2}$$

also

$$v+u=\frac{2r^2}{\sin u_2\sin v_2}; \quad v-u=2r^2\cot u_2\cot v_2$$

woraus, mit Anwendung von (9):

$$u=\frac{\sin u_2\sin v_2}{1+\cos u_2\cos v_2}; \quad v=\frac{\sin u_2\sin v_2}{1-\cos u_2\cos v_2} \tag{10}$$

Durch partielle Differentiation ergeben sich die Relationen:

$$\frac{\partial u}{\partial v_2}=\frac{\sin u_2}{\sin v_2}\frac{\partial u}{\partial u_2}; \quad \frac{\partial v}{\partial v_2}=-\frac{\sin u_2}{\sin v_2}\frac{\partial v}{\partial u_2}$$

daher werden die neuen Fundamentalgrössen:

$$e_2=e\left(\frac{\partial u}{\partial u_2}\right)^2+g\left(\frac{\partial v}{\partial u_2}\right)^2; \quad g_2=\left\{e\left(\frac{\partial u}{\partial u_2}\right)^2+g\left(\frac{\partial v}{\partial u_2}\right)^2\right\}\left(\frac{\sin u_2}{\sin v_2}\right)^2$$

$$E_2=E\left(\frac{\partial u}{\partial u_2}\right)^2+G\left(\frac{\partial v}{\partial u_2}\right)^2; \quad G_2=\left\{E\left(\frac{\partial u}{\partial u_2}\right)^2+G\left(\frac{\partial v}{\partial u_2}\right)^2\right\}\left(\frac{\sin u_2}{\sin v_2}\right)^2$$

woraus sofort die zu beweisende Relation

$$\begin{vmatrix} G_2 & E_2 \\ g_2 & e_2 \end{vmatrix}=0$$

hervorgeht. Es zeigt sich, dass dies von allen Parametern gilt, welche die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial u_2}\frac{\partial v}{\partial v_2}+\frac{\partial v}{\partial u_2}\frac{\partial u}{\partial v_2}=0$$

erfüllen.

Infolge der Proportion

$$e_2:g_2=E_2:G_2$$

reducirt sich die Differentialgleichung der Krümmungslinien unabhängig von f_2 und F_2 sofort auf

$$e_2\partial u_2^2=g_2\partial v_2^2$$

das ist auf die Gleichung

$$\left(\frac{\partial u_2}{\sin^2 u_2}\right)^2=\left(\frac{\partial v_2}{\sin v_2}\right)^2$$

in welcher die Variabeln getrennt erscheinen. Die Integration würde uns nur zu den vorher bekannten Gleichungen (10) zurückführen.

XXVII.

Ueber eine Classe irrationaler Symmetriepunkte des Dreiecks.

Von

Emil Hain.

I.

Es gibt einen Symmetriepunkt P des Dreiecks ABC, für welchen die Summe der PA ein Minimum wird. Wir bezeichnen ihn mit M und nennen ihn den Minimumpunkt. Es ist $\angle BMC = 120^0$. Hieraus ergeben sich drei Gleichungen für die MA. Ihre Auflösung gibt:

$$MA = \frac{m^2 - a^2}{p}$$

$$m^2 = \frac{\Sigma a^2}{2} + \frac{2F}{\sqrt{3}}, \quad p^2 = \frac{\Sigma a^2}{2} + 2F\sqrt{3}$$

$$BC = a, \quad \triangle ABC = F$$

Diese Werte bestimmen den Flächeninhalt des Dreiecks BMC und die Normale von M auf BC. Wählen wir trimetrische Punktcoordinaten, so ist dann $M \equiv bc(m^2 - b^2)(m^2 - c^2)$ ein Symmetriepunkt 6. Dimension. Da aber F durch die Seiten a nicht rational ausgedrückt werden kann, so gehört M zur Gruppe der irrationalen Symmetriepunkte d. i. jener, deren trimetrische Punktcoordinaten durch keine rationale Function der Seiten a ausgedrückt werden können.

II.

Construirt man über den Seiten eines Dreieks nach Aussen gleichseitige Dreiecke, so schneiden sich die Verbindungsgeraden der Ecken des Dreiecks mit den

Gegenecken der gleichseitigen Dreiecke im Minimumpunkt.

A_1BC sei das über BC nach Aussen errichtete gleichseitige Dreieck. Dann ist mit der Abkürzung $\alpha' = 60^0 + \alpha$

$$\begin{array}{rlll} A \equiv & 1 & 0 & 0 \\ A_1 \equiv & -\sin 60^0 & +\sin\gamma' & +\sin\beta' \\ AA_1 \equiv & 0 & -\sin\beta' & +\sin\gamma' \\ BB_1 \equiv & +\sin\alpha' & 0 & -\sin\gamma' \\ CC_1 \equiv & -\sin\alpha' & +\sin\beta' & 0 \end{array}$$

BB_1 und CC_1 treffen sich im Symmetriepunkt:

$$\begin{aligned} \sin\beta' \sin\gamma' &\equiv \sin(60^0 + \beta) \sin(60^0 + \gamma) \\ &\equiv bc\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} + \frac{2F}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} + \frac{2F}{\sqrt{3}}\right) \\ &\equiv bc(m^2 - b^2)(m^2 - c^2) \end{aligned}$$

Wird nach Jnnen dieselbe Construction vorgenommen und sind A_2 die Spitzen dieser gleichseitigen Dreiecke, so ist:

$$\begin{array}{rlll} A_2 \equiv & +\sin 60^0 & -\sin(60^0 - \gamma) & -\sin(60^0 - \beta) \\ AA_2 \equiv & 0 & \sin(60^0 - \beta) & -\sin(60^0 - \gamma) \end{array}$$

Die AA_2 treffen sich im Punkte: $\sin(60^0 - \beta)\sin(60^0 - \gamma)$. Er fällt nicht mit M zusammen. Er werde bezeichnet mit N und heisse der conjugirte Punkt von M. Es ist:

$$N \equiv bc(n^2 - b^2)(n^2 - c^2), \quad n^2 = \frac{\Sigma a^2}{2} - \frac{2F}{\sqrt{3}}$$

Die Coordinaten von M und N unterscheiden sich nur im Vorzeichen von $\sqrt{3}$. Und zwar ist $\sqrt{3}$ im Ausdruck m positiv, in n negativ.

III.

Verbindet man den Minimumpunkt eines Dreieckes mit den Ecken desselben, so verhalten sich die Umkreisradien der drei so entstandenen Dreiecke wie die Seiten des Urdreiecks. Die dreifache Summe der Quadrate dieser Radien ist gleich der Summe der Quadrate über den Seiten des Urdreiecks.

Für den Umkreisradius r_a des Dreiecks BMC hat man:

$$r_a = \frac{BM \,.\, CM \,.\, BC}{4 \triangle BMC} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Auf dieselbe Eigenschaft $\angle BMC = 120^0$ gründet sich auch der Satz:

Werden vom Minimumpunkte eines Dreiecks zu den Ecken Gerade gezogen und die Höhenschnitte der so entstandenen Dreiecke mit einander verbunden, so hat dieses Dreieck der Höhenschnitte mit dem Urdreieck gleichen Flächeninhalt. (Archiv LVII 448).

IV.

Die Harmonikale des Punktes ξ_a ist die Gerade $\xi_b\xi_c$. Für $\xi_a = \sin\beta'\sin\gamma'$ ist $\xi_a\xi_b \equiv \sin\alpha'$. Die Harmonikale von M ist die Gerade $\sin(60^0+\alpha) = a(m^2-a^2)$. Der Abstand des Punktes mit den Seitennormalen p_a von der Geraden a_1 ist: $\Sigma a_1 p_a : N_1$, wo $N_1^2 = \Sigma a_1^2 - 2\Sigma b_1 c_1 \cos\alpha$. Für $a_1 = a(m^2-a^2)$ ist:

$$\Sigma a_1^2 = \Sigma a^2(m^2-a^2) = m^4\Sigma a^2 - 2m^2\Sigma a^4 + \Sigma a^6$$
$$-\Sigma b_1 c_1 \cos\alpha = \Sigma(m^2-b^2)(m^2-c^2)(a^2-b^2-c^2) =$$
$$-m^4\Sigma a^2 + 2m^2\Sigma a^4 + 3a^2b^2c^2 - \Sigma a^4(b^2+c^2).$$

Somit ist:

$$N_1^2 = \Sigma a^6 - \Sigma a^4(b^2+c^2) + 3a^2b^2c^2.$$

Es ist also N_1 unabhängig von m. Ist also m eine beliebige Grösse, so haben die Harmonikalen aller Punkte: $bc(m^2-b^2)(m^2-c^2)$ denselben Distanznenner. Somit hat auch die Harmonikale von $N \equiv bc(n^2-b^2)(n^2-c^2)$ denselben Distanznenner N_1. Ausserdem stimmt der im Archiv LVIII 168 aufgestellte Wert von N_1 für die Harmonikale des Inkreiscentrums des Mittendreiecks (des Spieker'schen Punktes) mit dem Werte von N_1 für M und N überein.

Der Spieker'sche Punkt und der Minimumpunkt eines Dreiecks haben also für ihre Harmonikalen denselben Distanznenner.

Der Abstand d eines Punktes mit den Seitennormalen p_a von der Harmonikalen des Minimumpunktes ist also:

$$d = \Sigma a p_a (m^2-a^2) : N_1$$

Ferner ist der Abstand d' desselben Punktes von der Harmonikalen des Punktes N:

$$d' = \Sigma a p_a (n^2-a^2) : N_1$$

Somit ist:

$$d - d' = (m^2-n^2)\Sigma a p_a : N_1 = 2F(m^2-n^2) : N_1$$

Wenn die beiden Harmonikalen einen Winkel bilden, so hat für jedes p_a die Gleichung $d - d' = \text{const.}$ keinen Sinn, ebenso kann aber dann auch nicht $d + d' = \text{const.}$ sein. Die Harmonikalen sind also parallel und d' ist negativ zu nehmen; somit gilt der Satz:

Die Harmonikalen des Minimumpunktes und seines conjugirten Punktes sind einander parallel; ihr Abstand ist:

$$\frac{8F^2}{\sqrt{3}} : \sqrt{\Sigma a^6 - \Sigma a^4(b^2+c^2) + 3a^2b^2c^2}$$

V.

Werden über den Seiten eines Dreiecks als Grundlinien ähnliche gleichschenklige Dreiecke entweder nach Aussen oder nach Innen construirt; so schneiden sich die Verbindungsgeraden der Scheitel dieser gleichschenkligen Dreiecke mit den Gegenecken des Urdreiecks in einem Punkte und zwar für die Construction nach Aussen im Punkte: $\sin(\lambda+\beta)\sin(\lambda+\gamma)$ und für die nach Innen im Punkte: $\sin(-\lambda+\beta)\sin(-\lambda+\gamma)$, wenn λ die Winkel an den Grundlinien dieser gleichschenkligen Dreiecke sind. (Archiv LV 333).

Nennen wir den Punkt $\sin(\lambda+\beta)\sin(\lambda+\gamma)$ den Punkt λ. Die Harmonikale von λ ist die Gerade $\sin(\lambda+\alpha)$. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} \sin(\lambda+\alpha) & \sin(\lambda+\beta) & \sin(\lambda+\gamma) \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

kann in zwei Determinanten zerlegt werden, von denen jede Null ist. Die Harmonikale $\cos\alpha$ ist die Harmonikale des Höhenschnittes. Somit sind die Harmonikalen der λ einander parallel und zwar der Harmonikalen des Höhenschnittes, welcher der Punkt $\lambda = \pm 90^0$ ist.

Die Verbindungsgerade zweier conjugirten Punkte $+\lambda$, $-\lambda$ ist:

$$\begin{vmatrix} \sin(\lambda+\alpha)\sin(\lambda+\gamma) & \sin(\lambda+\alpha)\sin(\lambda+\beta) \\ \sin(-\lambda+\alpha)\sin(-\lambda+\gamma) & \sin(-\lambda+\alpha)\sin(-\lambda+\beta) \end{vmatrix}$$

$$\equiv \sin(\lambda+\alpha)\sin(\lambda-\alpha) \begin{vmatrix} \sin(\lambda+\gamma) & \sin(\lambda+\beta) \\ \sin(\lambda-\gamma) & \sin(\lambda-\beta) \end{vmatrix}$$

$$\equiv \sin(\beta-\gamma)[\sin\lambda^2 - \sin\alpha^2]$$

Die Gerade $(+\lambda, -\lambda)$ geht somit durch den Schnittpunkt der Geraden $\sin(\beta-\gamma)$ und $\sin^2\alpha\sin(\beta-\gamma)$:

$$\begin{vmatrix} \sin(\gamma-\alpha) & \sin\beta^2\sin(\gamma-\alpha) \\ \sin(\alpha-\beta) & \sin\gamma^2\sin(\alpha-\beta) \end{vmatrix} \equiv \sin(\beta+\gamma) \equiv bc$$

Die Geraden $(+\lambda, -\lambda)$ bilden somit ein Stralenbüschel, dessen Centrum der Schwerpunkt ist.

Der Ort der Punkte x_a, deren Harmonikalen des Punktes p_a parallel sind, ist die Curve

$$\begin{vmatrix} x_bx_c & x_cx_a & x_ax_b \\ p_bp_c & p_cp_a & p_ap_b \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

Sie ist ein dem Urdreieck umschriebener Kegelschnitt. Für $x_a = \sin(\lambda+\beta)\sin(\lambda+\gamma)$, $p_a = \cos\beta\cos\gamma$ erhalten wir die Determinante eingangs dieses Paragraphen. Ihr Wert ist Null. Somit liegen die λ auf einem dem Urdreieck umschriebenen Kegelschnitt.

Wien, Jänner 1876.

XXVIII.

Allgemeine Beziehungen der Symmetriepunkte eines Dreiecks.

Von

Emil Hain.

I.

P sei ein Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC. Die PA treffen die BC in P_a. Die Geraden PA heissen die Ecktransversalen von P oder kurz die Transversalen dieses Punktes; die Strecken PA die oberen, die PP_a die unteren Abschnitte der Transversalen, die AP_a die Transversalstrecken, die BP_a die Seitenabschnitte.

Das Dreieck $P_aP_bP_c$ werde das Transversalenfusspunktdreieck genannt; es liegt mit dem Urdreieck collinear. Die P_bP_c treffen die BC in Punkten einer Geraden, der Harmonikalen von P.

Die Senkrechten von P auf die BC heissen die Seitennormalen von P; ihre Fusspunkte seien mit A_p bezeichnet, ihre Längen mit p_a. Befreit von einem gemeinschaftlichen Factor können letztere als trimetrische Punktcoordinaten gelten.

Diese Bezeichnungen reichen zur Definition einer grossen Reihe von Symmetriepunkten aus. So z. B. ist der Schwerpunkt der Punkt gleicher Seitenabschnitte. Das Inkreiscentrum characterisiren die gleichen Seitennormalen, das Umkreiscentrum die gleichen oberen Transversalabschnitte. Der Höhenpunkt ist derjenige Punkt, dessen Transversalen mit den Seitennormalen zusammenfallen.

II.

PA trifft BC in P_a. Für $P \equiv p_a$ ist $PA \equiv 0, p_b, p_c$. Somit sind die Seitennormalen der P_a:

$$\begin{array}{llll} P_a \equiv & 0 & \lambda_a p_b & \lambda_a p_c \\ P_b \equiv & \lambda_b p_a & 0 & \lambda_b p_c \\ P_c \equiv & \lambda_c p_a & \lambda_c p_b & 0 \end{array}$$

wo

$$\lambda_a = \frac{2F}{bp_b + cp_c}$$

Der Schwerpunkt S_1 des Dreiecks $P_aP_bP_c$ ist der Symmetriepunkt:

$$p_a(\lambda_b + \lambda_c) \equiv p_a(bp_b + cp_c)(2ap_a + bp_b + cp_c)$$

Liegen die S_1 auf einer Geraden a_1, so ist:

$$\Sigma a_1 p_a (bp_b + cp_c)(2ap_a + bp_b + cp_c) = 0$$

d. h. Liegen die Schwerpunkte von Transversalenfusspunktdreiecken auf einer Geraden, so liegen die Collineationscentra dieser Dreiecke mit dem Urdreieck auf einer Curve dritten Grades.

Sind A_p die Fusspunkte der Seitennormalen, so gibt die Figur:

$$\begin{array}{llll} A_p \equiv & 0 & p_b + p_a \cos\gamma & p_c + p_a \cos\beta \\ B_p \equiv & p_a + p_b \cos\gamma & 0 & p_c + p_b \cos\alpha \\ C_p \equiv & p_a + p_c \cos\beta & p_b + p_c \cos\alpha & 0 \end{array}$$

Somit ist der Schwerpunkt S_2 des Dreiecks $A_pB_pC_p$ der Symmetriepunkt:

$$2p_a + p_b \cos\gamma + p_c \cos\beta$$

Es sei x_a der Ort jener Punkte P, für welche S_2 auf der Geraden a_1 liegt. Es ist dann:

$$\Sigma a_1 (2x_a + x_b \cos\gamma + x_c \cos\beta) = \Sigma (2a_1 + b_1 \cos\gamma + c_1 \cos\beta) x_a = 0$$

Liegen die Schwerpunkte der Normalenfusspunktdreiecke auf einer Geraden, so liegen die Schnittpunkte dieser Normalen auch auf einer Geraden.

III.

Die Fusspunkte der Seitennormalen eines Punktes bilden als Ecken ein Dreieck, das im Allgemeinen mit dem Urdreieck nicht collinear liegt. Es ist die Bedingung der Collinearität zu bilden.

$P \equiv p_a$ sei ein Punkt, welcher derselben genügt. Es ist:

$$\begin{array}{llll} A & \equiv 1 & 0 & 0 \\ A_p & \equiv 0 & p_b + p_a \cos\gamma & p_c + p_a \cos\beta \\ AA_p & \equiv 0 & +(p_c + p_a \cos\beta) & -(p_b + p_a \cos\gamma) \end{array}$$

Die AA_p treffen sich in einem Punkt, wenn:

$$\begin{vmatrix} 0 & p_c + p_a \cos\beta & -(p_b + p_a \cos\gamma) \\ -(p_c + p_b \cos\alpha) & 0 & p_a + p_b \cos\gamma \\ p_b + p_c \cos\alpha & -(p_a + p_c \cos\beta) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \Pi(p_a + p_b \cos\gamma) - \Pi(p_a + p_c \cos\beta) = 0$$

Nun ist:

$$\Pi(p_a + p_b \cos\gamma) = (1 + \Pi \cos\alpha)\Pi p_a + \Sigma p_a p_c^2 \cos\alpha + \Sigma p_a p_b^2 \cos\beta \cos\gamma$$
$$\Pi(p_a + p_c \cos\beta) = (1 + \Pi \cos\alpha)\Pi p_a + \Sigma p_a p_b^2 \cos\alpha + \Sigma p_a p_c^2 \cos\beta \cos\gamma$$

Somit ist der Ort der Punkte P, für welche sich die AA_p in einem Punkte schneiden, die Curve:

$$\Sigma x_a \cos\alpha (x_b^2 - x_c^2) + \Sigma x_a \cos\beta \cos\gamma (x_c^2 - x_b^2)$$
$$= \Sigma x_a (x_b^2 - x_c^2)(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma) = 0$$

IV.

Die Distanz d zweier Punkte P und Q mit den Coordinaten p_a und q_a wird ausgedrückt durch die Formel:

$$d^2 = -\frac{abc}{4F^2} \Sigma a (p_b \lambda_p - q_b \lambda_q)(p_c \lambda_p - q_c \lambda_q)$$

wo

$$F = \triangle ABC$$

$$\lambda_p = \frac{2F}{\Sigma a p_a}, \qquad \lambda_q = \frac{2F}{\Sigma a q_a}$$

Eine einfache Umwandlung gibt:

$$d^2 = -\frac{abc \Sigma a (p_b \Sigma a q_a - q_b \Sigma a p_a)(p_c \Sigma a q_a - q_c \Sigma a p_a)}{(\Sigma a p_a . \Sigma a q_a)^2}$$

Sonach ist für die Entfernung a' der Punkte $P(p_a, p_b, p_c)$ und $A(1, 0, 0)$:

$$a'^2 = \frac{bc}{(\Sigma a p_a)^2} [(b p_b + c p_c)(b p_c + c p_b) - a^2 p_b p_c]$$

Setzen wir $\Sigma a'^2 = \text{const.} = e^2$, so folgt:

$$e^2 (\Sigma a p_a)^2 = \Sigma bc (b p_b + c p_c)(b p_c + c p_b) - abc \Sigma a p_b p_c$$

Nun ist:

$$(\Sigma a x_a)^2 = \Sigma a^2 x_a^2 + 2\Sigma bc x_b x_c$$

$$\Sigma bc(bx_b + cx_c)(bx_c + cx_b) = \Sigma a^2(b^2 + c^2)x_a^2 + \Sigma bc(b^2 + c^2)x_b x_c$$

Somit ist der Ort der Punkte P, für welche $\Sigma a'^2 = e^2$ ist, der Kegelschnitt:

$$\Sigma a^2(b^2 + c^2 - e^2)x_a^2 + \Sigma bc(b^2 + c^2 - 2e^2)x_b x_c = 0$$

Für $\Sigma \alpha_1 a'^2 = e^2$, wo α_1 beliebige Constanten von der Dimension Null bezeichnen, erhalten wir ebenfalls einen Kegelschnitt. Es können also die PA ebenfalls wie die PA_p für ein trimetrisches Coordinatensystem verwendet werden.

V.

Sind A' die Seitenmitten und ist die Gerade $A'A''$ parallel zu PA, so ist:

$$\begin{array}{rccc} PA \equiv & 0 & +p_c & -p_b \\ A'A'' \equiv & a(bp_b - cp_c) & +b(bp_b + cp_c) & -c(bp_b + cp_c) \end{array}$$

Die Gleichung der letzten Geraden genügt nemlich zunächst dem Punkte $A' \equiv 0, c, b$ und ausserdem verschwindet die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a(bp_b - cp_c) & +b(bp_b + cp_c) & -c(bp_b + cp_c) \\ 0 & +p_c & -p_b \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Somit ist $PA \parallel A'A''$.

Die Geraden $A'A''$ bilden ein Dreieck von der Fläche:

$$\frac{abcF\triangle^2}{\triangle_a \triangle_b \triangle_c}$$

Und zwar ist hier:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a(bp_b - cp_c) & +b(bp_b + cp_c) & -c(bp_b + cp_c) \\ -a(cp_c + ap_a) & +b(cp_c - ap_a) & +c(cp_c + ap_a) \\ +a(ap_a + bp_b) & -b(ap_a + bp_b) & +c(ap_a - bp_b) \end{vmatrix} = 0$$

Ferner wird $\triangle_a = 4abc\Sigma ap_a . ap_a$. Die Determinanten des Nenners werden also für endliche Punkte p_a, die nicht in den Dreieckseiten liegen, nicht Null. Kein Paar der $A'A''$ bildet ein System von Parallelen. Diese Geraden treffen sich also in einem Punkte und zwar im Symmetriepunkt:

$$bc(bp_b + cp_c).$$

VI.

Die Distanzformel in IV. gibt:

$$\overline{AP_a}^2 = \frac{bc(bp_c+cp_b)(bp_b+cp_c)-a^2bcp_bp_c}{(bp_b+cp_c)^2}$$

Der Ort der Punkte P, für welche

$$AP_a = BP_b = CP_c = f$$

ist ein Punktsystem, gegeben durch drei Gleichungen von der Form:

$$bc(bp_c+cp_b)(bp_b+cp_c)-a^2bcp_bp_c = f^2(bp_b+cp_c)^2$$

Die beiden andern Gleichungen werden durch cyklische Vertauschung erhalten. Wir erhalten aus der ersten:

$$p_b^2(b^2c^2-f^2b^2)+p_c^2(b^2c^2-f^2c^2)+p_bp_c bc(b^2+c^2-a^2-2f^2) = 0,$$

$$\frac{p_b^2}{p_c^2}+\frac{p_b}{p_c}\cdot\frac{bc(b^2+c^2-a^2-2f^2)}{b^2(c^2-f^2)} = -\frac{c^2(b^2-f^2)}{b^2(c^2-f^2)}$$

woraus folgt:

$$\frac{p_b}{p_c} = \frac{c}{b}\left[\frac{b^2+c^2-a^2-2f^2\pm\Phi_a}{2(c^2-f^2)}\right]$$

wo

$$\Phi_a = \sqrt{(b^2+c^2-a^2-2f^2)^2-4(b^2-f^2)(c^2-f^2)}$$

$$= \sqrt{(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2+4a^2f^2}$$

$$= 2\sqrt{a^2f^2-4F^2}$$

wo

$$16F^2 = (a+b+c)\,\Pi(b+c-a)$$

Ist nun p_a ein Symmetriepunkt, so muss f eine symmetrische Function der Seiten a sein. Also ist der Ausdruck:

$$b^2+c^2-a^2-2f^2\pm\Phi_a = 2a_1$$

nach b und c symmetrisch. Es ist sonach

$$\frac{p_b}{p_c} = \frac{c}{b}\,\frac{a_1}{c^2-f^2}$$

und

$$\frac{p_c}{p_b} = \frac{b}{c}\cdot\frac{a_1}{b^2-f^2}$$

woraus sich ergibt:

$$a_1^2 = (b^2-f^2)(c^2-f^2)$$

$$[b^2+c^2-a^2-2f^2\pm 2\sqrt{a^2f^2-4F^2}]^2 = 4(b^2-f^2)(c^2-f^2)$$

$$(b^2+c^2-a^2-2f^2)^2-4(b^2-f^2)(c^2-f^2)$$
$$\pm 4(b^2+c^2-a^2-2f^2)\sqrt{a^2f^2-4F^2}+4(a^2f^2-4F^2)=0$$

Nun ist

$$(b^2+c^2-a^2-2f^2)^2-4(b^2-f^2)(c^2-f^2)=\Phi_a{}^2=4(a^2f^2-4F^2)$$

Hieraus erhalten wir:

$$2\sqrt{a^2f^2-4F^2}\pm(b^2+c^2-a^2-2f^2)=0$$
$$4a^2f^2-16F^2=(b^2+c^2-a^2)^2-4f^2(b^2+c^2-a^2)+4f^4$$
$$f^4-f^2(b^2+c^2)=-b^2c^2$$

Hier erscheint f nur nach b und c symmetrisch; mithin gilt der Satz:

Es gibt kein ungleichseitiges Dreieck mit einem Symmetriepunkte gleicher Transversalstrecken.

Wien, Mai 1876.

XXIX.

Untersuchung über die binären lateralen Geraden.

Von

F. E. Thieme.

Erster Abschnitt.

Von den lateralen Geraden in einer auf der Coordinatenebene senkrecht stehenden Ebene.

§. 1. Es sei PMO Fig. 1. eine Ebene, in welcher PM senkrecht auf OMN; durch MP lege man eine Ebene $QMPR$ senkrecht auf der der ersten und zwar sei MQ senkrecht auf OMP. In der letzteren Ebene ziehe man $ABD \parallel OM$ und mache $BD = AB$; ferner ziehe man in der Ebene $QMPR$ die Gerade BC senkrecht auf MP, daher auch parallel zu MQ, und mache $BC = BA = BE$. Betrachtet man MP als Ordinatenachse, so wird, wenn man $BA = +a$ setzt, $BD = -a$ annehmen, so dass man bei dem Uebergange von der einen Seite der Ordinatenachse auf die andere mit -1 zu multipliciren hat. Bei dem Uebergange von BA auf BC, in der verticalen Ebene multiplicire man mit i, so dass $BC = i.\ BA = ia$ ist. Geht man von BC auf BD über, so macht man dieselbe Operation als vorher, es ist daher $BD = i.BC$ d. i. $-a = i^2.a$, oder $i^2 = -1$ d. i. $i = \sqrt{-1}$. Geht man daher von einem Punkte der Ebene PMO auf den entsprechenden Punkt der Ebene $QMPR$ über, so hat man den senkrechten Abstand von der Ebene mit $i = \sqrt{-1}$ zu multipliciren. Ebenso wird man schliessen ist $BE = -ia$, daher $BA = -i^2a = +a$.

Die Coordinatenebene heisse die Fundamentalebene, die senkrechte Ebene die Lateralebene, die Schnittlinie beider die Lateralachse.

Nimmt man die Ordinatenachse als Lateralachse, so entsprechen den Punkten der

Fundamentalebene $+y, +x$; $+y, -x$; $-y, +x$; $-y, -x$ die Punkte der
Lateralebene $+y, +ix$; $+y, -ix$; $-y, +ix$; $-y, -ix$.

Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Punkt $-y_1$, $-x_1$, so dass die neuen Achsen den alten parallel sind, so erhält man als Coordinaten $y+y_1$, $i(x+x_1)$.

§. 2. Zieht man in der Fundamentalebene die Gerade MA, in der Lateralebene die Gerade MC, so dass $\angle AMO = \angle CMQ$ ist, dann entspricht jedem Punkte der Geraden MA ein Punkt der Geraden MC der Lateralebene; wenn die erste Gerade dargestellt wird durch $y = ax$, so wird die Gerade der Lateralebene, die laterale Gerade, bestimmt durch $y = iax$. Hier sind MO und MB die zugehörigen Abscissenachsen, so dass $a = \operatorname{tg} CMQ$. Die Gleichung

$$y = iax$$

bezeichnet daher eine Gerade in einer auf der Fundamentalebene senkrecht stehenden Ebene; diese Gerade geht durch den Anfangspunkt der Coordinaten.

Ebenso bezeichnet

$$y + y_1 + ia(x + x_1) = 0$$

eine Gerade der vertikalen Lateralebene, welche durch den Punkt $-y_1$, $-x_1$ geht.

Für zwei in derselben Lateralebene enthaltene Gerade deren Achse parallel zur Ordinatenachse ist, muss x_1 immer denselben Wert haben, während die eine Gerade y_1, die andere y_2 als Ordinaten hat.

§. 3. Die beiden Gleichungen:

$$y + y_1 + iA(x + x_1) = 0$$
$$y + y_2 + iB(x + x_1) = 0$$

so wie auch ihr Product:

$$y^2 + i(A+B)yx - ABx^2 + [y_1 + y_2 + i(A+B)x_1]y$$
$$+ [-2ABx_1 + i(Ay_2 + By_1)]x + y_1 y_2 - ABx_1^2 + ix_1(Ay_2 + By_1) = 0 \quad \text{(I)}$$

stellen zwei laterale Gerade dar, wovon die eine die Fundamentalebene in dem Punkte $-y_1$, $-x_1$, die andere in dem Punkte $-y_2$, $-x_1$ die Fundamentalebene schneidet; die Tangente des Winkels, welchen die eine mit der zugehörigen Abscissenachse bildet, ist $-A$, bei der andern $-B$.

Man stelle Gl. (I) allgemein dar durch

$$y^2+(a+ib)yx+(c+id)x^2+(e+if)y+(g+ih)x+k+il=0 \quad \text{(II)}$$

Vergleicht man Gl. (II) mit Gl. (I), so ist $a=0$, $d=0$, so dass daher die Gleichung wird:

$$y^2+ibyx+cx^2+(e+if)y+(g+ih)x+k+il=0 \quad \text{(III)}$$

Es ist $b=A+B$, $c=-AB$; hat daher c einen negativen Wert, so ist $b^2>4c$; ferner ist $A=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\sqrt{b^2+4c}$, $B=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}\sqrt{b^2+4c}$;

$$e=y_2+y_1,\quad f=bx_1,\quad \text{daher}\quad x_1=\frac{f}{b},\quad g=\frac{2cf}{b}$$

$$h=Ay_2+By_1=\tfrac{1}{2}b(y_2+y_1)+\tfrac{1}{2}(y_2-y_1)\sqrt{b^2+4c},\quad y_2-y_1=\frac{2h-be}{\sqrt{b^2+4c}},$$

$$y_2=\tfrac{1}{2}e+\frac{2h-be}{\sqrt{b^2+4c}},\quad y_1y_2=\tfrac{1}{4}e^2-\frac{(2h-be)^2}{4(b^2+4c)},$$

$$y_1=\tfrac{1}{2}e-\frac{2h-be}{\sqrt{b^2+4c}},$$

$$k=y_1y_2+\frac{cf}{b^2}=\tfrac{1}{4}e^2+\frac{cf^2}{b^2}-\frac{(2h-be)^2}{4(b^2+4c)},\quad l=\frac{fh}{b}.$$

Dies giebt folgende Bedingungsgleichungen:

$$g=\frac{2cf}{b},\quad k=\tfrac{1}{4}e^2+\frac{cf^2}{b^2}-\frac{(2h-be)^2}{4(b^2+4c)},\quad l=\frac{fh}{b}\ \text{und}\ b^2>-4c,$$

wenn c negativ.

Es sind fünf Elemente zu bestimmen, dafür acht Constante gegeben, daher drei Bedingungsgleichungen.

Löst man Gl. (III) in Beziehung auf y und trägt die entsprechenden Werte ein, so ergiebt sich:

$$y+\tfrac{1}{2}ibx+\tfrac{1}{2}(e+if)=\pm\tfrac{1}{2}i\sqrt{b^2+4c}\left\{x+\frac{f}{b}+i\frac{2h-be}{\sqrt{b^2+4c}}\right\},$$

woraus man die beiden Gleichungen der lateralen Geraden erhält:

$$y+\tfrac{1}{2}e+\frac{2h-be}{2\sqrt{b^2+4c}}+\tfrac{1}{2}i(b-\sqrt{b^2+4c})\left(x+\frac{f}{b}\right)=0,$$

$$y+\tfrac{1}{2}e-\frac{2h-be}{2\sqrt{b^2+4c}}+\tfrac{1}{2}i(b+\sqrt{b^2+4c})\left(x+\frac{f}{b}\right)=0.$$

Hiernach erhält man aus der Gleichung

$$y^2 + 6iyx - 8x^2 + (4 + 12i)y - (32 - 4i)x - 44 + 82 = 0:$$

$$y - 2 + 2i(x + 2) = 0 \quad \text{d. i.} \quad y - 2 = i(x + 2)\,\mathrm{tg}\,116^0\,34',$$
$$y + 6 + 4i(x + 2) = 0 \qquad\qquad y + 6 = i(x + 2)\,\mathrm{tg}\,104^0\,2'.$$

§. 4. Wenn die Winkel der lateralen Geraden mit ihren Abscissenachsen sich zu 180^0 ergänzen, so wird aus Gl. (I), da $A + B = 0$ ist:

$$y^2 + A^2x^2 + (y_2 + y_1)y + (2A^2x_1 + iA(y_2 - y_1))x + y_1y_2 + A^2x_1^2 + ix_1A(y_2 - y_1) = 0.$$

Gl. (II) erhält die Form:

$$y^2 + cx^2 + ey + (g + ih)x + k + il = 0 \qquad \text{(IV)}$$

Die Bedingungsgleichungen sind:

$$c \text{ positiv}, \quad k = \tfrac{1}{4}e^2 - \tfrac{1}{4}\frac{h^2}{c} + \tfrac{1}{4}\frac{g^2}{c}, \quad l = \frac{gh}{2c}$$

Durch Eintragung dieser Bedingungsgleichungen erhält man für die beiden lateralen Geraden:

$$y + \tfrac{1}{2}e + \frac{h}{2\sqrt{c}} - i\sqrt{c}\left(x + \frac{g}{2c}\right) = 0,$$
$$y + \tfrac{1}{2}e - \frac{h}{2\sqrt{c}} + i\sqrt{c}\left(x + \frac{g}{2c}\right) = 0.$$

§. 5. Treffen sich die beiden lateralen Geraden in demselben Punkte der Lateralachse, so ist in Gl. (I) $y_2 = y_1$ und man erhält:

$$y^2 + i(A + B)yx - ABx^2 + [2y_1 + i(A + B)x_1]y + [-2ABx_1 + iy_1(A + B)]x + y_1^2 - ABx_1^2 + ix_1y_1(A + B) = 0.$$

Dadurch wird Gl. (II):

$$y^2 + ibyx + cx^2 + (e + if)y + (g + ih)x + k + il \qquad \text{(V)}$$

Die Bedingungsgleichungen sind:

$$b^2 > -4c,$$

wenn c negativ:

$$g = \frac{2cf}{b}, \quad h = \tfrac{1}{2}be, \quad k = \tfrac{1}{4}e^2 + \frac{cf^2}{b^2}, \quad l = \tfrac{1}{2}ef.$$

Trägt man diese Werte ein, so erhält man als Gleichung der beiden lateralen Geraden:

$$y + \tfrac{1}{2}e + \tfrac{1}{2}i(b - \sqrt{b^2 + 4c})\left(x + \frac{f}{b}\right) = 0,$$
$$y + \tfrac{1}{2}e + \tfrac{1}{2}i(b - \sqrt{b^2 + 4c})\left(x + \frac{f}{b}\right) = 0.$$

Wenn auch noch die Winkel, welche die lateralen Geraden mit ihren Abscissenachsen bilden, sich zu 180° ergänzen, so fallen die imaginären Coefficienten aus und die Gleichung wird:

$$y^2+cx^2+ey+gx+k=0 \qquad \text{(VI)}$$

Hier ist c stets positiv und $k=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}\frac{g^2}{c}$: dadurch erhält man die Gleichungen:

$$y+\tfrac{1}{2}e-i\sqrt{c}\left(x+\tfrac{1}{2}\frac{g}{c}\right)=0,$$

$$y+\tfrac{1}{2}e+i\sqrt{c}\left(x+\tfrac{1}{2}\frac{g}{c}\right)=0.$$

§. 6. Wenn die beiden lateralen Geraden durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen, so ist $y_1=0$, $x_1=0$ und Gl. (I) wird:

$$y^2+i(A+B)yx-ABx^2=0,$$

daher erhält Gl. (II) die Gestalt:

$$y^2+ibyx+cx^2=0 \qquad \text{(VII)}$$

Da zwei Elemente zu bestimmen, auch zwei Constante gegeben sind, so giebt es keine Bedingungsgleichung, ausgenommen dass, wenn c negativ ist, $b^2>-4c$ sein muss. Die Gleichungen der lateralen Geraden sind:

$$y+\tfrac{1}{2}ix(b-\sqrt{b^2+4c})=0,$$
$$y+\tfrac{1}{2}ix(b+\sqrt{b^2+4c})=0.$$

Wenn die Winkel der beiden lateralen Geraden mit ihrer Abscissenachse sich auch zu 180° ergänzen, so ist in Gl. (VI) $b=0$ und c nur positiv; dann wird die Gleichung:

$$y^2+cx^2=0 \qquad \text{(VIII)}$$

Daher die Gleichungen der beiden Geraden:

$$y+ix\sqrt{c}=0, \quad y-ix\sqrt{c}=0.$$

Setzt man $c=1$, so stellt $y^2+x^2=0$ zwei laterale Gerade dar, wovon die eine mit dem positiven Teile der Abscissenachse einen Winkel von 45°, die andere von 135° bildet.

§. 7. Von zwei Geraden liege die eine in der Fundamental-, die andere in der Lateral-Ebene, sie gehen aber durch verschiedene Punkte der Lateralachse, dann sind die Gleichungen der Geraden:

$$y+y_1+A(x+x_1)=0$$
$$y+y_2+iB(x+x_1)=0.$$

Das Product beider ist:

$$y^2+(A+iB)yx+iABx^2+(y_1+y_2+Ax_1+iBx_1)y$$
$$+(Ay_2+i(By_1+2ABx_1))x+y_1y_2+Ax_1y_2+i(Bx_1y_1+ABx_1^2)=0 \quad \text{(IX)}.$$

Die Gleichung (II) wird dadurch:

$$y^2+(a+ib)yx+idx^2+(e+if)y+(g+ih)x+k+il=0 \quad \text{(X)}$$

Daraus ergeben sich folgende Bedingungsgleichungen:

$$d=ab,\quad h=af+be-\frac{bg}{a},\quad k=\frac{eg}{a}-\frac{g^2}{a^2},\quad l=ef-\frac{gf}{a}.$$

Löst man die Gl. (X) in Beziehung auf y, so ergiebt sich:

$$y+\tfrac{1}{2}(a+2b)x+\tfrac{1}{2}(e+if)$$
$$=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(a-ib)^2x+2(a-ib)\left\{(e-if)-\frac{2g}{a}\right\}x+(e-if)^2-\frac{4g}{a}(e-if)+\frac{4g^2}{a^2}}$$
$$=\pm\tfrac{1}{2}\left[(a-ib)x+(e-if)-\frac{2g}{a}\right].$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen der beiden Geraden:

$$y+\frac{g}{a}+ib\left(x+\frac{f}{b}\right)=0,$$

$$y+e-\frac{g}{a}-\frac{af}{b}+a\left(x+\frac{f}{b}\right)=0.$$

Treffen sich die beiden Geraden in demselben Punkte der Lateralachse, so ist $y_2=y_1$ und die Bedingungsgleichungen sind:

$$d=ab,\quad g=\tfrac{1}{2}ae-\tfrac{1}{2}\frac{a^2f}{b},\quad h=\tfrac{1}{2}be+\tfrac{1}{2}af,\quad k=\tfrac{1}{4}e^2-\tfrac{1}{4}a^2\frac{f^2}{b^2},$$
$$l=\tfrac{1}{2}ef+\tfrac{1}{2}\frac{af^2}{b}.$$

Die Gleichungen der beiden Geraden sind:

$$y+\tfrac{1}{2}e-\frac{af}{b}+ib\left(x+\frac{f}{b}\right)=0,\quad y+\tfrac{1}{2}e-\frac{af}{b}+a\left(x+\frac{f}{b}\right)=0,$$

Gehen beide Gerade auch durch den Anfangspunkt der Coordinaten, so ist $y_1=0$, $y_2=0$, $x_1=0$ und die Gl. (II) vereinfacht sich in:

$$y^2+(a+ib)yx+icx^2=0 \quad \text{(XI)}$$

worin $c = ab$; die Gleichungen der beiden Geraden sind:

$$y + ax = 0, \quad y + ibx = 0.$$

§. 8. Stellt man die erhaltenen Resultate zusammen, so ergiebt sich:

A. Die beiden Geraden gehen durch den Anfangspunkt der Coordinaten:

a. Die eine Gerade ist reell, die andere imaginär:

$$y^2 + (a + ib)\,yx + iabx^2 = 0 \qquad \text{(XI)}$$

b. Beide sind lateral:

$y^2 + ibyx + cx^2 = 0$ (VII), wenn c negativ ist, so ist absolut $b^2 > 4c$.

c. Beide sind lateral und die Winkel derselben mit dem positiven Teile ihrer Abscissenachse betragen zusammen 180°:

$$y^2 + cx^2 = 0 \text{ (VIII)}; \; c \text{ ist positiv.}$$

B. Die beiden Geraden gehen nicht durch den Anfangspunkt der Coordinaten, wohl aber durch denselben Punkt der Abscissenachse:

a. Die eine Gerade ist reell, die andere lateral:

$$y^2 + (a + ib)\,yx + iabx^2 + (e + if)\,y + \tfrac{1}{2}\left[\frac{a}{b}(be - af) + i(be + 3af)\right]x$$
$$+ \tfrac{1}{4}\left(e^2 - \frac{a^2 f^2}{b^2}\right) + \tfrac{1}{2} if(be - af) = 0.$$

b. Beide sind lateral:

$$y^2 + ibyx + cx^2 + (e + if)\,y + \left(\frac{2cf}{b} + \tfrac{1}{2} ibe\right)x + \tfrac{1}{4}e^2 + \frac{cf^2}{b^2} + ief = 0 \text{ (V)},$$

$$b^2 > -4c \text{ wenn } c \text{ negativ ist.}$$

c. Die Winkel der beiden lateralen Geraden mit dem positiven Teile ihrer Abscissenachse betragen zusammen 180°:

$$y^2 + cx^2 + ey + gx + \tfrac{1}{4}(e^2 + g^2) = 0 \text{ (VI)}, \; c \text{ positiv.}$$

C. Die beiden Geraden schneiden die Lateralachse in verschiedenen Punkten.

a. Die eine Gerade ist reell, die andere lateral:

$$y^2 + (a + ib)\,yx + iabx^2 + (e + if)\,y + \left[g + i\left(af + be - \frac{bg}{a}\right)\right]x$$
$$+ \left(e - \frac{g}{a}\right)\left(\frac{g}{a} + if\right) = 0 \qquad \text{(IX)}$$

b. Beide sind lateral:

$$y^2 + ibyx + cx^2 + (e+if)y + \left(\frac{2cf}{b} + ih\right)x + \tfrac{1}{4}e^2$$
$$+ \frac{cf^2}{b^2} - \frac{(2h-be)^2}{4(b^2+4c)} + \frac{ifh}{b} = 0, \qquad \text{(III)}$$

$b^2 > -4c$, wenn c negativ.

c. Die Winkel der beiden lateralen Geraden mit dem positiven Teile ihrer Abscissenachse betragen zusammen 180^0:

$$y^2 + cx^2 + ey + (g+ch)x + \tfrac{1}{4}e^2 - \tfrac{1}{4}\frac{h^2}{c} + \tfrac{1}{4}\frac{g^2}{c} + \frac{igh}{2c} = 0, \qquad \text{(IV)}$$

c positiv.

Hieraus ergeben sich folgende Regeln:

1. Wenn die eine Gerade reell, die andere imaginär ist, so fehlt der reelle Factor von x^2, der imaginäre ist ab.

2. Sind beide Gerade lateral, so fehlen der reelle Factor von yx und der imaginäre von x^2.

3. Ergänzen sich die Winkel der beiden lateralen Geraden mit dem positiven Teile ihrer Abscissenachse zu 180^0, so fehlt das Glied yx ganz, von x^2 und y der imaginäre Factor.

Zweiter Abschnitt.

Von den lateralen Geraden, welche in Ebenen liegen, die schief auf der Fundamentalebene stehen.

§. 9. Es sei PMO Fig. 2. die Fundamentalebene, PM die Ordinatenachse und senkrecht auf MO; durch MP lege man die Ebene $MPRQ$, welche mit der Fundamentalebene den Flächenwinkel α bildet; die Abscissenachse MQ sei senkrecht auf der Ordinatenachse, welche zugleich Lateralachse ist; es sei ferner ABD senkrecht auf MP, ebenso BC in der Ebene $MPQR$; man mache $BA = BC = BD$. Um von BA der Ebene PMO, auf BC der Ebene MR überzugehen, multiplicire man die erstere mit $f(\alpha)$, es ist daher

$$BC = BA.f(\alpha),$$

ebenso ist

$$BD = BC.f(180^0 - \alpha),$$

folglich

$$BD = BA.f(\alpha).f(180^0 - \alpha),$$

d. i.

$$f(\alpha).f(180^0 - \alpha) = -1,$$

dies ist aber der Fall, wenn $f(\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha$, daher hat man bei dem Uebergange aus der Fundamentalebene in die Lateralebene, welche gegen die erstere unter einem Winkel α geneigt ist, mit $\cos\alpha + i\sin\alpha$ zu multipliciren.

§. 10. Man ziehe in der Lateralebene MR die Gerade MC, welche mit ihrer Abscissenachse MQ den Winkel φ bildet. Wäre MR Fundamentalebene, so würde die Gerade dargestellt durch

$$y = \operatorname{tg}\varphi . x,$$

da sie aber in der Lateralebene liegt, welche unter dem Winkel α gegen die Fundamentalebene geneigt ist, so muss sie dargestellt werden durch:

$$y = \operatorname{tg}\varphi . x(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Dieser Gleichung kann man auch die Form geben:

$$y = x(a + ib),$$

so dass

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Die Gleichung $y = x(a + ib)$ stellt daher eine Gerade dar, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, in einer Ebene liegt, welche mit der Fundamentalebene einen Winkel bildet, dessen Cosinus $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ und die gegen ihre Abscissenachse unter einem Winkel geneigt ist, dessen Tangente $\sqrt{a^2 + b^2}$. Die gemeinschaftliche Ordinatenachse ist Lateralachse.

Verlegt man den Anfangspunkt in einen andern Punkt, dessen Coordinaten y_1 und x_1 sind, so aber, dass die Lateralachse parallel zur Ordinatenachse ist, so ergiebt sich die Gleichung:

$$y - y_1 = \operatorname{tg}\varphi(x - x_1)(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

oder

$$y = x(a + ib) + c + id,$$

welche Gleichung auch auf die Form gebracht werden kann:

$$y - c + \frac{ad}{b} = \left(x + \frac{d}{b}\right)(a + ib).$$

A. Die beiden Geraden gehen durch den Anfangspunkt der Coordinaten.

§. 11. Die Gleichungen zweier lateralen Geraden, die in zwei verschiedenen Ebenen liegen, welche die Winkel α und β mit der Fundamentalebene bilden, sind:

$$y + Ax(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 0,$$
$$y + Bx(\cos\beta + i\sin\beta) = 0;$$

ihr Product giebt:

$$y^2 + xy[A\cos\alpha + B\cos\beta + i(A\sin\alpha + B\sin\beta)]$$
$$+ x^2AB(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)) = 0 \qquad \text{(I)}$$

Man stelle diese Gleichung dar durch:

$$y^2 + (a + ib)yx + (c + id)x^2 = 0, \qquad \text{(II)}$$

so dass

$$\left.\begin{aligned} a &= A\cos\alpha + B\cos\beta, & c &= AB\cos(\alpha+\beta), \\ b &= A\sin\alpha + B\sin\beta, & d &= AB\sin(\alpha+\beta). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

Eine Bedingungsgleichung ist nicht vorhanden, da vier Grössen durch vier Coefficienten zu bestimmen sind.

Löst man Gl. (II) in Beziehung auf y, so ergiebt sich:

$$y + \tfrac{1}{2}(a + ib)x = \pm \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - b^2 - 4c + i(2ab - 4d)}.$$

Man setze den absoluten Wert von $a^2 - b^2 - 4c = \lambda$,
- - - - - - $2ab - 4d = \mu$,
so kann man folgende vier Fälle unterscheiden:

	I.	II.	III.	IV.
λ	+	+	−	−
μ	+	−	+	−

Es sei

$$\varrho = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad \vartheta = \sqrt{\frac{\varrho + \lambda}{2}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{\varrho - \lambda}{2}},$$

so ergeben sich folgende laterale Geraden:

I. $y + \tfrac{1}{2}[a - \vartheta + i(b - \delta)]x = 0$,
$y + \tfrac{1}{2}[a + \vartheta + i(b + \delta)]x = 0$,

II. $y + \tfrac{1}{2}[a + \vartheta + i(b - \delta)]x = 0$,
$y + \tfrac{1}{2}[a - \vartheta + i(b + \delta)]x = 0$,

III. $y + \tfrac{1}{2}[a - \delta + i(b - \delta)]x = 0$,
$y + \tfrac{1}{2}[a + \delta + i(b + \delta)]x = 0$,

IV. $y + \tfrac{1}{2}[a + \delta + i(b - \vartheta)]x = 0$,
$y + \tfrac{1}{2}[a - \delta + i(b + \vartheta)]x = 0$.

§. 12. Bilden die lateralen Geraden mit ihren Abscissenachsen gleiche Winkel, so ist in Gl. (I) und (III) §. 11. $A = B$, folglich:

$$a = A(\cos\alpha + \cos\beta) = 2A\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$
$$b = A(\sin\alpha + \sin\beta) = 2A\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

folglich:

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

Es ist ferner

$$d = A^2 \sin(\alpha + \beta),$$
$$c = A^2 \cos(\alpha + \beta),$$

folglich:

$$\frac{d}{c} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta),$$

daher

$$d = \frac{2abc}{a^2 - b^2}.$$

Es ist ferner

$$a^2 = A^2(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + 2\cos\alpha\cos\beta),$$
$$b^2 = A^2(\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + 2\sin\alpha\sin\beta),$$
$$a^2 - b^2 = A^2(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + 2\cos(\alpha + \beta)),$$
$$= 2A^2\cos(\alpha + \beta)[1 + \cos(\alpha - \beta)],$$

d. i.

$$a^2 - b^2 < 4A^2\cos(\alpha + \beta) \text{ oder } a^2 - b^2 < 4c \text{ und } \frac{4c}{a^2 - b^2} > 1.$$

Hieraus folgt auch, dass wenn c negativ ist, auch $b^2 > a^2$ sein muss, so dass $\frac{4c}{a^2 - b^2}$ in jedem Falle positiv ist.

Setzt man in Gl. (II) §. 11. den Wert von d ein, so wird die Gleichung:

$$y^2 + (a + ib)yx + \frac{c}{a^2 - b^2}(a + ib)^2 x^2 = 0. \qquad \text{(IV)}$$

Die Gleichungen der beiden Geraden sind:

$$y + \tfrac{1}{2}\left[a + b\sqrt{\frac{4c}{a^2 - b^2} - 1} + i\left(b - a\sqrt{\frac{4c}{a^2 - b^2} - 1}\right)\right]x = 0$$

$$y + \tfrac{1}{2}\left[a - b\sqrt{\frac{4c}{a^2 - b^2} - 1} + i\left(b + a\sqrt{\frac{4c}{a^2 - b^2} - 1}\right)\right]x = 0$$

§. 13. Es mögen die beiden lateralen Geraden in derselben Ebene liegen, so ist in Gl. (I) und (IV) §. 11. $\angle\beta = \angle\alpha$ und man erhält:

$$a = (A + B)\cos\alpha, \qquad c = AB\cos 2\alpha,$$
$$b = (A + B)\sin\alpha, \qquad d = AB\sin 2\alpha.$$

Daher

$$d = \frac{2abc}{a^2 - b^2}$$

Ferner:

$$a^2 = (A + B)^2\cos\alpha^2, \qquad a^2 - b^2 = (A + B)^2\cos 2\alpha,$$
$$b^2 = (A + B)^2\sin\alpha^2.$$

Nun aber ist $(A + B)^2 > 4AB$, folglich $a^2 - b^2 > 4c$, oder $\frac{4c}{a^2 - b^2} < 1$.

Die Gleichung (II) §. 11. erhält dieselbe Form wie (IV), aber die Gleichungen der beiden lateralen Geraden sind:

$$y+\tfrac{1}{2}\left[a\left(1-\sqrt{1-\frac{4c}{a^2-b^2}}\right)+ib\left(1-\sqrt{1-\frac{4c}{a^2-b^2}}\right)\right]x=0,$$

$$y+\tfrac{1}{2}\left[a\left(1+\sqrt{1-\frac{4c}{a^2-b^2}}\right)+ib\left(1+\sqrt{1-\frac{4c}{a^2-b^2}}\right)\right]x=0.$$

Ergänzen sich ausserdem noch die Winkel der beiden lateralen Geraden mit ihren Abscissenachsen zu 180°, so ist $A+B=0$, daher $a=0$, $b=0$ und Gl. (II) §. 11. wird:

$$y^2+(c+id)x^2=0 \tag{V}$$

Die Gleichungen der beiden Geraden sind, wenn man $\sqrt{c^2+d^2}=\varrho$ setzt:

$$y-\left[\sqrt{\frac{\varrho-c}{2}}-i\sqrt{\frac{\varrho+c}{2}}\right]x=0,$$

$$y+\left[\sqrt{\frac{\varrho-c}{2}}-i\sqrt{\frac{\varrho+c}{2}}\right]x=0.$$

§. 14. Die eine Gerade sei lateral, die andere reell, so ist (§. 11.) $\beta=0$ und man erhält:

$$a=A\cos\alpha+B,\quad c=AB\cos\alpha,\quad a^2=A^2\cos\alpha^2+2AB\cos\alpha+B^2,$$
$$b=A\sin\alpha,\quad d=AB\sin\alpha,\quad 4c=\qquad +4AB\cos\alpha,$$
$$B=\frac{d}{b},\quad A\cos\alpha=\frac{bc}{d}=a-\frac{d}{b},\quad a^2-4c=(A\cos\alpha-B)^2,$$ daher

$a^2>4c$, und $d=\frac{1}{2}b(a\pm\sqrt{a^2-4c})$, wodurch Gl. (II) wird:

$$y^2+(a+ib)yx+[c+\tfrac{1}{2}ib(a\pm\sqrt{a^2-4c})]x^2=0. \tag{VI}$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen der beiden Geraden, entweder

$$y+\tfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-4c}+2ib)x=0,\quad \text{oder}\quad y+\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-4c}+2ib)x=0,$$
$$y+\tfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-4c})x=0,\qquad y+\tfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-4c})x=0.$$

Bilden die Geraden mit ihren Abscissenachsen auch gleiche Winkel, so ist auch $A=B$ und man erhält:

$$a=A(1+\cos\alpha),\quad c=A^2\cos\alpha,\quad ab=A^2\sin\alpha(1+\cos\alpha)<2A^2\sin\alpha,$$
$$b=A\sin\alpha,\quad d=A^2\sin\alpha,\quad d>\tfrac{1}{2}ab,$$
$$\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha,\quad \frac{d}{c}=\operatorname{tg}\alpha,\quad \text{daher}\quad d=\frac{2abc}{a^2-b^2},\quad c=\frac{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}{4a^2},$$

daher $d=\frac{b}{2a}(a^2+b^2)$.

Trägt man diese Werte ein, so ergiebt sich die Gleichung:

$$y^2 + (a+ib)yx + \frac{a^2+b^2}{4a^2}(a+ib)^2x^2 = 0. \qquad \text{(VII)}$$

Die Gleichungen der beiden Geraden sind:

$$y + \tfrac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{a}\right)x = 0,$$

$$y + \tfrac{1}{2}\left[\frac{a^2-b^2}{a} + 2ib\right]x = 0.$$

§. 15. Es stehe die eine Lateralebene schief, die andere senkrecht auf der Fundamentalebene; dann ist $\beta = 90^0$ und die Gleichungen (III) §. 11. nehmen folgende Gestalt an:

$$a = A\cos\alpha, \qquad c = -AB\sin\alpha, \quad B = \frac{d}{a},$$

$$b = A\sin\alpha + B, \quad d = AB\cos\alpha, \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{c}{d} = \frac{ab-d}{a^2}, \text{ folglich:}$$

$$d = \tfrac{1}{2}a(b \pm \sqrt{b^2+4c}).$$

Die Gleichung wird:

$$y^2 + (a+ib)yx + [c + ia(b \pm \sqrt{b^2+4c})]x^2 = 0. \qquad \text{(VIII)}$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen der beiden Geraden:

$$y + \tfrac{1}{2}i(b \pm \sqrt{b^2+4c})x = 0,$$

$$y + [a + \tfrac{1}{2}i(b \mp \sqrt{b^2+4c})]x = 0.$$

Wenn die beiden Geraden mit ihren Abscissenachsen gleiche Winkel bilden, so ist auch $B = A$, und man erhält:

$$a^2 + \left(b - \frac{d}{a}\right)^2 = \frac{d^2}{a^2}, \quad \text{oder} \quad a^2 + b^2 = \frac{2bd}{a};$$

trägt man den oberen Wert von d ein, so ergiebt sich: $c = \dfrac{a^4-b^4}{4b^2}$,

daraus ergiebt sich $d = \tfrac{1}{2}a(b \pm \sqrt{b^2+4c})$, und daher $d = \tfrac{1}{2}\dfrac{a}{b}(b^2 \pm a^2)$;

die Gleichung der beiden Geraden ist:

$$y^2 + (a+ib)yx + \frac{1}{4b^2}[a^4 - b^4 + 2iab(b^2 \pm a^2)]x^2 = 0. \qquad \text{(IX)}$$

Hieraus ergeben sich für die Geraden folgende Gleichungen:

$$y + \tfrac{1}{2}i\left(\frac{b^2 \pm a^2}{b}\right)x = 0,$$

$$y + \left(a + \tfrac{1}{2}i\left(\frac{b^2 \mp a^2}{b}\right)\right)x = 0.$$

§. 16. Die Winkel, welche die Lateralebene mit der Fundamentalebene bilden, ergänzen sich zu 360^0, oder, was dasselbe ist, zu 180^0, so ist in den Gleichungen (II) §. 11. $\beta = 360^0 - \alpha$, daher:

$$a = (A+B)\cos\alpha, \qquad c = AB,$$
$$b = (A-B)\sin\alpha, \qquad d = 0.$$

Es sei zuvörderst c positiv, so ergiebt sich die Gleichung:

$$y^2 + (a+2b)yx + cx^2 = 0. \tag{X}$$

Die Gleichung gelöst, giebt:

$$y + \tfrac{1}{2}(a+ib)x = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2 - 4c + 2iab}.$$

Man setze $a^2 - b^2 - 4c = \lambda$, so ist, wenn $\varrho = \sqrt{\lambda^2 + 4a^2b^2}$,

$\lambda = \varrho\cos\alpha, \quad \cos\alpha = \frac{\lambda}{\varrho} = 2\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2 - 1 = 1 - 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2$, folglich

$2ab = \varrho\sin\alpha$,

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\varrho+\lambda}{2\varrho}}, \qquad \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\varrho-\lambda}{2\varrho}},$$

und wenn man macht

$$\sqrt{\frac{\varrho+\lambda}{2}} = \vartheta, \qquad \sqrt{\frac{\varrho-\lambda}{2}} = \delta,$$

so erhält man als die Gleichung der beiden lateralen Geraden:

$$y + \tfrac{1}{2}x[a - \vartheta + i(b-\delta)] = 0,$$
$$y + \tfrac{1}{2}x[a + \vartheta + i(b+\delta)] = 0.$$

Diese Gleichungen stelle man dar durch:

$$y + \tfrac{1}{2}x\,\mathrm{tg}\,\varphi(\cos\zeta + i\sin\zeta) = 0,$$
$$y + \tfrac{1}{2}x\,\mathrm{tg}\,\psi(\cos\eta + i\sin\eta) = 0.$$

Dann ist:

$$\cos\zeta = \frac{a-\vartheta}{\sqrt{(a-\vartheta)^2 + (b-\delta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b-\delta}{a-\vartheta}\right)^2}}$$

$$\sin\zeta = \frac{b-\delta}{\sqrt{(a-\vartheta)^2 + (b-\delta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a-\vartheta}{b-\delta}\right)^2 + 1}}$$

$$\cos\eta = \frac{a+\vartheta}{\sqrt{(a+\vartheta)^2 + (b+\delta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{b+\delta}{a+\vartheta}\right)^2}}$$

$$\sin\eta = \frac{b+\delta}{\sqrt{(a+\vartheta)^2 + (b+\delta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a+\vartheta}{b+\delta}\right)^2 + 1}}$$

Es ist aber $a^2 - b^2 > \lambda$ oder $a^2 - \lambda > b^2$, folglich $4a^4 - 4a^2\lambda + \lambda^2 > \lambda^2 + 4a^2b^2$, d. i. $2a^2 - \lambda > \varrho$, daher $a > \sqrt{\frac{\varrho + \lambda}{2}}$ oder $a > \vartheta$, es ist also $a - \vartheta$, d. i. $\cos\zeta$ positiv, so wie $\cos\eta$.

Ferner ist $b^2 + \lambda < a^2$, $4b^4 + 4b^2\lambda + \lambda^2 < \lambda^2 + 4a^2b^2$, d. i. $2b^2 + \lambda < \varrho$, $b < \sqrt{\frac{\varrho - \lambda}{2}}$, $b - \delta$, d. i. $\sin\zeta$ ist negativ, während $\sin\eta$ einen positiven Wert hat.

Bringt man die Brüche $\left(\frac{b - \delta}{a - \vartheta}\right)^2$ und $\left(\frac{b + \delta}{a + \vartheta}\right)^2$ auf gleiche Nenner, so ergiebt sich die Identität beider, daher

$$\cos\zeta = \cos\eta, \quad -\sin\zeta = \sin\eta, \quad \text{d. h. } \zeta = 360^0 - \eta.$$

Daher sind die Gleichungen:

$$y + x \operatorname{tg}\varphi(\cos(360^0 - \eta) + i\sin(360^0 - \eta)) = 0,$$
$$y + x \operatorname{tg}\psi(\cos\eta + i\sin\eta) = 0.$$

Statt der ersten Gleichung konnte man auch schreiben:

$$y + x \operatorname{tg}(180^0 - \varphi)(\cos(180^0 - \eta) + i\sin(180^0 - \eta)) = 0.$$

Ist aber c negativ, so dass die Gleichung wird:

$$y^2 + (a + ib)yx - cx^2 = 0,$$

so wird eben so wie vorher bewiesen, dass $a < \sqrt{\frac{\varrho + \lambda}{2}}$, daher $a - \vartheta$ negativ, dagegen $b - \delta$ positiv, folglich $\zeta = 180^0 - \eta$ ist, wodurch man die Gleichungen erhält:

$$y + x \operatorname{tg}\varphi(\cos\eta + i\sin\eta) = 0,$$
$$y + x \operatorname{tg}\psi[\cos(180^0 - \eta) + i\sin(180^0 - \eta)] = 0;$$

die letztere Gleichung kann man auch darstellen durch:

$$y + x \operatorname{tg}(180^0 - \psi)[\cos(360^0 - \eta) + i\sin(360^0 - \eta)] = 0.$$

Sind auch die Winkel gleich, welche die lateralen Geraden mit ihren Abscissenachsen bilden, so ist $A = B$, woraus folgt $b = 0$, und die Gleichung erhält die Form:

$$y^2 + ayx + cx^2 = 0 \qquad \text{(XI)}$$

worin c stets positiv und $a^2 < 4c$ ist. Die Gleichungen der beiden Geraden sind:

$$y + \tfrac{1}{2}x(a - i\sqrt{4c - a^2}) = 0,$$
$$y + \tfrac{1}{2}x(a + i\sqrt{4c - a^2}) = 0.$$

§. 17. Stellt man die Resultate für binäre laterale Gerade, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen, zusammen, so ergiebt sich:

1. Die beiden Geraden liegen in verschiedenen schiefen lateralen Ebenen:

$$y^2 + (a + ib)\,yx + (c + id)\,x^2 = 0 \qquad \text{(II)}$$

2. Sie liegen in verschiedenen Ebenen und bilden mit ihren Abscissenachsen gleiche Winkel:

$$y^2 + (a + ib)\,yx + \frac{c\,(a + ib)^2 x^2}{a^2 - b^2} = 0 \quad 4c > a^2 - b^2 \qquad \text{(IV)}$$

3. Sie liegen in derselben schiefen Ebene:

$$y^2 + (a + ib)\,yx + \frac{c\,(a + ib)^2 x^2}{a^2 - b^2} = 0 \quad 4c < a^2 - b^2 \qquad \text{(IV)}$$

4. Sie liegen in derselben schiefen Ebene, aber die Winkel, welche die Geraden mit ihrer Abscissenachse bilden, ergänzen sich zu 180°:

$$y^2 + (c + id)\,x^2 = 0 \qquad \text{(V)}$$

5. Die eine Gerade liegt in der Fundamental-, die andere in einer Lateral-Ebene:

$$y^2 + (a + ib)\,yx + [c + \tfrac{1}{2}ib\,(a \pm \sqrt{a^2 - 4c}]\,x = 0 \qquad \text{(VI)}$$

6. Die eine Gerade liegt in der Fundamentalebene, die andere in der Lateralebene und beide bilden mit ihren Abscissenachsen gleiche Winkel:

$$y^2 + (a + ib)\,yx + \frac{a^2 + b^2}{4a^2}\,(a + ib)^2 x^2 = 0 \qquad \text{(VII)}$$

7. Die eine Gerade liegt in der senkrechten, die andere in einer schiefen Lateralebene.

$$y^2 + (a + ib)\,yx + [c + \tfrac{1}{2}ia\,(b \pm \sqrt{b^2 + 4c})\,]\,x^2 = 0 \qquad \text{(VIII)}$$

8. Die beiden Geraden von 7 bilden mit ihren Abscissenachsen gleiche Winkel:

$$y^2 + (a + ib)\,yx + \left[\frac{a^4 - b^4}{4b^2} + \tfrac{1}{2}i\frac{a}{b}\,(a^2 \pm b^2)\right]x^2 = 0 \qquad \text{(IX)}$$

9. Die Flächenwinkel der Lateralebenen mit der Fundamentalebene ergänzen sich zu 360°:

$$y^2 + (a + ib)\,yx \pm cx^2 = 0 \qquad \text{(X)}$$

10. Auch bilden die beiden Geraden mit ihren Abscissenachsen gleiche Winkel

$$y^2 + ayx + cx^2 = 0, \quad 4c > a^2 \qquad \text{(XI)}$$

B. Die beiden lateralen Geraden gehen durch einen auf der Lateralachse gelegenen Punkt, dessen Ordinate $-y_1$ und Abscisse x_1 ist.

§. 18. Man erhält die Gleichung zweier lateralen Geraden, welche in verschiedenen Ebenen liegen und die Lateralachse in dem Punkte $-y_1$, $-x_1$ schneiden, wenn man in Gl. (II) §. 11. setzt für $y: y+y_1$ und für $x: x+x_1$, wodurch man erhält:

$$(y+y_1)^2 + (a+ib)(y+y_1)(x+x_1) + (c+id)(x+x_1)^2 = 0 \qquad \text{(I)}^b$$

Entwickelt und ordnet man diese Gleichung, so erhält man:

$$y^2 + (a+ib)yx + (c+id)x^2 + (2y_1 + ax_1 + 2bx_1)y$$
$$+ (ay_1 + 2cx_1 + i(by_1 + 2dx_1))x + y_1^2 + ay_1x_1 + cx_1^2 + i(bx_1y_1 + dx_1^2) = 0 \;\text{(II)}^b$$

Man stelle diese Gleichung dar durch:

$$y^2 + (a+ib)yx + (c+id)x^2 + (e+if)y + (g+ih)x + k + il = 0 \qquad \text{(III)}^b$$

Hieraus ergiebt sich:

$$y_1 = \tfrac{1}{2}e - \tfrac{1}{2}\frac{af}{b}, \quad x_1 = \frac{f}{b},$$

so wie die Bedingungsgleichungen:

$$g = \tfrac{1}{2}ae - \tfrac{1}{2}\frac{a^2f}{b} + \frac{2cf}{b}, \quad k = \tfrac{1}{4}e^2 - \tfrac{1}{4}\frac{a^2f^2}{b^2} + \frac{cf^2}{b^2},$$

$$h = \tfrac{1}{2}be - \tfrac{1}{2}af + \frac{2df}{b}, \quad l = \tfrac{1}{2}cf - \tfrac{1}{2}\frac{af}{b} + \frac{df^2}{b^2}.$$

Durch Eintragung dieser Werte und Lösung der Gleichung in Beziehung auf y erhält man die Gleichungen der beiden Geraden, wie sie §. 11. angiebt, wenn man daselbst für $y: y + \tfrac{1}{2}e - \tfrac{1}{2}\frac{af}{b}$ und für $x: x + \frac{f}{b}$ setzt.

§. 19. Wenn die beiden Geraden mit ihren Abscissenachsen gleiche Winkel bilden, so gilt ebenfalls (III)^b, so wie die Bedingungsgleichungen des §. 18., aber ausserdem noch:

$$d = \frac{2abc}{a^2 - b^2}. \quad 4c > a^2 - b^2.$$

Dieselben Bedingungen als vor, mit Ausnahme der letzten, wofür man zu setzen hat $4c < a^2 - b^2$, gelten, wenn die beiden lateralen Gerade in derselben Ebene liegen.

Sollen ausserdem sich die Winkel zu 180° ergänzen, so ist $a = 0$, $b = 0$, $f = 0$ und Gl. $(\mathrm{III})^b$ wird:

$$y^2 + (c + id)x^2 + by + (g + ih)x + k + il = 0$$

Hier ist $y_1 = \frac{1}{2}e$, $x_1 = \frac{g}{2c}$ und die Bedingungsgleichungen sind:

$$h = \frac{dg}{c}, \quad k = \tfrac{1}{4}e^2 + \frac{g^2}{4c} \qquad l = \frac{dg^2}{4c^2}.$$

§. 20. Liegt die eine Gerade in der Fundamental-, die andere in einer Lateral-Ebene, so gilt Gl. $(\mathrm{III})^b$ mit den Bedingungsgleichungen von §. 18., wozu noch kommt:

$$d = \tfrac{1}{2}b(a \pm \sqrt{a^2 - 4c}).$$

Die Werte von y_1 und x_1 sind wie in §. 18.

Sind ausserdem die Winkel gleich, welche die beiden Geraden mit ihren Abscissenachsen bilden, so kommen zu den Bedingungsgleichungen des §. 18. noch:

$$c = \frac{a^4 - b^4}{4a^2}, \qquad d = \frac{b}{2a}(a^2 \pm b^2).$$

§. 21. Wenn die eine Gerade sich in der senkrechten, die andere in einer schiefen Ebene befinden, so gelten ausser den obigen Bedingungsgleichungen von oben noch:

$$d = \tfrac{1}{2}a(b \pm \sqrt{b^2 + 4c}).$$

Sind auch die Winkel gleich, welche die Geraden mit ihren Abscissenachsen bilden, so kommen zu den obigen Bedingungsgleichungen noch hinzu:

$$c = \frac{a^4 - b^4}{4b^2}, \quad d = \tfrac{1}{2}\frac{a}{b}(b^2 + a^2).$$

§. 22. Wenn die Winkel der beiden Lateralebenen sich zu 360° ergänzen, so wird aus Gl. $(\mathrm{III})^b$:

$$y^2 + (a + ib)yx + cx^2 + (e + if)g + (g + ih) + k + il = 0$$

Die Bedingungsgleichungen sind wie in §. 18., nur mit Berücksichtigung von $d = 0$.

Bilden die Geraden mit ihren Abscissenachsen auch gleiche Winkel, so erhält Gl. (III)^b die Form:

$$y^2 + ayx + cx^2 + ey + gx + k = 0$$

Es ist hier

$$y_1 = \frac{2ce - ag}{4c - a^2}, \quad x_1 = \frac{2g - ae}{4c - a^2},$$

c ist positiv und $4c > a^2$, endlich:

$$k = \frac{g^2 + ce^2 - aeg}{4c - a^2}$$

(Vergl. Archiv Tl. 58. S. 218.).

XXX.

Miscellen.

1.

Eine geometrische Aufgabe.

Vorbemerkung. Aus den elementargeometrischen Anwendungen der elliptischen Functionen ist unter Anderem der Satz bekannt: Wenn 2 Kreise eine solche Lage haben, dass dem einen ein Polygon eingeschrieben werden kann, welches dem anderen umschrieben ist, so ist die Anzahl solcher Polygone unendlich, und es bestehen zwischen den beiden Radien r und ϱ und der Centrallinie d bestimmte Relationen. Dieselben lauten beispielsweise für das Dreieck

$$r^2 - 2r\varrho = d^2,$$

für das Viereck

$$2(r^2 + d^2)\varrho^2 = (r^2 - d^2)^2,$$

für das Fünfeck

$$\varrho(r+d)\sqrt{2r} = \varrho(r+d)\sqrt{r-d-\varrho} + (r-d)(r+d+\varrho)\sqrt{r+d-\varrho}.$$

Untersuchungen über diesen Gegenstand sind von Jacobi und Richelot (Crelle's Journal III. und XXXVIII.) angestellt und von mehreren Autoren über die Theorie der elliptischen Functionen z. B. von Schloemilch und Durège reproducirt worden. Uebrigens sind diese Relationen, wie es in der Natur der Sache liegt, auch ohne alle Bezugnahme auf elliptische Functionen gefunden worden, wie denn die Formel für das Dreieck schon Euler, die für das Vier-, Fünf-, Sechs-, Sieben-, Achteck Nicol. Fuss in den Nov. comment. Petropol. XI. und Nov. acta Petropol. XIII. gegeben hat. Bewiesen ist die Dreiecksformel von vielen Verfassern elementar-geometrischer Lehrbücher, u. A. von Unger, v. Swinden-Jacobi, Kunze u. s. w. Man kann aber diesem Gegenstande eine — wie ich vermute — neue Seite

abgewinnen, wenn man, von der Existenz dieser Dreiecksformel absehend — wir beschränken uns der Kürze wegen auf diese — sich folgende Aufgabe stellt:

Gegeben 2 Kreise, dem einen soll ein Dreieck so umschrieben werden, dass es dem anderen eingeschrieben sei.

Auflösung. Der Radius des äusseren Kreises sei r, der des inneren (berührenden) ϱ, die Centrallinie a, der Mittelpunkt des letzteren sei der Coordinatenursprung. Die Gleichungen der Kreise sind hiernach

$$(x-a)^2+y^2=r^2, \quad x^2+y^2=\varrho^2.$$

Als unbekannt nehmen wir den Punkt A der äusseren Peripherie an, von welchem aus die erste Sehne (welche zugleich Tangente ist) gezogen werden soll, und setzen dessen Coordinaten

$$y_1=r\sin\varphi, \quad x_1=a+r\cos\varphi.$$

Bezeichnen wir mit u den Winkel dieser Sehne mit der X-Achse, so schneidet die Sehne die Peripherie in einem zweiten Punkte B, dessen

$$x_2=a-r\cos(\varphi-2u), \quad y_2=r\sin(\varphi-2u),$$

wie sich entweder durch analytisch-geometrische oder rein geometrische Betrachtung leicht zeigen lässt. Soll der Winkel u dergestalt bestimmt werden, dass AB den zweiten Kreis berühre, so erinnere man sich der Bedingungsgleichung

$$\varrho^2(1+m^2)=n^2,$$

wo m und n die Constanten der Geraden $y=mx+n$ sind. Im vorliegenden Falle ist

$$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\operatorname{tang}u,$$

$$n=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}=\frac{r\sin(\varphi-u)}{\cos u}-a\operatorname{tang}u.$$

Die Gleichung $\varrho^2(1+m^2)=n^2$ geht hiernach über in die Form

$$\pm\varrho=r\sin(\varphi-u)-a\sin u$$

und zerfällt natürlich (wegen des Vorhandenseins zweier Tangenten von A aus) in die 2 Gleichungen

$$1)\qquad \varrho=r\sin(\varphi-u_1)-a\sin u_1$$

$$2)\qquad -\varrho=r\sin(\varphi-u_2)-a\sin u_2$$

Es sind nunmehr ausser A noch 2 Punkte fixirt:

$$B: x_2 = a - r\cos(\varphi - 2u_1), \quad y_2 = r\sin(\varphi - 2u_1)$$
$$C: x_3 = a - r\cos(\varphi - 2u_2), \quad y_3 = r\sin(\varphi - 2u_2)$$

Es erübrigt noch die Darstellung der Eigenschaft der Geraden BC als Tangente des Kreises $x^2 + y^2 = \varrho^2$. Mit Benutzung der bereits erwähnten Bedingungsgleichung $\varrho^2(1+m^2) = n^2$ ergiebt sich:

$$3) \quad \pm\varrho = r\cos(u_1 - u_2) - a\cos(u_1 + u_2 - \varphi)$$

Diese Gleichung in Verbindung mit 1) und 2) reichen aus zur Bestimmung des Winkels φ, von welcher allein die Lösung der Aufgabe abhängt.

Die Addition von 1) und 2) giebt

$$4) \quad a\sin\frac{u_1+u_2}{2} = r\sin\left(\varphi - \frac{u_1+u_2}{2}\right),$$

desgleichen die Subtraction

$$5) \quad \varrho = \sin\left(\frac{u_2-u_1}{2}\right)\left(a\cos\frac{u_1+u_2}{2} + r\cos\left(\varphi - \frac{u_1+u_2}{2}\right)\right).$$

Aus 4) folgt

$$6) \quad \operatorname{tang}\frac{u_1+u_2}{2} = \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi + a}. \quad \cos\frac{u_1+u_2}{2} = \frac{r\cos\varphi + a}{\sqrt{N}},$$

$$\sin\frac{u_1+u_2}{2} = \frac{r\sin\varphi}{\sqrt{N}},$$

wo

$$N = a^2 + 2ar\cos\varphi + r^2.$$

Diese Werte in 5) eingetragen:

$$\sin\frac{u_2-u_1}{2} = \frac{\varrho}{\frac{a(a+r\cos\varphi)}{\sqrt{N}} + \frac{r\cos\varphi(a+r\cos\varphi)}{\sqrt{N}} + \frac{r^2\sin^2\varphi}{\sqrt{N}}}$$

oder

$$\sin\frac{u_2-u_1}{2} = \frac{\varrho\sqrt{N}}{a^2 + ar\cos\varphi + ar\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}$$

$$= \frac{\varrho\sqrt{N}}{a^2 + 2ar\cos\varphi + r^2} = \frac{\varrho}{\sqrt{N}}$$

Liebrecht.

2.

Eine Quadratur.

In den Hippokrateschen Halbmond soll der grösste Kreis eingeschrieben werden. Welches ist der Ort seines Mittelpunktes, wenn sich der Scheitel des gegebenen rechtwinkligen Dreiecks auf der Peripherie des ihm umgeschriebenen Kreises bewegt?

Ist a der Halbmesser des festen Kreises, so ist der Ort des Mittelpunktes des veränderlichen Kreises in Polarcoordinaten r, φ:

$$r = \frac{a}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi + 1).$$

Die Fläche der Curve

$$F = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}(\pi + 5).$$

Die Fläche der Curve zerfällt in zwei Teile, in einen rationalen und einen irrationalen Teil. Schreiben wir in den festen Kreis ein Quadrat ein und dem Quadrat wieder ein Quadrat ein, dessen Seiten die Diagonalenhälften des grösseren halbiren werden, und beschreiben aus dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte einen Kreis, dessen Radius gleich ist der Seite des kleineren Quadrats, so ist die Summe dieser drei Flächen gleich der Fläche der Curve.

K. Zahradnik.

Litterarischer Bericht

CCXXXVI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung. Von Dr. Siegmund Günther, Privatdozent am Kgl. Polytechnikum zu München. Erlangen 1876. Eduard Besold. 133 S.

Der in der Grazer Naturforscherversammlung unter obigem Titel gehaltene Vortrag erscheint hier umgearbeitet und ausführlicher zugleich mit angefügten Noten, welche die einzelnen berührten Themata weiter verfolgen und so einer durch die Umstände auferlegten Kürze nachträglich abhelfen sollen. Der Verfasser tritt zu Gunsten des historischen Studiums der Mathematik ein, das, wie er findet, abweichend von dem Verhalten anderer Fachwissenschaften, die mehr an ihrer Geschichte festhielten, heutzutage weniger als früher gepflegt würde. Auch nach der Umarbeitung hat die Schrift den Charakter eines Plaidoyers behalten, in welchem der Verfasser durch angezogene Beispiele das Interesse für jenes Studium zu wecken sucht. An dieser Eigenschaft ändern auch die Noten nichts. Wenn die gewählten Beispiele nicht besonders instructiv sind, so liegt die Schuld nicht bloss an der Schwierigkeit allgemein Verständliches ausser dem Zusammenhange zu geben, sondern vor allem daran, dass der Verfasser von vorn herein den principiellen Fragen, die hier einer Klärung warten, nicht näher tritt, sich mit allgemeinen Terminis begnügt, ohne deren Inhalt zu discutiren, namentlich also ohne Erörterung lässt, was zum historischen Studium gehört, ob er von Kenntnissnahme des fernen Altertums oder von Continuität der Forschung spricht. Bei diesem einen Tadel können wir es bewenden lassen.

Wollten wir auf das Einzelne eingehen, so müssten wir es doch in Beziehung zur Ankündigung auffassen. Wo sind nun die Ziele und Resultate der neuern mathematisch-historischen Forschung zu finden? Wo sind Ziele kenntlich gemacht? Was sieht der Verfasser als Resultate an? Wo ist überhaupt von neuerer Forschung anders als negativ die Rede? Nach den ersten Seiten wird die Absicht vergessen, und kommt im Verlaufe der Schrift nicht wieder zum Vorschein. H.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Die Zinsrechnung sammt Anwendungen. I. Heft. Die Zinsrechnung. Für die obern Klassen von Realschulen und Gymnasien, für Handelsschulen und Seminarien, und zum Selbstunterricht. II. Heft. Die Verzinsung periodischer Zahlungen. Von Heinrich Stüssi. Zürich 1876. Cäsar Schmidt. kl. 8^0. 263 S.

Das Buch handelt ausschliesslich von derjenigen Rechnung, welche Zinseszins zugrunde legt, mit Voraussetzung der Lehre von Potenzen und Logarithmen, und hat die Bestimmung die Kenntniss dieser Rechnung mehr durch die Schulen zu verbreiten, damit der Bürger die darauf beruhenden Einrichtungen verstehen und beurteilen könne. Jedes der beiden Hefte enthält die 4 Teile, theoretischen Teil, Aufgaben, Tabellen und Auflösungen. Der Vortrag ist im ganzen klar und verständlich, das eigentlich Theoretische exact, und, was auf Herkommen beruht, was also kein Denken ergeben kann, wird nicht, wie so häufig, zu erklären vergessen. Doch kommen auch Ausnahmen vor. Seite 8. ist „Betrag des später fälligen Capitals" zweideutig, es muss heissen „gegenwärtigen Betrag". Seite 5. lässt die Ausführung über Verzinsung in unterjährigen Terminen den Leser im Stich, der, da vom nominellen Zins bis dahin nicht die Rede war, zunächst an den effectiven Zins denken muss, durch das Weitere natürlich zweifelhaft wird, aber keine rechte Entscheidung findet (das Resultat ist durch Druckfehler noch einmal im Sinne des effectiven). Obwol durch Beispiele und spätere Erörterungen jede Zweideutigkeit nachträglich gehoben wird, so hätten doch gleich in erster Aufstellung solche vermieden werden sollen. Im übrigen zeigt die Abfassung, was durch Verbindung von concinner, correcter Erörterung, Formel und Beispiel an Deutlichkeit geleistet werden kann, und kann als Muster der Darstellung gelten. Die Tafeln erstrecken sich auf 100 Jahre und die Monate eines Jahres, berücksichtigen die Zinsfüsse $2\frac{1}{2}$, 3, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, 6 Procent und sind auf teils 5, 6 und 7 Bruchstellen berechnet, das Anfangscapital stets $=1$ gesetzt, die entsprechenden Logarithmen nebengestellt. H.

Die Buchstabenrechnung. Eine Entwickelung der Gesetze der Grundrechnungsarten rein aus den Begriffen der Zahl und des Zählens als Grundlage für den Unterricht. Von Dr. Ferd. Rosenberger. Jena 1876. Hermann Dufft. 150 S.

Das Vorliegende ist erklärtermassen kein Schulbuch zu unmittelbarem Gebrauch, wenn gleich die Idee der Abfassung einzig und allein aus dem Schulunterricht fliesst und demselben gewidmet ist. Die wahre Bestimmung ergiebt sich beim ersten Blick als eine logische Revision der elementaren Doctrin, hervorgerufen durch sehr gewöhnliche Misgriffe, deren der Verfasser zwei anführt, nämlich die Umgehung der Schwierigkeiten, die in der Anwendung der Grundrechnungen auf negative, imaginäre Zahlen u. s. w. liegen, durch fremdartige Definitionen, dann die willkürliche Zusammenstellung der Sätze ohne sichtlichen Zusammenhang. Statt des letztern, der nichts principielles enthält, liessen sich wol manche andere Punkte nennen. Wesentlich aber ist jedenfalls der erstere, der zwar nicht zum erstenmal enthüllt wird, doch mehr Beachtung verdient, als er gefunden hat. Es ist dem Verfasser vollkommen beizustimmen, wenn er die Auskunft unnötig nennt. Es ist unnötig, bei Definition der entgegengesetzten Grössen auf räumliche Darstellung überzuspringen, es ist auch unnötig, einen andern als den auf blosser Wiederholung beruhenden Zahlbegriff zugrunde zu legen, um zur strengen Entwickelung des allgemeinsten Zahlbegriffs zu gelangen. Dass die gegenwärtige Bearbeitung sich denjenigen zugesellt, die die einheitliche, rein arithmetische Methode zur Durchführung bringen, ist an sich zu schätzen; unterscheidend für sie ist, dass sie die logische Seite der Arithmetik durch besondere Ausführlichkeit in den Vordergrund stellt, also die gangbaren Irrtümer und den gewöhnlichen Mangel an Rechenschaft über die Grundbegriffe für wichtig genug hält, ihnen mit allen Mitteln reichlicher Auseinandersetzung entgegenzutreten. Freilich hätte die Darlegung noch sehr an Deutlichkeit gewinnen können, wenn die Ausführlichkeit mit Concinnität und Vermeidung des Ueberflüssigen verbunden aufträte; indessen kann man mit dem Getanen schon zufrieden sein.

Fragt man nun aber, ob die logische Revision selbst richtig vollzogen sei, so zeigt gleich die erste Erklärung, welche nur eine gedankenlose Wiederholung eines häufig vorkommenden Fehlgriffs ist, das Gegenteil. In der Tat findet man in manchen Lehrbüchern aufgestellt, Rechnen sei die Verknüpfung mehrerer Zahlen zu einer; aber trotzdem wird in denselben Lehrbüchern der Begriff im richtigen Sinne geübt, und im Widerspruch mit der Erklärung unter dem Worte das verstanden, was der Schüler factisch beim Rechenunterricht tun lernt, was er daher einzig und allein darunter verstehen kann, näm-

lich die Transformation der durch Operationsverknüpfung oder durch Bedingungen bestimmten Zahlen in dekadisch geschriebene oder allgemeiner in zweckentsprechend gestaltete Zahlen. Der Verfasser des gegenwärtigen hingegen hat nicht nur die falsche Erklärung aufgenommen, sondern bemüht sich auch sie consequent festzuhalten und zu realisiren, verursacht sich dadurch Schwierigkeiten, und bewirkt, dass manche Erörterungen je wortreicher desto dunkeler ausfallen. In der genannten Frage kann von verschiedener Ansicht nicht die Rede sein. Wird aus den Zahlen 3, 7, 4 durch Verknüpfung eine Zahl $3.7+4$ gebildet, und diese eine in der Form 25 dargestellt, so sind dies zwei Acte, beide nötig um zum Zweck zu gelangen. Welchen von beiden man aber Rechnen nennt, wird niemand in Zweifel sein, sonst kann man es in jedem Rechenbuche sehen, dass der erste stets in der Aufgabe schon vollzogen und der zweite allein es ist der vom Schüler verlangt wird. Nicht minder deutlich zeigt sich der Sachverhalt in der Buchstabenrechnung. Die Verknüpfung der Zahlen a, b, c zu der einen Zahl $ab+c$ giebt nichts zu rechnen; dagegen nennt man die Verwandlung von $ab+ac$ in $a(b+c)$ eine Addition, die umgekehrte eine Multiplication. Wird der Verfasser hier behaupten, das Rechnen bestünde in der Verknüpfung $ab+ac$ einerseits, $a(b+c)$ andrerseits? Welches Motiv hat er dann, die Gleichheit beider so verschieden gebildeter Zahlen zu lehren? Die ganze Theorie der Buchstabenrechnung besteht dann aus Lehren, die mit seinem Begriff des Rechnens nichts zu tun haben; denn alle handeln von Umformung der Buchstabenausdrücke. Das eben ist der grosse Mangel in der anfänglichen Begriffsbestimmung, dass ihr gegenüber die Doctrin durchweg ganz unmotivirt auftritt. Die Acte der Transformation zu motiviren ist der Verfasser sichtlich bemüht, doch wird das Mislingen nur durch den Wortreichtum verhüllt, der durch selbstgemachte Schwierigkeiten hervorgerufen ist.

Auf die falsche Definition des Rechnens sind gewisse Logiker offenbar dadurch verfallen, dass sie beim Nachdenken über das Wesen der elementaren Operationen diese aus ihrem Zusammenhange mit der Theorie lösten, und so nach Abstraction von Sinn und Bedeutung nur mit dem Willküract der Verknüpfung zu tun hatten. Allerdings kann man ja, nachdem einmal das Rechnen durch Ausübung bekannt ist, schlechthin und ohne Bezugnahme auf irgend welche Transformation sagen: Multiplicire die Zahl mit a, subtrahire dann b u. s. w. Dann scheint es, und namentlich während man definiren will, was mit diesen Acten gemeint ist, als wäre die Rechnungsart, auch wo man vom Facit nichts weiss, an sich ein geschlossener klarer Begriff. Dabei wird aber übersehen, dass dieser Begriff in nichts zerfliesst, wenn das Resultat der Operation ein neues Ding sein und nicht einen

Platz in derselben Zahlenreihe einnehmen soll. Hiervon kann man abstrahiren, im Augenblicke wo man die Definition aufstellt; aber es existirt keine einzige Anwendung, in der nicht die bei Seite geschobene Bedeutung sich mit Notwendigkeit geltend machte.

Gehen wir nun weiter auf den Inhalt der Schrift ein, so ist es bei ihrem vorwaltend logischen Gesichtspunkt vor allem ihr Verhalten in Betreff der negativen und gebrochenen Zahlen, wovon ihre Leistung abhängt. An Vorsicht lässt sie es nicht fehlen. Dass sich z. B. die Vertauschbarkeit der Factoren nicht ohne neue Begründung auf negative anwenden lässt, wird hervorgehoben. Doch die Furcht vor Fehlschlüssen lehrt nicht auf die leitenden Punkte aufmerksam sein. Statt soviel von den Schwierigkeiten zu reden, wie es hier bei Einführung der Brüche geschieht, hätte der Verfasser die Frage beleuchten müssen: Sind alle Grössen unbegrenzt teilbar? Was berechtigt uns, wenn sie es nicht sind, oder wenn unter der Allgemeinheit dieser Fall mit begriffen ist, Brüche einzuführen? Hierüber schlüpft er mit der eingeschalteten, offenbar unwahren Behauptung hinweg „da jede Grösse bis ins Unendliche teilbar ist“. Bekanntlich giebt es zwei verschiedene Gründe der Berechtigung. Erstlich lassen sich in vielen Fällen die negativen, in vielen Fällen die gebrochenen Zahlen wirklich darstellen. Auf diesen allein hat der Verfasser geachtet; nur verschweigt er leider beidemal die Einschränkung. Zweitens kann die Rechnung mit negativen, mit gebrochenen Zahlen positives, ganzzahliges Resultat geben, und da kein theoretisches Resultat letztes Resultat ist, so behält auch das negative und gebrochene Resultat unter allen Umständen Bedeutung durch seine weitere Anwendbarkeit. Der letztere ist unstreitig der Hauptgrund; denn aus ihm leuchtet die Berechtigung des factisch geübten Verfahrens ein, welches gar nicht nach der Beschaffenheit des Resultats fragt. Dass der Verfasser ihn ganz ignorirt, ist ein grosser Mangel; denn es sind infolge dessen auch die Beweise weggeblieben, die zur Begründung notwendig waren.

Aus dem Vorstehenden erhellt wol zur Genüge, dass der Verfasser seine Aufgabe nicht bewältigt hat; es hatte aber nicht sowol den Zweck seinen Versuch abzuweisen, als vielmehr die Durchführbarkeit seines Gedankens darzutun. H.

Geometrie.

Elemente der Geometrie. Leitfaden für den Unterricht in Planimetrie und Stereometrie. Von Dr. Kurt Schurig, Oberlehrer an der k. Gymnasial- und Realschulanstalt und Lehrer der Mathematik

an der k. Baugewerkenschule zu Plauen i. V. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 210 in den Text gedruckten Figuren. Plauen, 1876. A. Hohmann. 111 S.

Das Buch ist zum Gebrauch an der Baugewerkenschule in Plauen speciell bestimmt. Absehend von allem Zweck der Ausbildung für mathematisches Studium und Entwickelung productiver Fähigkeiten, ist es nur darauf berechnet der Aneignung des Lehrstoffs in gehörigem Umfang auf kürzestem und bequemstem Wege zu dienen. In dieser Eigenschaft bleibt aber sorgfältige Bearbeitung, concinner Ausdruck, Einfachheit der Darstellung, gute Auswahl des praktisch Nutzbaren und Reichhaltigkeit anzuerkennen. Weniger notwendig wäre es wol gewesen sich jeder misbräuchlichen Terminologie, die in halbgebildeten Kreisen Fuss gefasst hat, anzuschliessen; denn in der Materie praktisch, in der Form unpraktisch zu sein, ist doch keine Vorschrift für den Techniker, wenn gleich der Wunsch mit jenen Kreisen Fühlung zu behalten auch dies erklärlich macht. H.

Lehrbuch der Stereometrie zum Gebrauche bei dem Unterrichte in Gymnasial- und höheren Realanstalten. Von Oberstudienrath Dr. von Nagel, Ritter 1. Cl. des kgl. württemb. Kronordens und des kgl. württemb. Friedrichordens. Mit vielen dem Text beigedruckten Holzschnitten. Vierte vermehrte Auflage. Ulm 1876. Gebrüder Nübling. 118 S.

Das Lehrbuch will, wie der Verfasser erklärt, von dem Gesichtspunkts beurteilt sein, dass der Hauptwert des mathematischen Unterrichts in der innern bildenden Kräft ruht, welche dieser Wissenschaft innewohnt, in dem Sinne für Wissen und Wissenschaftlichkeit, welche sie durch die strengste Logik, die sie charakterisirt, zu wecken geeignet ist, und in der Sicherheit und Zuversicht, mit welcher der Schüler durch sie in seinem Denken vorwärts schreiten lernt. Fragt man, was die gegenwärtige Bearbeitung für diesen bildenden Zweck getan hat, so ist in der Tat ein Punkt zu nennen, in welchem sie bessernd vorgegangen ist. Die Kugel, welche gewöhnlich nur als einer unter den Körpern, die man in den Elementen zu betrachten für gut findet, und noch dazu als letzter behandelt wird, nimmt hier vollständig die Stelle ein, welche der Kreis in der Planimetrie behauptet; die Lehre von der Kugel, nämlich als regulirendes Element, nicht als Object der Messung, folgt unmittelbar auf den Abschnitt von der Stellung der Ebenen und Geraden. Dass die den Kreissätzen analogen Sätze von den Schnitten und Berührungen der Ebenen und Geraden mit der Kugel und von den die Centriewinkel messenden Normalbogen sehr zur Orientirung in den räumlichen Verhältnissen beitragen,

dass sie schon an dieser Stelle leicht zum Verständniss gelangen, daher hier ihren geeigneten Platz haben, leuchtet auf den ersten Blick ein. Ueberdies macht der Verfasser mit Recht darauf aufmerksam, wieviel Aewendungen die Kugelsätze in fremden Unterrichtsgegenständen, der Geographie u. a. haben. Können wir dies als einen wesentlichen und definitiven Fortschritt der Methode verzeichnen — denn wieder davon abzugehen ist kein Grund ersichtlich, da weder ein Zusammenhang zerrissen, noch das Pensum im ganzen verlängert worden ist — so steht im übrigen, namentlich aber im Betreff der Ausführung im einzelnen, das Lehrbuch noch ganz auf dem gewöhnlichen Niveau. Die Sätze des ersten Abschnitts, welche doch gerade die Bestimmung haben, eine Uebersicht über die räumlichen Lagen zu geben, mit den Verhältnissen vertraut zu machen, sind noch gerade so bunt, als wäre es der erste Versuch, sie der Reihe nach aus einander zu beweisen, kein Fortschritt vom Einfachen zum Mannichfaltigen, von der parallelen zur rechtwinkligen und dann zur schiefen Lage. Ebenso wenig ist in den übrigen Abschnitten ein ordnendes Princip zu erkennen, während die Ordnung der Abschnitte selbst eine recht vernünftige ist: auf die Kugel folgt die Ecke und das sphärische Dreieck, dann die Körper, alles bis dahin nach allgemeinen Eigenschaften, zuletzt die Inhaltsberechnungen. Incorrecte Ausdrücke kommen bisweilen vor. „Die Geometrie ist die Lehre von den Raumgrössen" ist eine Behauptung, deren Unwahrheit auf der Hand liegt Die Geometrie handelt ziemlich ebensoviel von Dingen, die keine Grössen sind, wie unbegrenzte Gerade und Ebenen, deren Schnittpunkte und Schnittlinien u. s. w. und ein Kreis gilt ihr nicht für dasselbe als eine gleichgrosse Gerade. „Zwei Ebenen fallen in einem Teile ihrer Punkte zusammen". Was heisst „ein Teil der Punkte"? Da die Punkte der Ebene keine Zahl haben, so kann es doch auch keinen Teil dieser Zahl geben. Beide Ausdrücke entsprechen einer mangelhaften Entwickelung des Denkens und stehen in schroffem Gegensatz zu dem oben aufgestellten Gesichtspunkt. Doch diese formellen Fehler sind verschwindend gegen die Unklarheit, mit welcher die Inhaltsberechnung aus den parallel begrenzten Elementen vorgetragen wird. Das einzelne Element, wird behauptet, aber nicht erklärt, habe keinen Einfluss auf die Grösse des Körpers. Dennoch besteht der Körper als lauter solchen Elementen. Wie soll der Schüler das zusammenreimen? Gerade das war ja zu zeigen, wie die Grösse des Körpers durch die Grösse des Elements bedingt ist. Da der Verfasser wol kein Verständniss vom Unendlichkleinen hat, so wollte er, wie es scheint, die Schwierigkeiten der unendlich kleinen Differenz durch jenen Machtspruch dem Blick entziehen. Doch anstatt denselben daran vorbei auf die Hauptsache zu lenken, verdeckt er lieber gleich das ganze Object seiner Betrachtung. Merkwürdig

ist, dass er die Beweisart in der Vorrede hervorhebt. „Es ist mir wohl bekannt, was sich gegen diese Beweisart einwenden lässt. Aber ich kenne keine andere, die den Namen einer elementaren mit Recht verdiente.“ Trotz dem, dass ihm die Schwäche bekannt war, und trotz dem ausgesprochenen Grundsatz strengster Logik entscheidet er sich für das Ungenügende. In der Tat liegt aber die Schuld an etwas ganz anderem als an der Wahl des Deductionsweges. Streng, elementar und ohne grosse Umständlichkeit lässt sich die bezeichnete Methode durchführen. Nur muss man die unendlichkleinen Grössen nicht ignoriren, sondern ihre Bedeutung und die darauf basirten Schlüsse erklären. H.

Die regulären und halbregulären Polyeder. Mit 1 Tabelle und 113 stereoscopischen Figuren. Von Dr. Th. Hugel, k. Rector an der Gewerbschule zu Neustadt a. d. H. Neustadt a. d. H. 1876. A. H. Gottschick-Willer. 4⁰. 20 S.

Die Schrift ist eine Sammlung von einfachen Grössenrelationen, welche sich zwischen den Bestimmungsstücken der regulären Polyeder, nicht bloss der unmittelbar vorhandenen, sondern auch mancher durch eigene Constructionen hinzukommenden, finden lassen. Sie geht nach keiner Seite hin auf Erschöpfung eines Bezirks aus, behandelt vielmehr jedes Einzelne als Gegenstand eigenen Interesses, wie es der Bestimmung zu Uebungsaufgaben entspricht. Die Herleitungen sind meistens direct, nicht in synthetischer Verkettung von einander abhängig, und werden mit einfachen zur Hand liegenden Mitteln ohne Kunstgriffe in aller Kürze vollzogen. Was halbreguläre Polyeder, goldenes Polyeder u. s. w. genannt wird, sind nur Ergebnisse solcher Constructionen, die zu einfachen Relationen führen; unter diesem Gesichtspunkt werden die archimedischen, antiarchimedischen, Rhomben- und poinsot'schen Polyeder behandelt; eine Discussion giebt bei jeder neuen Figur die Haltpunkte der geordneten Vorstellung. Besonders empfehlend ist die Beigabe der stereoskopischen Darstellungen. H.

The cone and its sections treated geometrically, by S. A. Renshaw of Nottingham. London 1875. Hamilton, Adams, and Co. 4⁰. 148 S.

Die hier gewählte Methode nimmt zwei charakteristische Normen für sich in Anspruch: sie soll die Eigenschaften der Kegelschnitte erstens aus deren Lage im Kegel, zweitens geometrisch herleiten. Der Verfasser bezeichnet sie selbst als Rückkehr zur Methode der Alten, findet jedoch Gründe sie überhaupt zu bevorzugen, und beruft

sich in dieser Beziehung auf den Vorgang Hamilton's. Die Berechtigung des Versuchs von vornherein zugestanden, darf man indes wol an die Ausführung der Idee die Forderung stellen, dass sie derselben auch ganz entspricht und in Allgemeinheit der Auffassung der einschlagenden Fragen sowie in Eleganz der Deduction etwas mehr leistet als das Vorgefundene. Ist einmal der Kegel in seiner Beziehung zur Schnittfigur zum Gegenstand des Interesses gemacht worden, so war die Frage nach der Gestalt des Schnitts einer beliebigen Ebene jedenfalls erste und Hauptfrage. Ein solcher Schnitt wird hier gar nicht erwähnt; es kommen nur Schnittebenen senkrecht zur Projectionsebene der Kegelaxe vor, kein Wort davon, dass andere dieselben Figuren ergeben. Ferner hätte man wol erwarten dürfen, dass die Deduction, wenn auch nur in manchen Punkten, mit der Ausgangsbetrachtung in Connex bleiben, und einige neue Beziehungen der Curvenmerkmale zum Kegel enthüllen würde. Es behält aber sein Bewenden bei einer einzigen: aus dem Schnitt in jener speciellen Lage wird die Focal-Eigenschaft hergeleitet; nachdem hiermit eine für sich ausreichende Bestimmung der Curve gewonnen ist, bleibt die Darstellung bis ans Ende innerhalb der Ebene und kommt nicht wieder auf den Kegel zurück. Demnach ist die Zuziehung des Kegels nichts weiter als ein zurückgeschobener Ausgangspunkt und ohne allen Einfluss auf die Methode. Wenn endlich die letztere geometrisch genannt wird, so trifft dies nur insofern zu, als der Leser zu beständiger Vergleichung mit der Figur genötigt ist. Coordinaten kommen nicht in Anwendung; dadurch wird aber die Rechnung, aus der doch alle Herleitung besteht, nicht kürzer, sondern nur mühevoller durchzulesen. Die Figuren sind mit grossem Aufwand an Raum, aber geringer Sorgfalt ausgeführt. So fällt z. B. ein Kegelschnitt zum grossen Teil ausserhalb des Kegelbildes. H.

P h y s i k.

Lehrbuch der physikalischen Mechanik von Dr. Heinrich Buff, Professor der Physik an der Universität Giessen. In zwei Theilen. Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzstichen. Braunschweig 1874. Vieweg und Sohn.

Indem wir dieses Buch, welches nach dem Erscheinen der ersten Lieferung im 220. litt. Bericht genannt worden ist, nach seinem Abschluss noch einmal aufführen, geschieht es nur um zu constatiren, dass auch die drei übrigen seitdem erschienenen Lieferungen das Urteil bestätigen, mit dem wir es damals abgefertigt haben. Die ganze voluminöse Schrift ist nichts als eine Zusammentragung vorgefundenen

Lehrstoffs ohne jeden Hinblick auf das Bedürfniss dessen, der davon Gebrauch machen soll. Sie ist das Gegenteil von dem, was die Ankündigung auf dem Umschlag als das Streben des Verfassers bezeichnet. Der Zurückführung der Lehren auf die Erfahrungsgrundlagen hat sich kaum ein anderes Lehrbuch der Physik in dem Masse überhoben als das gegenwärtige. Die Sätze, ohne Angabe was daran und wodurch es gesichert ist, werden schlechthin als Resultate, man sieht nicht wovon, aufgestellt. Dies kann natürlich nicht von denjenigen Partien gelten, welche speciell auf Gegenstände neuerer Forschung eingehend die Originalarbeiten auch in der Form der Darstellung benutzen konnten. Die Sorgfalt in der Sicherstellung und die klare Bezeichnung des Zieles, der man hier begegnet, steht in auffälligem Gegensatz zur Behandlung der allgemeinen Theorie. H.

Compendium der Experimental-Physik nach Jamin's Petit Traité de Physique deutsch bearbeitet von Dr. G. Recknagel, Professor für Physik und techn. Mechanik, Rector der königl. Industrieschule in Kaiserslautern. Stuttgart 1876. Meyer u. Zeller. 875 S.

Das nach dem Erscheinen der ersten Lieferungen zweimal, in den litt. Berichten 222. und 225., besprochene Werk ist jetzt vollendet und enthält nun in 7 Abschnitten die Lehre von der Schwere und der Elasticität, der Wärme, der Reibungselektricität, den elektrischen Strömen, dem Magnetismus, dem Schall und dem Lichte. Der Charakterisirung des zweiten Abschnitts entsprechen auch ganz die folgenden. In allen Punkten findet man dasselbe correcte Zuwerkegehen: ausgehend von der unmittelbar aufgefassten Tatsache führt der Vortrag durch das Experiment zur Theorie hin, so dass von Anfang bis Ende deutlich wird und sich beständig überschauen lässt, auf welchen Tatsachen, Annahmen und Bedingungen jede Lehre beruht. Das Compendium ist daher, hinsichtlich der allein in Betracht kommenden Abschnitte 2. bis 7., denjenigen seltenen Erscheinungen zuzuzählen, welche alle didaktischen Anforderungen in vollem Masse erfüllen.

H.

Schulphysik. Bearbeitet von Albert Trappe, Professor und Prorector an der Realschule am Zwinger zu Breslau. Siebente, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 250 in den Text gedruckten Abbildungen. Breslau, Ferdinand Hirt. 280 S.

Die neue Auflage ist auf dem in den früheren Auflagen ernstlich verfolgten Wege der Emendirung, namentlich im Gebiete der Mechanik, fortgeschritten, und auf einen Standpunkt gelangt, welcher der heutigen höheren Schätzung des physikalischen Unterrichts entspricht.

Die vielen Irrlehren, welche man vor nicht gar langer Zeit noch unter dem Vorwande, bei der geringen mathematischen Entwickelungsstufe der Schüler auf exacte Darstellung verzichten zu müssen, hegte, sind nicht nur beseitigt, sondern es sind auch direct die wichtigsten Sätze ausgesprochen, welche denselben entgegenstehen und zu den richtigen Vorstellungen den Grund legen. Um so mehr als dies hoffen lässt, dass der Verfasser auch den letzten Rest der alten Irrlehren gern fallen lassen und methodischen Verbesserungen ferner Raum gönnen wird, mag folgendes bemerkt sein. Von der Centrifugalkraft sagt das Lehrbuch, sie höbe die Centripetalkraft auf. Damit steht aber die kreisförmige Bewegung offenbar im Widerspruch; denn bei Null-Kraft kann nur eine geradlinige gleichmässige Bewegung stattfinden. Da die Wirkung der Centripetalkraft allein der Kreisbewegung entspricht, so folgt, dass die sogenannte Centrifugalkraft nicht als Kraft in Rechnung kommen darf. Bei deren Einführung hätte der Begriffsverwirrung, der hier durchweg Vorschub geleistet ist, durch reichliche Aufklärung über den Sachverhalt gewehrt werden müssen. Hieraus erhellt zugleich, wie wenig es genügen kann, wenn das Lehrbuch den Satz aufstellt: Ein bewegter Körper kann nur durch eine Kraft zur Ruhe kommen. Ist es denn so schwer oder überhaupt schwerer den vollständigen Satz zu verstehen, dass jeder Bewegungszustand nur durch eine Kraft geändert werden kann, dass Ablenkung aus der Richtung, Beschleunigung und Verzögerung stets einer Kraftwirkung zuzuschreiben ist? Ferner wäre in methodischer Beziehung eine deutlichere Scheidung des mathematisch logischen Elements zu wünschen. Vom Parallelogramm der Kräfte, wie überhaupt von principiellen Sätzen, verlangt man keinen mathematischen Beweis, sondern klare Entfaltung des Sachverhalts; hier beeinträchtigt es nur die unbefangene Auffassung, wenn man Beweis darüber schreibt und die Meinung erhält, als ob man beweisen wolle, was ja doch nicht geschieht. Dagegen hätte wol die Existenz des Schwerpunkts förmlich bewiesen werden können, da sie eine strenge Folge der vorhergehenden Sätze von Hebel und schiefer Ebene ist. Die gegenwärtige Darstellung lässt es so scheinen, als verstünde sich dieselbe von selbst, was doch nicht der Fall ist. H.

Preisaufgaben

der

Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft

in Leipzig.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Section.

1. Für das Jahr 1876.

Trotz der meisterhaften Arbeiten Leverrier's über die Bewegung des Merkur kann die Theorie dieses Planeten noch nicht als endgültig abgeschlossen betrachtet werden. Die Gesellschaft wünscht eine ausführliche

> Untersuchung der die Bewegung des Merkur bestimmenden Kräfte,

mit Rücksicht auf die von Laplace (in der Mécanique céleste), von Leverrier (in den Annales de l'Observatoire und den Comptes rendus de l'Académie des Sciences), von Hansen (in den Berichten der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. W. vom 15. April 1863) und von Wilhelm Weber (vergl. Zöllner über die Natur der Cometen, S. 333) angedeuteten Einwirkungen. Ausser der vollständigen Berechnung der Störungen ist eine Vergleichung mit den Beobachtungen unerlässlich, um zu zeigen, bis zu welchem Grade der Genauigkeit sich die eingehenden Constanten bestimmen lassen. Die Construction von Tafeln zur Ortsberechnung behält sich die Gesellschaft vor zum Gegenstand einer späteren Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

2. Für das Jahr 1877.

Der nach Encke benannte und von diesem Astronomen während des Zeitraumes von 1819—1848 sorgfältig untersuchte Comet I, 1819, hat in seiner Bewegung Anomalieen gezeigt, welche zu ihrer Erklärung auf die Hypothese eines widerstehenden Mittels geführt haben. Da indessen eine genauere Untersuchung der Bahn nur über einen

beschränkten Theil des Zeitraums vorliegt, über welchen die Beobachtungen (seit 1786) sich erstrecken, so ist eine vollständige Neubearbeitung der Bahn des Encke'schen Cometen um so mehr wünschenswerth, als die bisher untersuchten Bewegungen anderer periodischen Cometen keinen analogen widerstehenden Einfluss verrathen haben. Die Gesellschaft wünscht eine solche vollständige Neubearbeitung herbeizuführen, und stellt desshalb die Aufgabe:

> die Bewegung des Encke'schen Cometen mit Berücksichtigung aller störenden Kräfte, welche von Einfluss sein können, vorläufig wenigstens innerhalb des seit dem Jahre 1848 verflossenen Zeitraums zu untersuchen.

Die ergänzende Bearbeitung für die frühere Zeit behält sich die Gesellschaft vor, eventuell zum Gegenstand einer späteren Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

3. Für das Jahr 1878.

Die Entwickelung des reciproken Werthes der Entfernung r zweier Punkte spielt in astronomischen und physikalischen Problemen eine hervorragende Rolle. In der Theorie der Transformation der elliptischen Functionen wird die zuerst von Cauchy entdeckte Gleichung bewiesen

$$\frac{a}{r}\left(1+2e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{4\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{9\pi a^2}{r^2}}+2e^{-\frac{16\pi a^2}{r^2}}\ldots\right)=$$
$$=1+2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{9\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{16\pi r^2}{a^2}}\ldots$$

in welcher mit Rücksicht auf die zu erzielende Genauigkeit die positive willkürliche Constante a so gross gewählt werden kann, dass die Exponentialgrösse $e^{-\frac{\pi a^2}{r^2}}$ vernachlässigt werden darf. Alsdann hat man

$$\frac{a}{r}=1+2e^{-\frac{\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{4\pi r^2}{a^2}}+2e^{-\frac{9\pi r^2}{a^2}}+\ldots$$

eine Reihenentwickelung von ungemein rascher Convergenz. Es steht zu erwarten, dass eine auf die vorstehende Formel gegründete Entwickelung der Störungsfunction in dem Problem der drei Körper sich für die numerische Rechnung als vortheilhaft erweisen werde.

Die Gesellschaft wünscht eine unter dem angedeuteten Gesichtspunkte ausgeführte Bearbeitung des Störungsproblems zu erhalten.

Indem sie dem Bearbeiter die Wahl des besonderen Falles überlässt, in welchem die numerische Anwendbarkeit des Verfahrens gezeigt werden soll, setzt sie voraus, dass das gewählte Beispiel hinlänglichen Umfang und Wichtigkeit besitze, um die Tragweite der vorgeschlagenen Methode und ihr Verhältniss zu den bisher angewandten hervortreten zu lassen. Preis 700 Mark.

4. Für das Jahr 1879.

Durch die in den Abhandlungen der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften von W. Hankel veröffentlichten Untersuchungen ist nachgewiesen worden, dass die Thermoelektricität nicht nur auf den hemimorphen Krystallen auftritt, sondern eine an allen Krystallen wahrzunehmende Eigenschaft ist, soweit deren krystallinische Structur und materielle Beschaffenheit überhaupt ein Entstehen und Anhäufen der Elektricität bis zu einer durch unsere Instrumente nachweisbaren Stärke gestatten. Die erwähnten Abhandlungen umfassen ausser den hemimorphen Krystallen des Boracites und Quarzes die symmetrisch gebildeten Krystalle des Idokrases, Apophyllits, Kalkspathes, Berylls, Topases, Schwerspathes, Aragonites, Gypses, Diopsids, Orthoklases, Albits und Periklins, und lehren nicht nur die Vertheilung der Elektricität auf den in den verschiedenen Formen vollkommen ausgebildeten, sondern auch auf den durch Anwachsen und sonstige Hindernisse in ihrer Entwickelung gehemmten Individuen, sowie auf den Bruch oder Anschlagen der Durchgänge künstlich erzeugten Begrenzungsflächen kennen. Es scheinen nun unter allen zwischen der Wärme und der Elektricität beobachteteten Beziehungen die thermoelektrischen Erscheinungen am geeignetsten, eine nähere Kenntniss des Zusammenhanges zwischen den genannten beiden Agentien zu ermöglichen, und es wird daher von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft für das Jahr 1879 als Preisaufgabe gestellt:

> **Auf streng physikalische Versuche gestützter Nachweis der Entstehung der auf Krystallen bei steigender und sinkender Temperatur hervortretenden Elektricität** (Thermoelektricität, Pyroelektricität, Krystallelektricität) **und der durch Bildungshemmnisse oder äussere Verletzungen derselben in der normalen Vertheilung entstehenden Aenderungen.**

Preis 700 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1876 Geh. Hofrath Prof. Dr. Hankel) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CXXXIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Riemann's, B., gesammelte mathemat. Werke u. wiss. Nachlass. Hrsg. v. H. Weber. 8. Leipzig, Teubner. 16 Mk.

Studnicka, F. J., Augustin Couchy als formaler Begründer der Determinanten-Theorie. 4. Prag, Calve. 2 Mk.

Wild, H., Zum Gedächtniss an M. H. v. Jacobi. 8. Leipzig, Voss. 80 Pf.

Wöckels, L., Geometrie d. Alten in e. Sammlg. v. 850 Aufg. 11. Afl. 8. Nürnberg, Korn. 1 Mk. 80 Pf.

Methoden und Principien.

Moroff, A., d. ersten Sätze der ebenen Geometrie. 8. Hof, Büching. 80 Pf.

Secchi, A., d. Einheit d. Naturkräfte. 3. Lfg. 8. Leipzig, Frohberg. 3 Mk.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Frischauf, J., Uebungen zu d. Elementen d. Geometrie. 8. Graz, Leuschner & L. 60 Pf.

Heilermann, H., Lehr- u. Uebungsb. f. d. Unt. in d. Mathematik an Gymn., Real- u. Gewerbeschulen. 2. Thl. 1. Abth. Ebene Geometrie. 2. Afl. 8. Coblenz, Hergt. 75 Pf.

Kähler, H. G., logarithmisch-trigonometr. Handbuch. 13. Asg. 8. Leipzig, Tauchnitz. 3 Mk.

Köster, T. E., Material f. d. Unt. in d. Arithmetik u. Algebra. 3. Afl. 8. Oldenburg, Schmidt. 2 Mk. 50 Pf.

Mehler, F. G., Hauptsätze d. Elementar-Mathematik. 8. Afl. 8. Berlin, G. Reimer. 1 Mk. 50 Pf.

Krafft, Th., Sammlg. arithmet. Beispiele u. Aufg. z. Gebr. in Lateinschulen. 2. Bdchn. 4 Afl. 8. Nürnberg, Korn. 2 Mk.

Pollak, F. X., Lehr- u. Uebungsb. d. Elementar-Arithmetik. 5. Afl. 8. Augsburg, Rieger. 2 Mk. 40 Pf.

Reeb, W., algebr. Uebungsb.. 2. Afl. 8. Giessen, Roth. 1 Mk. 50 Pf.

Vega's, logarithmisch-trigonometr. Handb. 60. Afl. 8. Berlin. Weidmann. 4 Mk. 20 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Hugel, Th., d. Problem d. Magischen Systeme. 4. Neustadt, Gottschick — W. 4 Mk.

Rosenberger, F., d. Buchstabenrechnung. 8. Jena, Dufft. 2 Mk.

Steck, F. X., u. J. Vielmayr, Lehrb. d. Arithmetik f. Lateinschulen. 5. Afl. 8. Kempten, Kösel. 1 Mk. 20 Pf.

Geometrie.

Deter, C. G. J., Stereometriekompendium. 8. Berlin, Kamlah. 1 Mk. 20 Pf.

Frischauf, J., Elemente d. absoluten Geometrie. 8. Leipzig, Teubner. 3 Mk. 40 Pf.

Hess, E., üb. d. zugleich eckigen u. gleichfläch. Polyeder. 8. Cassel, Kay. 4 Mk.

Hesse, O., Vorlesgn. üb. analyt. Geometrie d. Raumes, insbesondere üb. Oberflächen. 2. Ordng. Rev. v. S. Gundelfinger. 3. Afl. 8. Leipzig, Teubner. 13 Mk.

Hugel, Th., d. regulären u. halbregulären Polyeder. Mit Tafeln. 4. Neustadt, Gottschick — W. 3 Mk.

Kehr, C., prakt. Geometrie f. Volks- u. Fortbildungsschulen. 5. Afl. 8. Gotha, Thienemann. 3 Mk.

Kreuszel, J., Lehrb. d. darstell. Geometrie f. Mittelschulen u. z. Selbstunt. 1. Thl. 8. Brünn, Karafiat. 5 Mk. 40 Pf.

— dass., 2. Thl. 8. Ebd. 3 Mk.

Nagel, v., geometr. Analysis. 2. Afl. 8. Ulm, Wohler. 4 Mk. 40 Pf.

— Lehrb. d. Stereometrie. 4. Afl. 8. Ulm, Nübling. 1 Mk. 50 Pf.

Niemtschik, R., üb. d. Construction d. Umhüllungsflächen variabler Kugeln. 8. Wien, Gerold's S. 1 Mk. 60 Pf.

Pohlke, K., darstell. Geometrie. 1. Thl. 4. Afl. 8. Berlin, Gärtner. 3 Mk. 60 Pf.

— dass. 2. Thl. 8. Ebd. 6 Mk.

Recknagel, G., ebene Geometrie f. Schulen. 2. Afl. 8. München, Th. Ackermann. 2 Mk.

Scherling, C., Grundzüge d. axonometr. u. schiefen Parallel-Projection. 4. Leipzig, Teubner. 1 Mk.

Schleusing, R. v., Versuch. e. näherungsweisen geometr. Darstellg. d. $\sqrt{\pi}$. (Ausgeführt bis auf 6 Decimalstellen). 8. Berlin, Weidmann. 1 Mk.

Steiner's, J., Vorlesgn. üb. synthet. Geometrie. 2. Thl. Die Theorie d. Kegelschnitte, bearb. v. H. Schröter. 8. Leipzig, Teubner. 14 Mk.

Stüber, Leitf. z. Unt. in d. Geometrie. 3. Afl. 8. Leipzig, Klinkhardt. 1 Mk.

Trigonometrie.

Adam, W., Lehrb. d. ebenen Trigonometrie m. zahlreichen Beispielen u. Uebungsaufgaben. 8. Neu-Ruppin, Held. 3 Mk. 75 Pf.

Lorberg, H., Leitf. z. Unt. in d. Trigonometrie. 2. Afl. 8. Strassburg, Astmann. 60 Pf.

Lottner, E., Leitf. f. d. Unterricht in d. ebenen Trigonometrie. 8. Lippstadt, Staats. 80 Pf.

Geodäsie und praktische Geometrie.

Brill, A., Carton-Modelle v. Flächen 2. Ordng. Nr. 6. Hyperbol. Paraboloid. 8. Darmstadt, Brill. 2 Mk.

Hottenroth, F., d. verschiedenen Instrumente f. Vermessungen u. Nivellements. 8. Wiesbaden, Limbarth. 1 Mk. 80 Pf.

Praktische Mechanik.

Ritter, A., Lehrb. d. Ingenieur-Mechanik. 2. Hälfte. 8. Hannover, Rümpler. 8 Mk.

Optik.

Hugel, Th., d. Stereoskopie gestützt auf orthogonale Coordinaten. 8. Neustadt, Gottschick — W. 1 Mk. 30 Pf.

Röthig, O., d. Probleme d. Brechg. u. Reflexion. 8. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 80 Pf.

Astronomie und Meteorologie.

Bachmann, O., Grundriss d. Meteorologie. 8. Nürnberg, Korn. 80 Pf.

Bessel, F. W., Abhandlungen. Hrsg. v. R. Engelmann. 1. u. 2. Bd. 4. Leipzig, Engelmann. à 18 Mk.

Bruhns, C., monatl. Berichte üb. d. Resultate aus d. meteorolog. Beobachtgn., angestellt an d. k. sächs. Stationen im J. 1875. 4. Dresden. Leipzig, Teubner. 1 Mk. 50 Pf.

Fortschritte, die, auf d. Geb. d. Meteorologie. Nr. 3. 1874—75. 8. Leipzig, Mayer. 1 Mk. 60 Pf.

Lamp, E., d. scheinbare Ort d. Polarsterns α Ursae minoris. 8. Kiel. Berlin, Friedländer & S. 1 Mk.

Lorinser, F., d. Buch d. Natur. 1. Bd. Astronomie. 8. Regensburg, Manz. 5 Mk.

Sirius. Hrsg. v. R. Falb. 9. Bd. J. 1876. 7. Hft. 8. Leipzig, Scholtze. 4 Mk.

Spörer, G., Beobachtgn. d. Sonnenflecken. II. 4. Leipzig, Engelmann. 13 Mk. 50 Pf.

Ule, E., d. Sternenwelt. 2. Afl. 7. Lfrg. 8. Leipzig, Spamer. 1 Mk.

Vierteljahrsschrift d. astronom. Ges. Hrsg. v. E. Schönfeld u. A. Winnecke. 10. J. 4 Hft. u. 11. J. 2. Hft. 8. Leipzig, Engelmann. à 1 Mk. 50 Pf.

Wiener, C., üb. d. Stärke d. Bestrahlg. d. Erde durch d. Sonne in ihren verschied. Breiten u. Jahreszeiten. 8. Carlsruhe, Bielefeld. 2 Mk.

Nautik.

Jahrbuch, kleines naut., f. d. J. 1877. 8. Bremerh., v. Vangerow. 60 Pf.

Physik.

Christiani, A., Beiträge z. Electricitätslehre. Ueber irreciproke Leitg. electr. Ströme. 8. Berlin, Friedländer & S. 6 Mk.

Dorner, H., Grundzüge d. Physik. 3. Afl. 8. Hamburg, Meissner. 2 Mk. 50 Pf.

Jelinek, C., Psychrometer-Tafeln f. d. hunderttheiligen Thermometer nach Dr. H. Wild's Tafeln. 2. Afl. 4. Wien, Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik u. Meteorologie. 8. Afl. Bearb. v. L. Pfaundler. 1. Bd. 1. Abth. 8. Braunschweig, Vieweg & S. 4 Mk.

Puschl, C., neue Sätze d. mechan. Wärmetheorie. I. 8. Wien, Gerold's S. 40 Pf.

Recknagel, G., Compendium d. Experimentalphysik nach Jamin's Petit traité de physique. 6. (Schluss-)Abth. Optik. 8. Stuttgart, Meyer & Zeller. 3 Mk. cplt. 15 Mk.

Schulze, L. R., das Buch d. physikal. Erscheingn. Frei nach Guillemin. 9. bis 11. Lfg. 8. Leipzig, Frohberg. à 1 Mk.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen d. k. Akad. d. Wiss. zu Berlin. Mathemat. Classe. 1875. 4. Berlin, Dümmler. 4 Mk. 70 Pf.

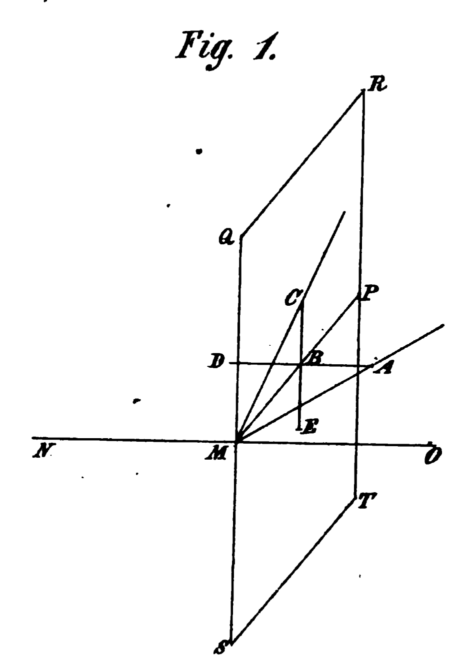
Abhandlungen d. k. Akad. d. Wiss. zu Berlin. Physikal. Classe. 1875. 4. Berlin, Dümmler. 26 Mk. 20 Pf.

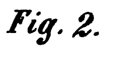
Berichte üb. d. Verh. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig. Mathemat.-phys. Classe. 1875. II. 8. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

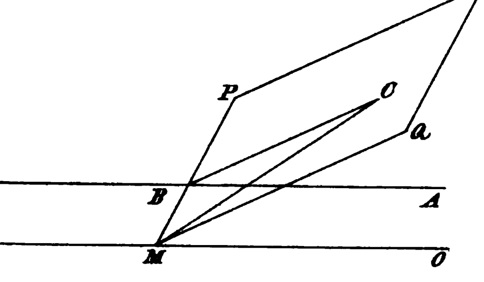
Preisschriften, gekrönt u. hrsg. v. d. Fürstlich Jablonowski'schen Ges. zu Leipzig. XIX u. XX. 8. Leipzig, Hirzel. 8 Mk.

Repertorium d. literar. Arbeiten aus d. Geb. d. reinen u. angewandten Mathematik. 1. Bd. 1. Hft. 8. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 40 Pf.

Sitzungsberichte der mathemat.-physikal. Classe d. k. b. Akad. d. Wiss. zu München. 1876. 1. Hft. 8. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.







XXIX. Thieme:

Binäre laterale Gerade.

Steindruckerei v. F. W. Kunike, Greifswald.

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

